Copie anonyme - n°anonymat : 551293

E9-00059 551293 Maths 2S

Code épreuve : 283 | **Nombre de pages :** 24 | **Session :** 2022

Épreuve de : Mathématiques 2S ESCP BS / HEC

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Questions préliminaires :

Q1.a. On a :

$$\sum_{k=1}^{n} X_k = \sum_{k=1}^{n} C_k - C_{k-1}$$

$$= C_n - \underbrace{C_0}_{=0} \quad \text{(télescopage)}$$

Donc :

$$\underline{C_n = \sum_{k=1}^{n} X_k}$$

Q1.b. Soit $i \in [\![1, n]\!]$

On a : $X_i(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$

En outre, la variable aléatoire réelle (VAR) X_i correspond au nombre d'échecs avant d'atteindre un succès de probabilité $\frac{n-i+1}{n}$ car on sait que l'on a déjà $i-1$ vignettes et qu'il faut donc que l'on tire parmi les $n-i+1$ autres vignettes pour avoir une vignette de type différente.

Donc, on a bien :

$$\underline{\forall i \in [\![1, n]\!],\ X_i \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{n-i+1}{n}\right)}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Partie I :

Q2.a. On a :

$$\forall k \geqslant 2, \quad k(k-1) \leqslant k^2 \leqslant k(k+1)$$

D'où :

$$\forall k \geqslant 2, \quad \underbrace{\frac{1}{k(k+1)}}_{= \frac{k+1-k}{k} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}} \leqslant \frac{1}{k^2} \leqslant \underbrace{\frac{1}{k(k-1)}}_{= \frac{k-(k-1)}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}}$$

D'où : $\forall k \geqslant 2, \quad \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$

Q2.b. Par somme, on a :

$$\forall n \geqslant 2, \quad \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

Par télescopage, on a :

$$\forall n \geqslant 2, \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 1 - \frac{1}{n}$$

En sommant 1 dans chaque membre, il vient :

$$\forall n \geqslant 2, \quad \frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} \leqslant S_n \leqslant 2 - \frac{1}{n}$$

Q2.c. On a : $\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{3}{2}$ et : $2 - \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 2$

Donc, par encadrement, on a : $(S_n)_{n \geqslant 1}$ converge

De plus, on a :

$$\frac{3}{2} \leqslant \underbrace{\lim_{n \to +\infty} S_n}_{= S} \leqslant 2$$

Q2.d. Soit $N \geqslant n+1$ avec $n \in \mathbb{N}^*$

Or a d'après Q2.a et par sommation :

$$\sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

Par télescopage, on a :

$$\underbrace{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{N+1}}_{\xrightarrow[N \to +\infty]{} \frac{1}{n+1}} \leqslant \underbrace{\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2}}_{\xrightarrow[N \to +\infty]{} S} - \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}}_{= S_n} \leqslant \underbrace{\frac{1}{n} - \frac{1}{N}}_{\xrightarrow[N \to +\infty]{} \frac{1}{n}}$$

Donc, par passage à la limite, on a :

$$\forall n \geqslant 2, \ \frac{1}{n+1} \leqslant S - S_n \leqslant \frac{1}{n}$$

Q2.e.

```
function y = approxS(eps)
    n = 1
    y = 0
    while 1/n >= eps
        y = y + 1/n^2
        n = n + 1
    end
endfunction

---> approxS(10^(-7))
```

Q3.a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

On a :

$$\forall x \in [n, n+1], \quad \frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{n}$$

Par croissance de l'intégrale sur $[n, n+1]$, on a :

$$\underbrace{\int_n^{n+1} \frac{1}{n+1}\,dx}_{=\frac{1}{n+1}(n+1-1)} \leqslant \underbrace{\int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx}_{=\ln(n+1)-\ln(n)} \leqslant \underbrace{\int_n^{n+1} \frac{1}{n}\,dx}_{=\frac{1}{n}(n+1-1)}$$

D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{n+1} \leqslant \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}$$

Q3.b. D'après Q3.a., par sommation, on a :

$$\forall n \geqslant 2, \quad \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \ln(k+1) - \ln(k)}_{=\ln(n) - \underbrace{\ln(1)}_{=0} \text{ (télescopage)}} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

D'où : $$\forall n \geqslant 2, \quad \underbrace{H_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}}_{=\frac{1}{n} \geqslant 0} \leqslant u_n \leqslant \underbrace{H_n - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}}_{=1}$$

D'où : $\forall n \geqslant 2, \ 0 \leqslant u_n \leqslant 1$

Or : $u_1 = 1$ donc : $0 \leqslant u_1 \leqslant 1$

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant 1$$

Q3.c. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} - u_n = H_{n+1} - H_n - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n+1} - \underbrace{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}_{\geqslant \frac{1}{n+1}}$$

$$\leqslant \underbrace{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1}}_{=0}$$

Donc, puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée (Q3.b.), d'après le théorème de la limite monotone, on a :

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et on note γ sa limite

On a bien $\gamma \in [0,1]$ d'après Q3.b.

Q4. $X_1, \dots, X_n$ admettent tous des espérances (car elles suivent des lois géométriques), donc par somme, $C_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ admet une espérance

Donc :

$$\mathbb{E}(C_n) = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\mathbb{E}(X_k)}_{= \frac{n}{n-k+1}} \text{ (linéarité de l'espérance)} \quad \text{car } X_k \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{n-k+1}{n}\right)$$

$$= n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n-k+1}$$

Par le changement d'indice $i = n-k+1$, on a bien :

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}}_{= H_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n-k+1}$$

Donc :

$$\mathbb{E}(C_n) = n H_n$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Q5. Puisque $C_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et $(X_1, \ldots, X_n)$ mutuellement indépendantes et admettant toutes une variance (loi géométrique), on a bien :

C_n admet une variance

Et :

$$\mathbb{V}(C_n) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\mathbb{V}(X_i)}_{= \frac{\frac{i-1}{n}}{\left(\frac{n-i+1}{n}\right)^2}} \quad (\text{indépendance})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{n^2(i-1)}{n(n-i+1)^2}$$

$$= n \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{i-1}{(n-i+1)^2}}_{= \frac{n-(n-i+1)}{(n-i+1)^2}}$$

$$= n\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{n}{(n-i+1)^2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n-i+1}\right)$$

Par le changement d'indice $k = n-i+1$, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{n}{(n-i+1)^2} = n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

$$\text{et : } \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n-i+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Donc : $\mathbb{V}(C_n) = n^2 S_n - n H_n$

Q6.a. D'après l'inégalité de Bienaymé - Tchebychev, on a,

$$\forall a > 0, \quad \mathbb{P}(|C_n - \underbrace{\mathbb{E}(C_n)}_{= nH_n}| \geqslant an) \leqslant \frac{\mathbb{V}(C_n)}{(an)^2}$$

Or : $\dfrac{\mathbb{V}(C_n)}{a^2 n^2} = \dfrac{S_n}{a^2} - \underbrace{\dfrac{H_n}{n}}_{\geqslant 0}$

$\leqslant \dfrac{S_n}{a^2}$

$\leqslant \dfrac{S}{a^2}$ (car $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante d'où : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ S_n \leqslant S$

Donc :

$$\underline{\forall a > 0, \quad \mathbb{P}(|C_n - nH_n| \geqslant an) \leqslant \frac{S}{a^2}}$$

Q6.b.

Q6.c. Soit $n = 10^6$

On a d'après Q6.b (résultat admis) que :

$$\forall c > 1, \quad \mathbb{P}\left(\left|\frac{C_n}{n} - \ln(n)\right| \geqslant c\right) \leqslant \frac{S}{(c-1)^2}$$

~~D'où : $\mathbb{P}(\frac{C_n}{n} \in$~~

D'où : $\forall c > 1, \ \underbrace{\mathbb{P}\left(\left|\frac{C_n}{n} - \ln(n)\right| \leqslant c\right)}$ $= 1 - \mathbb{P}\left(\left|\frac{C_n}{n} - \ln(n)\right| \geqslant c\right)$

$$= \mathbb{P}\left(\frac{C_n}{n} \in [\ln(n) - c, \ln(n) + c]\right)$$

Donc : $\forall c > 1, \ \mathbb{P}\left(\frac{C_n}{n} \in [\ln(n) - c, \ln(n) + c]\right) \geqslant 1 - \dfrac{S}{(c-1)^2}$

En particulier, pour $c = 1 + \sqrt{\frac{5}{0,08}} > 1$, on a :

$$1 - \frac{5}{(c-1)^2} = 1 - \frac{5}{\frac{5}{0,08}}$$

$$= 1 - 0,08$$

$$= 0,92$$

De plus : $\sqrt{\frac{3}{2}} \leqslant \sqrt{5} \leqslant \sqrt{2}$

D'où : $1 + \sqrt{\frac{3}{2}} \times \sqrt{\frac{1}{0,08}} \leqslant c \leqslant 1 + \sqrt{\frac{2}{0,08}}$

D'où : $\left[\ln(n) - c, \ln(n) + c\right] \subset \left[\ln(n) - 1 - \sqrt{\frac{2}{0,08}}, \ln(n) + 1 + \sqrt{\frac{3}{2}} \times \sqrt{\frac{1}{0,08}}\right]$

Or : $\sqrt{\frac{2}{0,08}} = \sqrt{\frac{200}{8}}$ d'où : $\sqrt{\frac{2}{0,08}} = \sqrt{25}$

$$= 5$$

et : $\sqrt{\frac{3}{2}} \times \frac{1}{\sqrt{0,08}} = \sqrt{\frac{3}{2}}\,\frac{5}{\sqrt{2}}$

$$= \frac{\sqrt{3} \times 5}{2}$$

$$\approx 5,11$$

D'où : $\ln(n) - 1 - \sqrt{\frac{2}{0,08}} \approx 13,81 - 1 - 5$

$$\approx 7,81$$

et : $\ln(n) + 1 + \sqrt{\frac{3}{2}}\,\frac{1}{\sqrt{0,08}} \approx 13,81 + 1 + 5,11$

$$\approx 19,92$$

Donc : $\left[\ln(n) - c, \ln(n) + c\right] \subset \left[7,81 , 19,92\right]$

D'où : $\mathbb{P}\left(\frac{C_n}{n} \in [7,81 , 19,92]\right) \geqslant \mathbb{P}\left(\frac{C_n}{n} \in [\ln(n) - c , \ln(n) + c]\right)$

Donc : $\underline{\mathbb{P}\left(\frac{C_n}{n} \in [7,81 , 19,92]\right) \geqslant 0,92}$

Code épreuve : 283 | Nombre de pages : 24 | Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques 2S ESCP BS / HEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

Partie II :

Q7. Puisque, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $T_i(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$, en notant F_m la fonction de répartition de M_n, on a :

- $\forall x \in \mathbb{R}_-^*$, $F_m(x) = 0$

- $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $F_n(x) = \mathbb{P}\left(\max_{i \in [\![1,n]\!]} T_i \leqslant x\right)$

$$= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} (T_i \leqslant x)\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \underbrace{\mathbb{P}(T_i \leqslant x)}_{= 1 - e^{-x}} \quad \text{(indépendance de } T_1, \dots, T_n)$$

D'où : $F_n : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (1-e^{-x})^n & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

Or :

$\lim_{x \to 0^-} F_n(x) = \lim_{x \to 0^+} F_n(x) = 0$ et la fonction nulle et $x \mapsto (1-e^{-x})^n$ sont continue et C^1 sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+$ respectivement

Donc : F_n est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 sur $\mathbb{R}^*$

Donc :

M_n est une VAR à densité

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

On a de plus :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_n'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ n e^{-x}(1-e^{-x})^{n-1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Donc une densité de M_n notée f_n est donnée par :

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} n e^{-x}(1-e^{-x})^{n-1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

Q8.a. Soit $x > 0$ et $t \in [0, x]$

Alors :

$$f_n(t)\, g(x-t) = n e^{-t}(1-e^{-t})^{n-1} (n+1) e^{-(n+1)(x-t)}$$

$$= (n+1) e^{-(n+1)x}\, n \underbrace{e^{-t+(n+1)t}}_{\substack{= e^{nt} \\ = e^{t} e^{(n-1)t}}} (1-e^{-t})^{n-1}$$

$$= (n+1) e^{-(n+1)x}\, n e^{t} \big(\underbrace{e^{t}(1-e^{-t})}_{= e^{t}-1}\big)^{n-1}$$

Donc :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times [0,x],\ f_n(t)\, g(x-t) = (n+1) e^{-(n+1)x}\, n e^{t} (e^{t}-1)^{n-1}$$

Q8.b.

X

Q9. On a $x \mapsto e^{-x}$ (et donc $x \mapsto -e^{-x}$) continue sur $\mathbb{R}$ ~~(et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$)~~ donc, par composition et produit, on a :

$$f \text{ est continue sur } \mathbb{R} \quad \cancel{(\text{et } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R})}$$

~~De plus : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dots$~~

On a aussi : f est positive sur $\mathbb{R}$

Enfin, on a :

$$\forall (A,B) \in \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^+, \int_A^B f(x)\,dx = \int_A^0 f(x)\,dx + \int_0^B f(x)\,dx \quad (\text{Chasles})$$

$$= \left[e^{-e^{-x}}\right]_A^0 + \left[e^{-e^{-x}}\right]_0^B$$

$$= e^{-e^{-B}} - e^{-e^{-A}}$$

$$\xrightarrow[B \to +\infty]{} 1 - \underbrace{e^{-e^{-A}}}_{\xrightarrow[A \to -\infty]{} 0 \text{ (composition)}} \quad (\text{composition}) \begin{cases} e^{-B} \xrightarrow[B \to +\infty]{} 0 \\ e^t \xrightarrow[t \to 0]{} 1 \end{cases} \begin{cases} -e^{-A} \xrightarrow[A \to -\infty]{} -\infty \\ e^t \xrightarrow[t \to -\infty]{} 0 \end{cases}$$

D'où : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge et vaut 1

Donc :

$$\underline{f \text{ est une densité de probabilité sur } \mathbb{R}}$$

Q10. a. On a $W_n(\Omega) \subset]-\ln(n), +\infty[$ (car $\left(\sum_{k=1}^{n} Z_k\right)(\Omega) \subset \mathbb{R}_+^*$)

D'où : $\forall x \in]-\infty, -\ln(n)]$, $F_{W_n}(x) = 0$

Et : $\forall x \in]-\ln(n), +\infty[$, $F_{W_n}(x) = \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{n} Z_k \leqslant x + \ln(n)\right)$

$$= \mathbb{P}(M_n \leqslant x + \ln(n)) \quad (\text{Q8.b})$$

D'où : $\forall x \in]-\ln(n), +\infty[$, $F_{W_n}(x) = \left(1 - e^{-x-\ln(n)}\right)^n$

$$= \left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)^n$$

Donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_{W_n} : x \mapsto \begin{cases} \left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)^n & \text{si } x > -\ln(n) \\ 0 & \text{si } x \leqslant -\ln(n) \end{cases}$$

Q10.b. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ln\left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{e^{-x}}{n} \quad \left(\text{car } -\frac{e^{-x}}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\right)$$

$$\text{D'où : } \underbrace{\ln\left(\left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)^n\right)}_{= n\ln\left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)} \underset{n\to+\infty}{\sim} -e^{-x}$$

Donc, par composition avec la fonction exponentielle, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_{W_n}(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-e^{-x}}$$

Donc : $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable de fonction de répartition $x \mapsto e^{-e^{-x}}$

Donc, par dérivation, on a :

$(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable de densité $x \mapsto e^{-x}e^{-e^{-x}}$

Donc :

$(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une VAR de loi de Gumbel

Code épreuve : 283 | Nombre de pages : 24 | Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques 2S ESCP BS / HEC

Q11.a.

```
function y = simulV(n)
    A = zeros(1, n)
    for k = 1 : n
        A(k) = A(k) + grand(1, 1, 'geom', (n-k+1)/n)
    end
    y = (sum(A)/n) - log(n)
endfunction
```

Q11.b.

~~V =~~
~~for i = 1 : n~~

```
function y = V(n)
    y = zeros(1, 1000)
    for i = 1 : 1000
        y(i) = y(i) + simulV(n)
    end
endfunction
```

Q11.c. On observe que plus n est grand, plus les simulations de V_n ont un histogramme coïncidant avec la fonction f définie à la question Q9.

Nous pouvons donc conjecturer que :

La suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une VAR de loi de Gumbel

Q12. On a :

$$\forall x \in]0,1[,\ \ln(1-x) \leqslant -x \quad \text{(concavité de la fonction ln)}$$

d'où : $\underbrace{\ln(1-p)}_{\neq 0 \text{ car } p\neq 0} \leqslant -p$

D'où : $\frac{-p}{\ln(1-p)} \geqslant 1$ donc : $\alpha \geqslant 1$

Or : $U(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$ d'où : $(\alpha U)(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$

Donc : $\lfloor \alpha U \rfloor \subset \mathbb{N}$

Donc :

$$V(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$$

On a donc :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(V=k) = \mathbb{P}(\lfloor \alpha U \rfloor = k-1)$$

$$= \mathbb{P}\left(\frac{k-1}{\alpha} \leqslant U < \frac{k}{\alpha}\right)$$

$$= 1 - e^{-p\frac{k}{\alpha}} - \left(1 - e^{-p\frac{k-1}{\alpha}}\right)$$

$$= e^{-p\frac{k}{\alpha}} e^{\frac{p}{\alpha}} - e^{-p\frac{k}{\alpha}}$$

Or : $e^{-\frac{\ell}{\alpha}} = e^{\ln(1-p)}$

$= 1-p$

D'où :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(V=k) = (1-p)^{k-1} - (1-p)^k$$

$$= (1-p)^{k-1}(\underbrace{1-1-p}_{=p})$$

$$= p(1-p)^{k-1}$$

Donc :

$$V \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$$

Q13. a. On a :

$$\forall \omega \in \Omega,\ (V-\alpha U)(\omega) = V(\omega) - \alpha U(\omega)$$

$$= \lfloor \alpha U(\omega) \rfloor + 1 - \alpha U(\omega)$$

Or : $\forall \omega \in \Omega,\ \lfloor \alpha U(\omega) \rfloor \leqslant \alpha U(\omega) < \lfloor \alpha U(\omega) \rfloor + 1$

d'où : $\lfloor \alpha U(\omega) \rfloor - \alpha U(\omega) \leqslant 0 < \lfloor \alpha U(\omega) \rfloor + 1 - \alpha U(\omega)$

Donc : $\forall \omega \in \Omega,\ \begin{cases} \lfloor \alpha U(\omega) \rfloor - \alpha U(\omega) + 1 \leqslant 1 \\ 0 < \lfloor \alpha U(\omega) \rfloor + 1 - \alpha U(\omega) \end{cases}$ (en ajoutant 1 dans l'inégalité ci-dessus)

Donc : $\forall \omega \in \Omega,\ (V-\alpha U)(\omega) \in [0, 1]$

Donc : $(V-\alpha U)(\Omega) \subset [0, 1]$

~~Puisque V - αU a densi~~

$V - \alpha U$ admet donc une variance et :

$$\mathbb{V}(V-\alpha U) = \int_0^1 \underbrace{x^2}_{\leqslant 1} f_{V-\alpha U}(x)\,dx \leqslant \underbrace{\int_0^1 f_{V-\alpha U}(x)\,dx}_{=1}$$ (car $V-\alpha U$ à valeurs dans $[0,1]$)

Donc : $\underline{\mathbb{V}(V - \alpha U) \leqslant 1}$

Q13. b. Puisque X et Y admettent un moment d'ordre 2, on a :

X et Y admettent chacune une variance

Donc : $\dfrac{\mathbb{V}(X+Y) - \mathbb{V}(X) - \mathbb{V}(Y)}{2}$ existe (*)

Or, si $\mathrm{Cov}(X,Y)$ existe, on a :

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{\mathbb{V}(X+Y) - \mathbb{V}(X) - \mathbb{V}(Y)}{2}$$

Puisque (*) est vraie, on a :

$\underline{\mathrm{Cov}(X,Y) \text{ existe}}$

En outre, on a :

$$\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\mathrm{Cov}(X,Y)$$

$$\cancel{= (2(\mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y))}$$

et : $\mathbb{V}(X-Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) - 2\mathrm{cov}(X,Y)$

D'où : $\mathbb{V}(X+Y) + \underbrace{\mathbb{V}(X-Y)}_{\geqslant 0} = 2(\mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y))$

D'où : $\underline{\mathbb{V}(X+Y) \leqslant 2(\mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y))}$

Q13.c. Donc :

$$\mathbb{V}(V-U) \leqslant 2(\underbrace{\mathbb{V}(V)}_{=\frac{1-p}{p^2}} + \underbrace{\mathbb{V}(U)}_{=\frac{1}{p^2}})$$

$$\leqslant 2\,\frac{2-p}{p^2}$$

Code épreuve : 283 | Nombre de pages : 24 | Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques 2S ESCP BS / HEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

X

Q19. a. On a :

$$\mathbb{V}(V_n' - W_n') = \mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{X_k'}{n} - \ln(n) - \sum_{k=1}^{n} \frac{Y_k}{n} + \ln(n)\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}\mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^{n}(X_k' - Y_k)\right)$$

Or, par coalition, puisque pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $X_i' = \lfloor \alpha_i Y_i \rfloor + 1$, on a :

$$X_1' - Y_1, \ldots, X_n' - Y_n \quad \text{indépendantes}$$

Donc : $\mathbb{V}(V_n' - W_n') = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k' - Y_k)$

Or : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{V}(X_k' - Y_k) \leqslant 2 + 2 \frac{(1-\alpha_k)^2}{\left(\frac{n-k+1}{n}\right)^2}$ d'après Q13.c.

$$\leqslant 2 + 2\frac{n^2}{(n-k+1)^2} \times (1-\alpha_k)^2$$

D'où :

$$\mathbb{V}(V_n' - W_n') \leqslant \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \left(2 + 2\frac{n^2}{(n-k+1)^2}(1-\alpha_k)^2\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\left(\left(\frac{n}{n-k+1}\right)^2(1-\alpha_k)^2 + 1\right) + \underbrace{\frac{1}{n^2} - \frac{2}{n}}_{= \frac{1-2n}{n^2} \leqslant 0}$$

D'où :

$$\mathbb{V}(V_n' - W_n') \leq \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\left(\left(\frac{n}{n-k+1}\right)^2(1-\alpha_k)^2 + 1\right)$$

Q14. b. i. Tout d'abord, on a $x \in]0,1[\mapsto \ln(x)$ est continue et à valeur dans $\mathbb{R}_-^*$

et la fonction inverse est continue sur $\mathbb{R}^*$

Donc, par composition, on a :

$$x \in]0,1[\longmapsto \frac{1}{\ln(x)} \text{ est continue}$$

Donc, $x \mapsto 1-x$ continue sur $]0,1[$ et à valeurs dans $]0,1[$, on a par composition $x \longmapsto \frac{1}{1-x}$ est continue sur $]0,1[$, et par produit :

$$\phi \text{ est continue sur }]0,1[$$

En outre : $\ln(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} -\infty$ d'où, par composition, puis produit de limites, on a :

$$\phi(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 1$$

De plus, on a :

$$\forall x \in]0,1[,\ \phi(\overbrace{1-x}^{\in]0,1[}) = \frac{1}{x^2}\left(1 + \frac{x}{\ln(1-x)}\right)^2$$

Or, un $DL_2(0^+)$ de $\ln$ est :

$$\ln(1-x) \underset{0^+}{=} -x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

D'où : $\phi(1-x) \underset{0^+}{=} \frac{1}{x^2}\left(1 + \frac{x}{-x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)}\right)^2$

D'où :

$$\phi(1-z) \underset{0^+}{=} \frac{1}{z^2}\left(\frac{\frac{z^2}{2}+o(z^2)}{-z-\frac{z^2}{2}+o(z^2)}\right)^2$$

$$\underset{0^+}{=} \frac{1}{z^2}\,\frac{z^4}{4}\left(\frac{1}{-z+\frac{z^2}{2}}+o(1)\right)^2$$

$$\underset{0^+}{\sim} \frac{z^2}{4}\left(\frac{1}{-z+\frac{z^2}{2}}\right)^2$$

Or : $-z+\frac{z^2}{2} \underset{0^+}{\sim} z$

D'où : $\phi(1-z) \underset{0^+}{\sim} \frac{z^2}{4}\left(\frac{1}{z}\right)^2$

$$\underset{0^+}{\sim} \frac{1}{4}$$

Donc : $\phi(1-z) \xrightarrow[z\to 0^+]{} \frac{1}{4}$ donc : $\phi(z) \xrightarrow[z\to 1^-]{} \frac{1}{4}$

Ainsi, puisque ϕ est continue sur $]0,1[$, $\phi(z) \xrightarrow[z\to 0^+]{} 1$ et $\phi(z) \xrightarrow[z\to 1^-]{} \frac{1}{4}$, en posant :

$$\tilde{\phi} : z\in[0,1] \longmapsto \begin{cases} \phi(z) & \text{si } z\in]0,1[\\ 1 & \text{si } z=0 \\ \frac{1}{4} & \text{si } z=1 \end{cases}$$

on a bien : $\tilde{\phi}$ est continue sur $[0,1]$

Donc :

ϕ est prolongeable par continuité sur $[0,1]$

Q14.b.ii. On a donc :

$$\exists A>0 \text{ (car } \phi>0 \text{ sur }]0,1[) \,/\, \phi(1-z) \xrightarrow[z\to 0^+]{} A$$

Or : $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $\frac{n-k+1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc : $1-\frac{n-k+1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

D'où, par composition, on a :

$$\forall k\in[\![1,n]\!] \;\phi\left(1-\frac{n-k+1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} A$$

Donc :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \left(\frac{n}{n-k+1}\right)^2 (1-\alpha_k)^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} A$$

D'où : $$\frac{1}{n}\left(\frac{n}{n-k+1}\right)^2 (1-\alpha_k)^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n} A$$

d'où : $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n-k+1}\right)^2 (1-\alpha_k)^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \underbrace{\frac{n}{n} A}_{=A}$$

Donc :

$$\exists A > 0 \,/\, \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n}{n-k+1}\right)^2 (1-\alpha_k)^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} A$$

Q14.c. On a :

$$\frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n}{n-k+1}\right)^2 (1-\alpha_k)^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2A}{n^2}$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

De plus :

$$\frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n}$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Et enfin : $\frac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

D'où : $$\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\left(\left(\frac{n}{n-k+1}\right)^2 (1-\alpha_k)^2 + 1\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Et puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{V}(V_n' - W_n') \geqslant 0$, par encadrement, on a :

$$\mathbb{V}(V_n' - W_n') \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Or, d'après Bienaymé-Tchebitchev, on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \underbrace{\mathbb{P}\left(\left|V_n' - W_n' - \mathbb{E}(V_n' - W_n')\right| \geqslant \varepsilon\right)}_{\geqslant 0} \leqslant \underbrace{\frac{\mathbb{V}(V_n' - W_n')}{\varepsilon}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$$

Donc, par encadrement, on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}\left(\left|V_n' - W_n' - \mathbb{E}(V_n' - W_n')\right| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Copie anonyme - n°anonymat : 551293

Or : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(V_n' - W_n') = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Big(\underbrace{\mathbb{E}(V_n')}_{=\frac{n}{n-k+1}} - \underbrace{\mathbb{E}(W_n')}_{=\frac{n}{n-k+1}}\Big)$ (linéarité de l'espérance) (d'après leurs lois)

$= 0$

D'où :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}(|V_n' - W_n'| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Donc :

$$V_n' - W_n' \xrightarrow{P} 0$$

Q14. d. On a :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ \frac{1}{n} Y_k \hookrightarrow \mathcal{E}(n-k+1)$$

En posant, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $Z_k = \frac{1}{n} Y_{n-k+1}$

On a :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k = \sum_{k=1}^{n} Z_k \text{ et : } \forall k \in [\![1, n]\!],\ Z_k \hookrightarrow \mathcal{E}(k)$$

Or, d'après Q10. b., $\sum_{k=1}^{n} Z_k - \ln(n)$ converge en loi vers une VAR qui suit la loi de Gumbel que l'on note W

D'où : $W_n' = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k - \ln(n)$ converge en loi vers W

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Puisque $V_n' - W_n' \xrightarrow{P} 0$ et $W_n' \xrightarrow{\mathcal{L}} W$, d'après Slutsky, on a :

$$V_n - W_n' + W_n' \xrightarrow{\mathcal{L}} 0 + W$$

d'où : $V_n' \xrightarrow{\mathcal{L}} W$

Puisque W suit la loi de Cauchy, on a :

$(V_n')_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi de Cauchy

Partie III :

Q15. a. Dans les n premiers paquets de céréales achetés, on peut avoir jusqu'à n vignettes différentes, et à chaque paquet, la probabilité d'avoir la i-ème vignette est de $\frac{1}{n}$ et entre chaque paquet, les événements sont indépendants.

Autrement dit, $A_{i,n}$ est la répétition de n épreuves indépendantes et identiques, et ayant une probabilité $\frac{1}{n}$ de succès et $1-\frac{1}{n}$ d'échec.

Donc :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad A_{in} \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{n}\right)$$

Q15. b. On a :

$$\mathrm{Cov}(A_{1,n}, n - A_{1,n}) = \frac{\overbrace{\mathbb{V}(A_{1n} + n - A_{1n})}^{=0} - \mathbb{V}(A_{1n}) - \mathbb{V}(n - A_{1n})}{2}$$

$$= -\mathbb{V}(A_{1,n})$$

Donc :

$$\mathrm{Cov}(A_{1n}, n - A_{1n}) = n\,\frac{n-1}{n^2}$$

Q16. a. D'après l'inégalité de Boole, on a :

$$\forall r \geq 1, \quad \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{r} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{r} \mathbb{P}(E_i)$$

Q15. c. Si $A_{1n}, \ldots, A_{nn}$ sont mutuellement indépendantes alors :

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, \; i \neq j, \quad \mathrm{Cov}(A_{in}, A_{jn}) = 0$$

IMPRIMERIE NATIONALE – 2021-12-PF 018 751