ECRICOME PREPA 2022 - ECT - Technologique

Mathématiques option technologique Mathématiques

Note de délibération : 20 / 20

20 / 20

écricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 01 / 17

Numéro de table 006

Exercice 1

Partie A

1) a) $PQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \boxed{3I_3}$

b) $PQ = 3I_3$ donc P est inversible et son inverse noté $\boxed{P^{-1} \text{ est } \frac{1}{3}Q}$

2) a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n \end{pmatrix}$

et $MX_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{Ainsi, } \forall n \in \mathbb{N}, \ X_{n+1} = MX_n}$

b) Montrons par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = M^n X_0$

<u>Initialisation :</u> $M^0 X_0 = I X_0 = X_0$ et la propriété est vraie au rang 0.

<u>Hérédité :</u> Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $X_n = M^n X_0$

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= M X_n \\ &= M M^n X_0 \\ &= M^{n+1} X_0 \end{aligned}$$ et la propriété est héréditaire

<u>Conclusion :</u> D'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = M^n X_0$.

3) a) $4M - I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$4M - 4I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

$$(4M-I)(4M-4I) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{O_3}$$

b) On sait que $(4M-I)(4M-4I) = O_3$

Ainsi $(4x-1)(4x-4)$ est un polynôme annulateur de la matrice M. Ses racines sont $\frac{1}{4}$ et 1.

On en déduit que les valeurs propres possibles de M sont $\frac{1}{4}$ et 1.

4) a) On a D une matrice diagonale, P une matrice inversible et P^{-1} son inverse telles que $M = PDP^{-1}$. Ainsi $D = P^{-1}MP$.

$$D = P^{-1}MP = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{-2}{12} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}}$$

b) $\forall n \in \mathbb{N}, M^n = PD^nP^{-1}$ avec D une matrice diagonale

c) $$M^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix} \times \frac{1}{3} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \left(\frac{1}{4}\right)^n & 0 \\ 1 & -\left(\frac{1}{4}\right)^n & \left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1 & 0 & -\left(\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix} \times \frac{1}{3} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{M^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 + 2\times\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n & 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n & 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n & 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n & 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n & 1 + \left(\frac{2}{4}\right)^n \end{pmatrix}}$$

d) $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = X_n = M^n X_0$

Or $$M^n X_0 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 + 2\times\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n & 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n & 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n & 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n & 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n & 1 + \left(\frac{2}{4}\right)^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 + 2\times\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Ainsi, } \forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{1}{3}\left(1 + 2\times\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{4^n}\right) \\ \text{et } b_n = c_n = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right) \end{array}}$$

Écricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 05 / 15

Numéro de table 006

20 / 20

e) $\lim_{n \to +\infty} 1 + \frac{2}{4^n} = 1$ donc par produit $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{3}(1 + \frac{2}{4^n}) = \frac{1}{3}$

Ainsi $\lim_{n \to +\infty} a_n = \frac{1}{3}$

$\lim_{n \to +\infty} 1 - \frac{1}{4^n} = 1$ donc par produit $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{3}(1 - \frac{1}{4^n}) = \frac{1}{3}$

Ainsi $\lim_{n \to +\infty} b_n = \lim_{n \to +\infty} c_n = \frac{1}{3}$

5)
```
a = 1 ; b = 0
while a <= 0,334 and b >= 0,333
  n = n+1
  a = 1/3 * (1 + 2/4^n)
  b = 1/3 * (1 - 1/4^n)
end
disp(n)
```

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

Partie B

6) $P(A_0) = 1$; $P(B_0) = 0$ et $P(C_0) = 0$

$P(A_1) = \frac{1}{2}$; $P(B_1) = \frac{1}{4}$ et $P(C_1) = \frac{1}{4}$

car le joueur a $\frac{1}{4}$ chance de tirer un chiffre k dans l'ensemble $\{0, 1, 2, 3\}$ et pour rester sur la même case au moment 1, il doit tirer le 0 ou le 3.
Ainsi $P(A_1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

7/a) $P_{A_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{2}$ car si l'on suit le même raisonnement explicité dans la question précédente le joueur doit tirer le chiffre 0 ou 3 pour rester sur la même case.
Il vient donc, par équiprobabilité, $P_{A_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{2}$

$P_{B_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{4}$ et $P_{C_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{4}$

b) D'après la formule des probabilités totales dans le système complet d'évènements $\{A_n, B_n, C_n\}$:

$$P(A_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(A_{n+1})$$
$$\boxed{= P(A_n) \times \frac{1}{2} + P(B_n) \times \frac{1}{4} + P(C_n) \times \frac{1}{4}}$$

$P(B_{n+1}) = P(A_n)\, P_{A_n}(B_{n+1}) + P(B_n)\, P_{B_n}(B_{n+1}) + P(C_n)\, P_{C_n}(B_{n+1})$

$\boxed{= P(A_n)\frac{1}{4} + P(B_n)\frac{1}{2} + P(C_n)\frac{1}{4}}$

$P(C_{n+1}) = P(A_n)\, P_{A_n}(C_{n+1}) + P(B_n)\, P_{B_n}(C_{n+1}) + P(C_n)\, P_{C_n}(C_{n+1})$

$\boxed{= P(A_n)\frac{1}{4} + P(B_n)\frac{1}{4} + P(C_n)\frac{1}{2}}$

c) On remarque que $P(A_{n+1}) = a_{n+1}$ avec $P(A_n) = a_n$, $P(B_n) = b_n$ et $P(C_n) = c_n$. Idem pour $P(B_{n+1}) = b_{n+1}$ et $P(C_{n+1}) = c_{n+1}$.

On peut donc en déduire que $P(A_n)$, $P(B_n)$ et $P(C_n)$ sont données par les valeurs de a_n, b_n et c_n.

8) Le résultat obtenu en 4) et indique qu'au n-ième moment, on a autant de chances de se trouver sur la case 1, 2 ou 3.

Exercice 2

1)a) $\lim_{x \to -1^+} 1+x = 0^+$ donc $\lim_{X \to 0^+} \ln(X) = -\infty$ (par composée)

$\boxed{\text{Par produit } \lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} x\ln(1+x) = +\infty}$

On en déduit qu'en -1, la courbe de f admet une asymptote verticale.

b) $\lim_{x \to +\infty} x\ln(1+x) = +\infty$ (par produit)

$\boxed{\text{Donc } \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

c) On admet que la courbe de f admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

2)a) $\forall x \in]-1;+\infty[$, $f(x) = x\ln(1+x)$ et $f(x)$ est dérivable.

$f'(x) = 1 \times \ln(1+x) + x \times \frac{1}{1+x} = \boxed{\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}}$

20 / 20

Écricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 09 / 15

Numéro de table 006

b) On a, $\forall x \in]-1;+\infty[$, $f'(x) = \ln(1+x) + \frac{x}{1+x}$
et $f'(x)$ est dérivable

Donc $f''(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1+x-x}{(1+x)^2} = \frac{1+x+1}{(1+x)^2} = \boxed{\frac{x+2}{(1+x)^2}}$

c)

x	-1		$+\infty$
$(1+x)^2$	‖	$+$	
$x+2$	‖	$+$	
$f''(x)$	‖	$+$	
$f'(x)$	‖	$\nearrow$	

3) a) $\boxed{f'(0) = \ln(1+0) + \frac{0}{1+0} = \ln(1) = 0}$

$\boxed{\text{Ainsi } f'(x) \leq 0 \text{ si } x \in]-1;0] \text{ et } f'(x) \geq 0 \text{ si } x \geq 0}$

b)

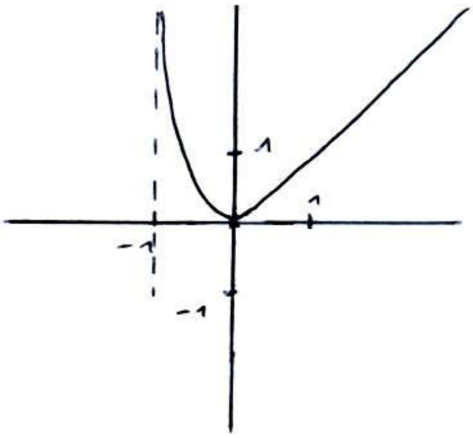
x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	$+\infty \searrow$	0	$\nearrow +\infty$	

$f(0) = 0\ln(0+1) = 0$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

4)



5) $I = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 x\ln(1+x)\,dx$

Il existe deux fonctions $u(x) = \ln(1+x)$ et $v(x) = \frac{x^2}{2}$ qui sont dérivables de dérivées continues sur $[0;1]$ telles que $u'(x) = \frac{1}{1+x}$ et $v'(x) = x$

donc $I = \int_0^1 f(x)\,dx = \left[\frac{x^2\ln(1+x)}{2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\times\frac{1}{2}\,dx$

$= \left(\frac{1\ln(2)}{2} - \frac{0\ln(1)}{2}\right) - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx$

$$\boxed{I = \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx}$$

b) $\forall x \in [0;1]$, $x - 1 + \frac{1}{x+1} = \frac{x(x+1) - (x+1) + 1}{x+1}$

$= \frac{x^2 + x - x - 1 + 1}{x+1}$

$\boxed{= \frac{x^2}{x+1}}$

c) Ainsi $\int_0^1 \frac{x^2}{x+1} dx = \int_0^1 x - 1 + \frac{1}{x+1} dx$

$= \left[\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1) \right]_0^1$

$= \frac{1}{2} - 1 + \ln(2) - \left(\frac{0}{2} - 0 + \ln(1) \right)$

$\boxed{= \ln(2) - \frac{1}{2}}$

d) On a $I = \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{x+1} dx$

$= \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2}\left(\ln(2) - \frac{1}{2} \right)$

$= \frac{\ln(2)}{2} - \frac{\ln(2)}{2} + \frac{1}{4}$

$I = \boxed{\frac{1}{4}}$

6) y = x * log(x + 1)
for x = [1 ; n]
plot2d (1 , 50)

7/a) On peut voir que la courbe de I_n admet une asymptote verticale en 1.

b) Grâce au graphique, on peut conjecturer que $\lim_{n \to +\infty} I_n = +\infty$

6/a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall x \in [0;1]$, $0 \leq x \leq 1$

$$\Leftrightarrow 1 \leq x+1 \leq 2$$

$$\Leftrightarrow \ln(1) \leq \ln(x+1) \leq \ln(2)$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \ln(x+1) \leq \ln(2)$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x^n \ln(x+1) \leq x^n \ln(2)$$

b) Par comparaison d'intégrales, $\int_0^1 0\,dx \leq \int_0^1 x^n \ln(x+1)\,dx \leq \int_0^1 x^n \ln(2)\,dx$

$$\Leftrightarrow 0 \leq I_n \leq \ln(2) \int_0^1 x^n\,dx$$

Or $\ln(2) \int_0^1 x^n\,dx = \ln(2) \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \ln(2) \left(\frac{1}{n+1} - \frac{0}{n+1} \right)$

$$= \frac{\ln(2)}{n+1}$$

$$\boxed{\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}^*, \ 0 \leq I_n \leq \frac{\ln(2)}{n+1}}$$

c) $\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(2)}{n+1} = 0$

Donc d'après le théorème des gendarmes, $\boxed{\lim_{n \to +\infty} I_n = 0}$

20 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 13 / 19

Numéro de table 006

Exercice 3

1) f est continue sur $]-\infty ; 0[$ et sur $]2a ; +\infty[$ (constante)
f est continue sur $[0 ; 2a]$ (fraction rationnelle).

De plus $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} 0 = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x}{2a^2} = 0$

$f(0) = \frac{0}{2a^2} = 0$

$\boxed{\text{Ainsi } \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = f(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) \text{ et } f \text{ est continue en } 0.}$

Et $\lim\limits_{x \to 2a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2a^-} \frac{x}{2a^2} = \frac{1}{a}$

et $\lim\limits_{x \to 2a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2a^+} 0 = 0$

$\boxed{\text{Ainsi } \lim\limits_{x \to 2a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 2a^+} f(x) \text{ donc } f \text{ n'est pas continue en } 2a.}$

Cependant f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

2) On a $f(x) \geqslant 0$ sur $]-\infty ; 0[$ et sur $]2A ; +\infty[$.

De plus si $x \in [0 ; 2A]$ alors $\frac{x}{2A^2} \geqslant 0$ et $f(x) \geqslant 0$

Donc $f(x) \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{2A} f(x)\,dx + \int_{2A}^{+\infty} f(x)\,dx \quad \text{(linéarité)}$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{2A} \frac{x}{2A^2}\,dx + \int_{2A}^{+\infty} 0\,dx$$

$$= 0 + \frac{1}{2A^2}\int_{0}^{2A} x\,dx + 0$$

$$= \frac{1}{2A^2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{2A}$$

$$= \frac{1}{2A^2}\left(\frac{(2A)^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2A^2} \times 2A^2$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

On peut donc en déduire que f est une densité de probabilité.

3) a) $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\, dx$

<u>1er cas.</u> Soit $x < 0$,

$$\int_{-\infty}^{x} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{x} 0\, dx = 0$$

<u>2ème cas.</u> Soit $0 \leq x \leq 2A$.

$$\int_{-\infty}^{x} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{0} 0\, dx + \int_{0}^{x} \frac{x}{2A^2}\, dx$$

$$= 0 + \frac{1}{2A^2} \int_{0}^{x} x\, dx$$

$$= \frac{1}{2A^2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^x$$

$$= \frac{1}{2A^2} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right)$$

$$= \frac{x^2}{4A^2}$$

<u>3ème cas.</u> Soit $x > 2A$

$$\int_{-\infty}^{x} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{0} 0\, dx + \int_{0}^{2A} \frac{x}{2A^2}\, dx + \int_{2A}^{x} 0\, dx$$

$$= 0 + 1 + 0$$

$$= 1$$

$$\boxed{\text{Ainsi } F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^2}{4A^2} & \text{si } 0 \leq x \leq 2A \\ 1 & \text{si } x > 2A \end{cases}}$$

b) $P_{[X > \frac{A}{2}]}(X \leq A) = \dfrac{P(\frac{A}{2} \leq X \leq A)}{P(X > \frac{A}{2})} = \dfrac{F(A) - F(\frac{A}{2})}{1 - F(\frac{A}{2})}$

$$= \frac{\frac{A^2}{4A^2} - \frac{\frac{A^2}{4}}{4A^2}}{1 - \frac{\frac{A^2}{4}}{4A^2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{16}}{1 - \frac{1}{16}}$$

$$= \frac{\frac{3}{16}}{\frac{15}{16}}$$

$$\boxed{P_{[X > \frac{A}{2}]}(X \leq A) = \frac{1}{5}}$$

4) $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{0} x\, 0\, dx + \frac{1}{2A^2} \int_{0}^{2A} x^2 + \int_{2A}^{+\infty} 0x\, dx$

$$= 0 + \frac{1}{2A^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{2A} + 0$$

$$= \frac{1}{2A^2}\left(\frac{(2A)^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{2A^2} \times \frac{8A^3}{3}$$

$$\boxed{E(X) = \frac{4A}{3}}$$

Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 17 / 19

Numéro de table 006

5) D'après la formule de Koenig-Huygens : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} x^2 0\,dx + \frac{1}{2A^2}\int_0^{2A} x^3 + \int_{2A}^{+\infty} x^2 0\,dx$$

$$= 0 + \frac{1}{2A^2}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^{2A} + 0$$

$$= \frac{1}{2A^2}\left(\frac{(2A)^4}{4} - \frac{0^4}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{2A^2} \times 4A^4$$

$$E(X^2) = 2A^2$$

Donc $V(X) = 2A^2 - \left(\frac{4A}{3}\right)^2$

$$= 2A^2 - \frac{16A^2}{9}$$

$$= \frac{18A^2 - 16A^2}{9}$$

$$\boxed{V(X) = \frac{2A^2}{9}}$$

6) a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x^2 < 0 \\ \frac{x}{4a^2} & \text{si } 0 \leq x^2 \leq 4a^2 \\ 0 & \text{si } x^2 > 4a^2 \end{cases}$

b) On en déduit donc que Y suit une loi uniforme sur $[0 ; 4a^2]$. $Y \hookrightarrow U(0 ; 4a^2)$

c) La commande rand()*4*a^2 simule le choix d'un réel aléatoire entre 0 et $4a^2$.

d) Le script Scilab permettant de simuler la variable aléatoire X est rand()*2*a.

7) a) $b(n) = E(T_n) - a$

Or $E(T_n) = E\left(\frac{3}{4n} \sum_{k=1}^{n} X_k\right)$

$= \frac{3}{4n} \sum_{k=1}^{n} E(X_k)$ (linéarité)

$= \frac{3}{4n} \times \sum_{k=1}^{n} \frac{4a}{3}$

$= \frac{3}{4n} \times \frac{4an}{3}$

$E(T_n) = a$

Donc $b(n) = A - A = 0$

$$\boxed{\text{Ainsi, } T_n \text{ est un estimateur sans biais de } A.}$$

b) Puisque le biais est égal à 0, le risque quadratique de T_n est égal à $V(T_n)$.

$$V(T_n) = V\left(\frac{3}{4n} \sum_{k=1}^{n} X_k\right)$$

$$= \frac{9}{16n^2} \sum_{k=1}^{n} V(X_k) \qquad \text{(indépendance)}$$

$$= \frac{9}{16n^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{2A^2}{9}$$

$$= \frac{9}{16n^2} \times \frac{2A^2 n}{9}$$

$$V(T_n) = \frac{A^2}{8n^2}$$

$$\boxed{\text{Ainsi } R(n) = \frac{A^2}{8n^2}}$$

c) T_n = (3/4*n) * sum(X)
disp(n)