Code épreuve : 285 | Nombre de pages : 20 | Session : 2021

Épreuve de : Mathématiques T ESCP BS

G2-00247 948284 Maths T

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

EXERCICE 1

1) a) $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$J^3 = J^2 \times J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}}$

$= 2J$

b) Si $J^3 = 2J$

Alors $J^3 - 2J = 0$

On déduit que le polynome $P(X) = X^3 - 2X$ est un polynome annulateur de J

Les valeurs propres possibles sont les racines du polynome.

On résout alors

$x^3 - 2x = 0$

$\Leftrightarrow x(x^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow x(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = 0$

Les valeurs propres possibles de J sont $\boxed{0, \sqrt{2} \text{ et } -\sqrt{2}}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

c) On pose X_1, X_2 et X_3 tels que

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\forall\ i \in [\![1;3]\!]$

X_i est un vecteur propre de J associé à λ_i si

$$J X_i = \lambda X_i$$

Suite page 5

d)

$$JP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 2 & 0 & 2 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$PD_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 2 & 0 & 2 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Si $JP = PD$

avec D_1 une matrice diagonale et P contenant les vecteurs propres associés aux valeurs propres de la matrice.

En supposant P inversible avec P^{-1} son inverse.

$$JP = PD_1$$
$$\iff JPP^{-1} = PD_1P^{-1}$$
$$\iff J = PD_1P^{-1}$$

Donc J est diagonalisable

e) D'après la question précédente
J est diagonalisable

Par définition si J est diagonalisable
alors $J^n = P D_1^n P^{-1}$

Si $n = 2$ $J^2 = P D_1^2 P^{-1}$
$\iff$ $J^2 P = P D_1^2$

2) a) $J^2 - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$

$= K$

b) $aI + bJ + cK = \begin{pmatrix} a & & 0 \\ & a & \\ 0 & & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ b & 0 & b \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & c & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a+c & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$

et pour que $aI + bJ + cK = A$

$$\boxed{\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a+c & b \\ c & b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}$$

Les réels a, b c apparaissent sur la première colonne de a
Donc
il existe des réels a, b et c tels que
$A = aI + bJ + cK$

avec $a = 1$, $b = 2$ et $c = 1$

c)
$$A = I + 2J + 1(J^2 - I)$$
$$\Leftrightarrow A = I + 2J + J^2 - I$$
$$\Leftrightarrow \underline{A = J^2 + 2J}$$

On pose
$$D_2 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

avec D_2 une matrice diagonale telle que $AP = PD_2$

$$AP = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2\sqrt{2} & 0 & 2+2\sqrt{2} \\ 4-2\sqrt{2} & 0 & 4+2\sqrt{2} \\ 2-2\sqrt{2} & 0 & 2+2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$PD_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b & c \\ -\sqrt{2}a & 0 & \sqrt{2}c \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

On peut en déduire que
$$a = 2 - 2\sqrt{2}$$
$$b = 0$$
$$c = 2 + 2\sqrt{2}$$

Donc
$$D_2 = \begin{pmatrix} 2-2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2+2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

3) a)
$$A = [1,2,1 ; 2,2,1 ; 1,2,1]$$
$$B = A \wedge n$$

b) Soit n le numero de la ~~colonne~~ ligne et p le numéro de la colonne

Lorsque l'on a vu que $A = I + 2J + C$
nous avons vu que les valeurs en $(n=1 ; p=2)$, $(n=2 ; p=3)$ et $(n=2) ; (p=1)$ et $((n=3) ; (p=2))$ dépendaient de ~~b~~ b

04/20

Code épreuve : 285	Nombre de pages : 20	Session : 2021

Épreuve de : Mathématiques T ESCP BS

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

On sait que $a = 1$ et $c = 1$
pour $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$
La valeur au milieu de la matrice est égale ~~à la somme de la~~ au double de la valeur prise par les termes dépendant de a et de c

Ainsi, la valeur centrale de la matrice A^5 devrait être 656×2
Donc 1312, c'est la seule valeur en laquelle B_1 et B_2 diffère, on la retrouve dans B_1.

On peut conclure que $\underline{A^5 = B_1}$

1) c) Suite

- $JX_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 2 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$

$-\sqrt{2}\, X_1 = -\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 2 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ Donc X_1 est un vecteur propre de J associé à la valeur propre $-\sqrt{2}$

- $JX_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$JX_2 = 0X_2$ Donc X_2 est un vecteur propre de J associé à la valeur propre 0

$$JX_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$JX_3 = \sqrt{2} X_3$ Donc X_3 est un vecteur propre de J associé à la valeur propre $\sqrt{2}$.

Donc les colonnes de la matrice P sont des vecteurs propres de J

Code épreuve : 285	Nombre de pages : 20	Session : 2021

Emplacement QR Code

Épreuve de : Mathématiques T ESCP BS

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 2

1) a) $\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = \boxed{1}$

car c'est la densité d'une loi exponentielle définie sur $\mathbb{R}_+$
et toute densité possède une intégrale de $-\infty$ à $+\infty$ valant 1.

b) Par définition si $Z \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$

$$E(Z) = \boxed{\frac{1}{\lambda}} \quad \text{et} \quad V(Z) = \boxed{\frac{1}{\lambda^2}}$$

c) $\int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x} = E(Z) = \boxed{\frac{1}{\lambda}}$

$\int_0^{+\infty} \lambda x^2 e^{-\lambda x} = E(Z^2) = V(Z) + (E(Z))^2$
(par Koenig Huygens)

$$= \frac{1}{\lambda^2} + \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{2}{\lambda^2}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

a) Sous réserve d'existence

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \lambda(1-p)e^{-\lambda x} + \lambda^2 p x e^{-\lambda x}\,dx$$

$$= \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} - \lambda p e^{-\lambda x} + \lambda^2 p x e^{-\lambda x}\,dx$$

$$= \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}\,dx - p\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} + p\lambda\int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}$$

$$= 1 - p(1) + p\cancel{\lambda} \times \frac{1}{\cancel{\lambda}} = \boxed{1}$$

b) f est positive sur $\mathbb{R}$ car :

- nulle sur $]-\infty\,;0[$
- somme de réels positifs sur $[0;+\infty[$

f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf en 0 car

- constante sur $]-\infty\,;0[$
- somme de fonctions exponentielles continues sur $]0\,;+\infty[$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \boxed{1}$$

Donc f est une densité de probabilité.

c) Sous réserve d'existence, X possède une variance si et seulement si l'intégrale des $x f(x)$ converge

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} x f(x)\,dx = (1-p)\int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}\,dx + \lambda p\int_0^{+\infty} \lambda x^2 e^{-\lambda x}$$

On retrouve des intégrales de référence de loi exponentielle

Donc X possède une espérance

$$= (1-p)\times E(Z) + \lambda p \times E(Z^2)$$

$$= \frac{(1-p)}{\lambda} + \lambda p \times \frac{2}{\lambda^2} = \frac{1-p}{\lambda} + \frac{2p}{\lambda}$$

8/20

$$= \boxed{\frac{1+p}{\lambda}}$$

3) a) $\int_0^x t e^{-\lambda t} dt$ On pose $u = t$ $u' = 1$

$v = \frac{-1}{\lambda} e^{-\lambda t}$ $v' = e^{-\lambda t}$

u, v, u' et v sont continues sur $[0 ; x]$

$$\int_0^x t e^{-\lambda t} = \left[-\frac{t}{\lambda} e^{-\lambda t} \right]_0^x - \int_0^x -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t}$$

$$= \frac{-x}{\lambda} e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda} \int_0^x e^{-\lambda t} = \frac{-x}{\lambda} e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda} \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \right]_0^x$$

$$= \frac{-x}{\lambda} e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda} e^0 = \frac{-\lambda x}{\lambda^2} e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda x} + \frac{\lambda}{\lambda^2}$$

$$= \frac{1}{\lambda^2} \left(\quad + e^{-\lambda x} (1 + \lambda x) \right)$$

b) Si $x < 0$ $F(x) = 0$

car la densité est nulle

Si $x \geq 0$ $F(x) = \int_0^x \lambda (1-p) e^{-\lambda t} + \lambda^2 p t e^{-\lambda t} dt$

$$= -(1-p) \int_0^x -\lambda e^{-\lambda t} dt + \lambda^2 p \int_0^x t e^{-t\lambda} dt$$

$$= -(1-p) \left[e^{-\lambda t} \right]_0^x + \lambda^2 p \times \frac{1}{\lambda^2} \left(1 - (1 + \lambda x) e^{-\lambda x} \right)$$

$$= (p-1) \left(e^{-\lambda x} - 1 \right) + p - p(1 + \lambda x) e^{-\lambda x}$$

$$= \cancel{p e^{-\lambda x}} - \cancel{p} - e^{-\lambda x} + 1 + \cancel{p} - \cancel{p e^{-\lambda x}} - p \lambda x e^{-\lambda x}$$

$$= -e^{-\lambda x} - p \lambda x e^{-\lambda x} + 1$$

Emplacement QR Code

Code épreuve : 285 | **Nombre de pages :** 20 | **Session :** 2021

Épreuve de : Mathématiques T ESCP BS

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

EXERCICE 3

1) a) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^+} -\frac{1}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 0^+} e^{-1/x} = 0$

Donc $\lim\limits_{x \to 0^+} x e^{-1/x} = 0 \iff \boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0}$

or $f(0) = 0$

or si $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$ alors f est continue en 0 à droite

b) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} e^{-1/x} = 0$

or on reconnait la limite $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim \frac{f(x)}{x}$

Donc puisque $\lim \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$ avec 0 un réel alors

f est dérivable à droite en 0 avec 0 le nombre dérivé noté $f'_d(0)$.

2) a) $\forall x > 0$

$$f'(x) = 1 \times e^{-1/x} + x \times \frac{1}{x^2} e^{-1/x}$$

$$= e^{-1/x} + \frac{1}{x} e^{-1/x} = e^{-1/x}\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

b) Puisque $e^{-1/x} > 0$, f' est du signe de $1 + \frac{1}{x}$

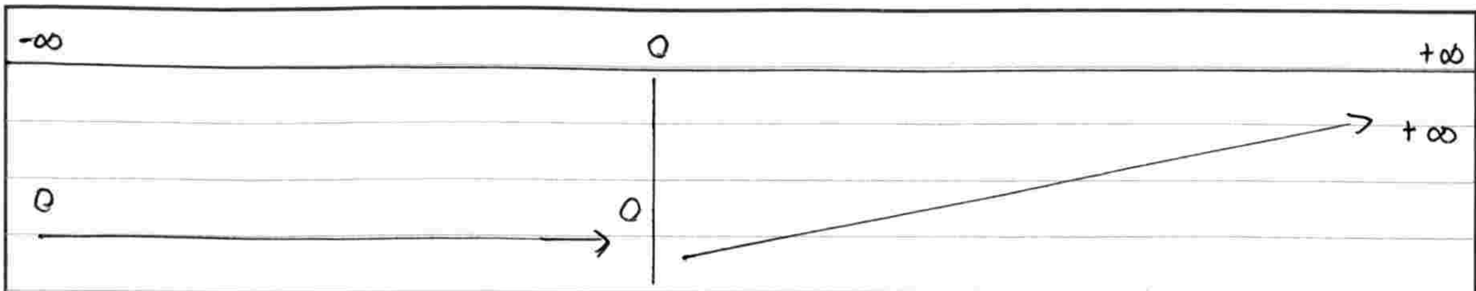
$1 + \frac{1}{x} > 0$
$\Leftrightarrow \frac{1}{x} > -1 \Leftrightarrow x > -1$

Donc $f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$
ainsi f est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

b) D'après 1 a) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} -1/x = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0} e^x = e^0 = 1 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-1/x} = 1$$

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x e^{-1/x} = +\infty$



d) On rappelle $f'(x) = e^{-1/x} + \frac{1}{x} e^{-1/x}$

$$f''(x) = \frac{1}{x^2} e^{-1/x} + \frac{-1}{x^2} e^{-1/x} + \frac{1}{x} \times \frac{1}{x^2} e^{-1/x}$$

$$= \boxed{\frac{1}{x^3} e^{-1/x}}$$

La dérivée seconde de f est manifestement positive sur $\mathbb{R}_+^*$ par produit de termes positifs.
De plus elle s'annule en 0, donc f est convexe sur $\mathbb{R}_+$

3) a) $\lim\limits_{u \to 0^+} \frac{e^{-u} - 1}{u} = - \lim \frac{e^{-u} - 1}{-u}$

on reconnait une forme $\frac{e^x - 1}{x}$

Ainsi $\lim \frac{e^{-u} - 1}{u} = - \lim \frac{e^{-u} - 1}{-u} = -0 = \boxed{0}$

b) $\lim (f(x) - (x-1)) = \lim x e^{-1/x} - (x-1)$

$$= \lim \frac{e^{-x^{-1}}}{x^{-1}} - \frac{x^{-1}(x-1)}{x^{-1}}$$

$$= \lim \frac{e^{-x^{-1}}}{x^{-1}} - \frac{1}{x^{-1}} + \frac{x^{-1}}{x^{-1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-x^{-1}} - 1}{x^{-1}}$$

On reconnait la forme $\frac{e^{-u} - 1}{u}$

Donc $\lim (f(x) - (x-1)) = \lim \frac{e^{-x^{-1}} - 1}{x^{-1}} = \boxed{0}$

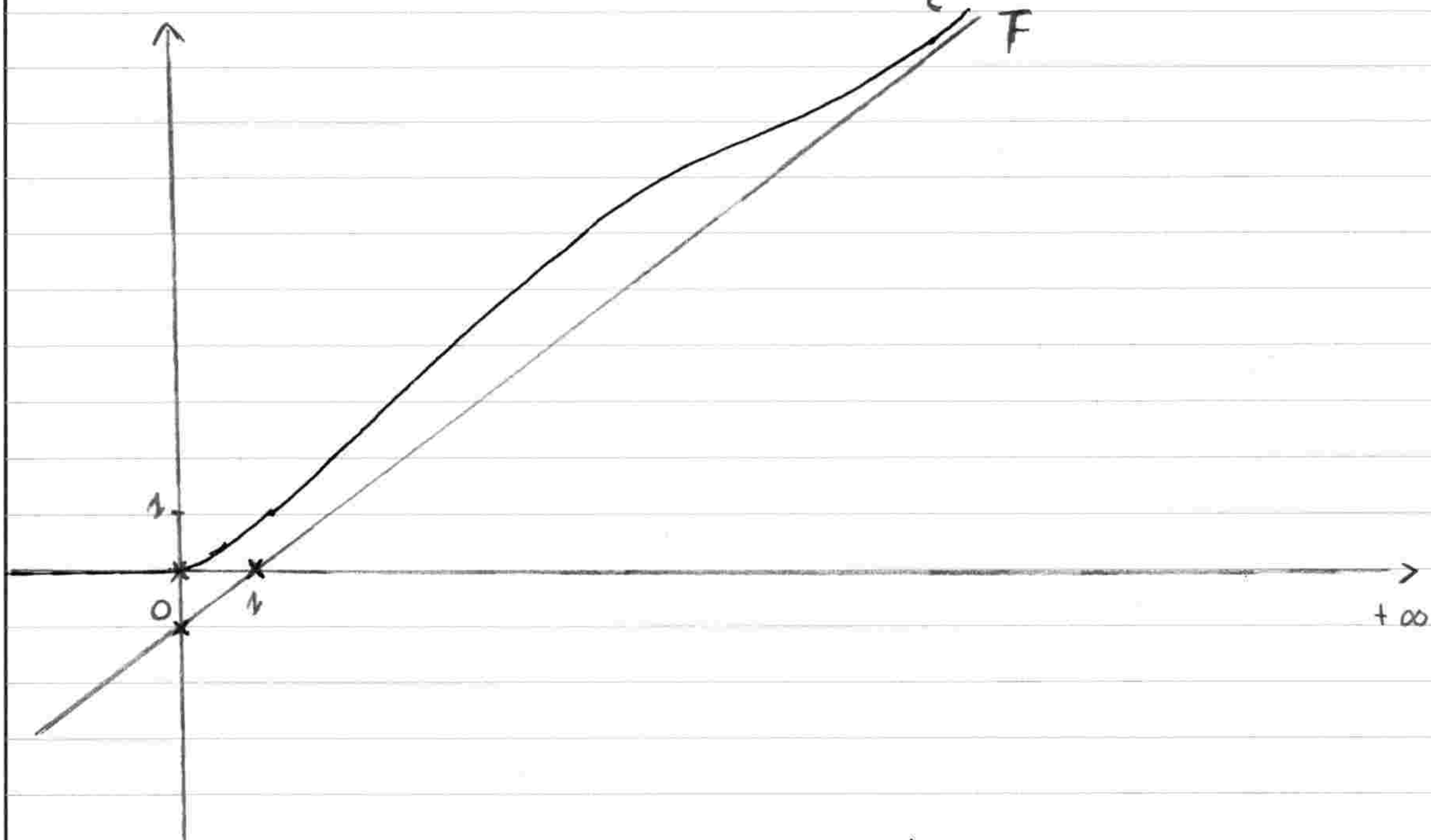
12/20

c)

Si $\lim f(x) - (x-1) = 0$

Alors la droite d'équation $y = x-1$ est asymptote à C en $+\infty$

Soit F la droite représentative de $x-1$



Puisque $\lim \left(f(x) - (x-1)\right) = \lim \dfrac{e^{-x^{-1}} - 1}{x^{-1}} = 0^+$

Alors f va arriver sur T par le haut

4) a) On pose $\forall n \in \mathbb{N}$ P_n : " $U_n > 0$ "

Initialisation

$U_0 = 1$ P_0 est vérifiée

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$ on suppose P_n vraie

Par croissance de f sur $\mathbb{R}_+$ $U_n > 0$

$\Rightarrow$ $f(U_n) > f(0)$

$\Rightarrow$ $U_{n+1} > 0$

P_{n+1} est vérifiée

Conclusion Par récurrence P_n est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$

Code épreuve : 285	Nombre de pages : 20	Session : 2021

Épreuve de : Mathématiques T ESCP BS

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

4) b) On pose $\forall n \in \mathbb{N}$ P_n : " $U_{n+1} < U_n$ "

Initialisation $U_0 = 1$

$U_1 = f(U_0) = f(1) = e^{-1} = 1/e$

$\frac{1}{e} < 1$ P_0 est vérifiée

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose P_n vraie

$U_{n+1} < U_n$

Par croissance de f $\Rightarrow$ $f(U_{n+1}) < f(U_n)$

$\Rightarrow$ $U_{n+2} < U_{n+1}$

Ce qui établit P_{n+1}

Conclusion Par récurrence P_n est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$

Donc $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

c) On a $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante et minorée par 0

D'après le théorème de la limite monotone, la suite converge vers un réel $l \geqslant 0$

Si $\lim U_n = l$
Alors $\lim U_{n+1} = f(l)$

or une limite est unique.
on résout $f(l) = l$
Par monotonie de f sur $\mathbb{R}_+$
la seule solution possible est 0

Donc $\lim U_n = 0$

d) $u = u * \exp(-1/u)$
$n = n + 1$

5) a) $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{U_k} =$

b)

$$\sum_{K=0}^{n} \frac{1}{U_K} = -\ln U_{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \lim \sum_{K=0}^{n} \frac{1}{U_K} = \lim -\ln(U_{n+1})$$

$\lim U_{n+1} = 0$ $\quad\quad$ $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(U_{n+1}) = -\infty$ $\quad$ Donc $\lim -\ln(U_{n+1}) = +\infty$

Donc $\lim \sum_{K=0}^{n} \frac{1}{UK} = +\infty$

Donc la série de terme générale $\frac{1}{U_n}$ est divergente

/

Code épreuve : 285	Nombre de pages : 20	Session : 2021

Emplacement QR Code

Épreuve de : Mathématiques T ESCP BS

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Exercice 4 :

1) $X_1(\Omega) = [\![0 ; 2]\!]$

car on peut tirer dans U_0 soit une, deux ou aucune boule noire avant de les remettre

$p(X_1 = 0) = \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{12} = \boxed{\frac{1}{6}}$

$p(X_1 = 2) = \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{12} = \boxed{\frac{1}{6}}$

$p(X_1 = 1) = \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{12} + \frac{4}{12} = \frac{8}{12} = \boxed{\frac{2}{3}}$

car on peut avoir la boule noire en premier ou en deuxieme

b) $E(X_1) = 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{2}{3} + 2 \times \frac{1}{6} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \boxed{1}$

2) Pour piocher deux boules noires en K, il faut avoir piocher deux noires en n-1 que l'on a pioché en n-2.
Il faut avoir piocher 2 boules noires à chaque tirage

Donc $(X_n = 2) = \bigcap_{K=0}^{n} A_K$

De plus puisque chaque boule sera composée de deux boules noires et deux boules blanches,

$p(A_K) = p(X_1 = 2) = \frac{1}{6}$

Si on pioche deux boules noires à chaque tirage, toutes les boules sont composées de deux boules blanches et deux boules noires
Donc la probabilité est la même

Donc $p(X_n = 2) = p\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right) = (p(X_1 = 2))^n$

$= \boxed{\left(\frac{1}{6}\right)^n}$

3) a)

Deux cas de figures pour qu'il y ait une boule noire en n+1

en n : 1 boule noire

Donc $p_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{3} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{3}$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{2}}$

en n : 2 boules noires

Donc $p_{(X_n=2)}(X_{n+1}=1) = \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \boxed{\frac{2}{3}}$

Donc on a $(X_n = 1)$ $(X_n = 2)$ système complet d'evenements

$p(X_{n+1} = 1) = p((X_n = 1) \cap (X_{n+1} = 1)) + p((X_n = 2) \cap (X_{n+1} = 1))$

$= p(X_n = 1) \times p_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1) + p(X_n = 2) \times p_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 1)$

$= \frac{1}{2} p(X_n = 1) + \frac{2}{3} p(X_n = 2)$

b) On pose $\forall n \in \mathbb{N}$ P_n : " $p(X_n = 1) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n$ "

Initialisation

$$p(X_1 = 1) = 2/3$$

$$2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 - 2 \times \left(\frac{1}{6}\right)^1 = \ldots\ 1 - \frac{2}{6} = \frac{4}{6} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

P_0 est vérifiée

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose P_n vraie

$$p(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}\left(2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n - 2 \times \left(\frac{1}{6}\right)^n\right) + \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{6}\right)^n$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{2} \times 2\left(\frac{1}{6}\right)^n + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

$$= \cancel{2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}} - \ldots \cancel{2\left(\frac{1}{6}\right)^n\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right)}$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{6}\right)^n\left(1 - \frac{2}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{6}\right)^n\left(\frac{2}{6}\right)$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{6}\right)^n \times \left(\frac{1}{6}\right) \times 2$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 2\left(\frac{1}{6}\right)^{n+1}$$

Ce qui établit P_{n+1}

Conclusion Par récurrence P_n est vraie $\forall n \in \mathbb{N}^*$

19/20

$$p(X_n=0) = 1 - p(X_n=1) - p(X_n=2)$$
$$= 1 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2\left(\frac{1}{6}\right)^n - \left(\frac{1}{6}\right)^n$$
$$= \boxed{1 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{6}\right)^n}$$

4) $E(X_n) = 0 \times p(X_n=0) + p(X_n=1) + 2p(X_n=2)$

$$= 2\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n + 2\left(\frac{1}{6}\right)^n = \boxed{2\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

$$\lim E(X_n) = \lim_{n \to +\infty} 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

On reconnaît une limite d'une suite géométrique avec $-1 < \frac{1}{2} < 1$

Donc $\lim \boxed{E(X_n) = +\infty}$