Copie anonyme - n°anonymat : 447594

E3-00115
447594
Maths S

Code épreuve : 297 | Nombre de pages : 32 | Session : 2022

Épreuve de : MATHS S EDHEC BS

Consignes
• Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
• Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
• Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
• Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
• Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 1.

1) Soit f une densité strictement positive et continue sur $\mathbb{R}$, dont la fonction de répartition est notée F

On note $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{F(a)} & \text{si } x \leq a \\ 0 & x > a \end{cases}$

On a g qui est une fonction définie positive car f l'est et par définition de la fonction de répartition

La fonction g, pour $x \leq a$, s'écrit comme le quotient de deux fonctions positives

Ainsi g est positive et continue sauf éventuellement en a, car f continue sur $\mathbb{R}$

. Montrons que $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dx$ existe et vaut 1.

Sous réserve d'existence, on a, pour $A \geq 0$

$$\int_{-A}^{A} g(x)\,dx = \frac{1}{F(a)} \int_{-A}^{a} f(x)\,dx = \frac{1}{F(a)} \left(F(a) - F(-A)\right) (1)$$

On a que $\lim\limits_{A \to -\infty} F(A) = 0$ par définition de la fonction de répartition.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Ainsi, en reprenant (1), on trouve que

$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dx$ existe et vaut 1.

Ainsi, g est bien définie et peut être considérée comme densité d'une certaine variable aléatoire Y.

2) a) Déterminons pour tout $x \in \mathbb{R}$ $G(x)$ à l'aide de F.

On a d'après ce qui précède g qui peut être considérée comme densité d'une certaine variable aléatoire Y.

On a alors $\forall x \leq a$ $G(x) = \int_{-A}^{x} \frac{f(x)}{F(a)}\,dx$

$$= \frac{F(x)}{F(a)} - \frac{F(-A)}{F(a)}$$

En passant à la limite A en $+\infty$, on a que

$\lim_{A \to +\infty} F(-A) = 0$

Ainsi, on a $\forall x \leq a$ $G(x) = \frac{F(x)}{F(a)}$

et $\forall x > a$, $G(x) = 1$.

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$, $G(x) = \begin{cases} \frac{F(x)}{F(a)} & \text{si } x \leq a \\ 1. & \text{si } x > a \end{cases}$

2/b) Procédons par disjonction de cas

Si $x \leq a$, d'une part

On a $P_{(X\leq a)}(X \leq x) = \dfrac{P((X\leq x) \cap (X\leq a))}{P(X\leq a)}$

$= \dfrac{P(X\leq x)}{P(X\leq a)} = \boxed{\dfrac{F(x)}{F(a)}}$

car la fonction de répartition F se définit de la manière suivante à savoir

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = P(X \leq x)$.

Si $x \geq a$, on a d'autre part.

$$P_{(X\leq a)}(X \leq x) = \frac{P((X\leq x)\cap(X\leq a))}{P(X\leq a)}$$

$$= \frac{P(X\leq a)}{P(X\leq a)} = 1$$

Ainsi, $P_{(X\leq a)}(X\leq x) = \begin{cases} \dfrac{F(x)}{F(a)} & \text{si } x \leq a \\ 1 & \text{si } x > a \end{cases} = G(x).$

Ce qu'il fallait démontrer

3/a) On pose une suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes, et suivant toutes la même loi Y.

Soit $M_n = \max(Y_1, Y_2 \ldots Y_n)$

On a alors l'égalité d'évènement suivante, à savoir :

$\forall x \leq a)$ $[M_n \leq x] = [\bigcap_{i=1}^{n} (Y_i \leq x)]$

En passant aux probabilités et par indépendances des variables $(Y_i)_{i\in[1,n]}$ suivant la même loi que Y. On a alors

$$P(M_n \leq x) = \prod_{i=1}^{n} P(Y_i \leq x) = (P(Y\leq x))^n = (G_X(x))^n$$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$, $G_n(x) = (G(x))^n = \begin{cases} \left(\frac{F(x)}{F(a)}\right)^n & x \leq a \\ 1 & x > a \end{cases}$

b) On a que l'application $t \to x \to F(x)$ qui est comprise entre 0 et 1, d'après la fonction de répartition.

On a en effet que $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$ avec F strictement croissante.

Ainsi, par le théorème de bijection monotone, on a que $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) \in [0;1]$

En passant à la limite en n en $+\infty$, on a que

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{F(x)}{F(a)}\right)^n = 0$$

Ainsi, la suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers la variable aléatoire T ci-dessous, à savoir G_T sa fonction de répartition

$\forall x \in \mathbb{R}$ $G_T(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq a \\ 1 \text{ si } x > a \end{cases}$

4) a) On pose $Z_n = n(a - M_n)$

On note H_n la fonction de répartition de Z_n.

$Z_n(\Omega) = \mathbb{R}^+$

avec $a - x \leq 0 \Rightarrow -x \leq -a$ $x \geq a$

Ainsi, $H_n(x) = 0$ si $x < 0$

Soit $x \geq 0$, on a l'égalité d'événements suivante à savoir

$$[Z_n \leq x] = [n(a - M_n) \leq x]$$
$$= \left[a - M_n \leq \frac{x}{n}\right]$$
$$= \left[-M_n \leq \frac{x}{n} - a\right]$$
$$= \left[M_n \geq a - \frac{x}{n}\right]$$

Copie anonyme - n°anonymat : 447594

Code épreuve : 297

Nombre de pages :

Session : 2022

Épreuve de : MATHS S EDHEC BS

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

En passant aux probabilités, on a que

$$P(Z_n \leq x) = 1 - P(M_n \leq a - \frac{x}{n})$$

$$= 1 - \left(\frac{F(a-\frac{x}{n})}{F(a)}\right)^n$$ d'après le résultat trouvé à la question 3)a)

Ainsi en rassemblant les résultats précédents, on obtient que

$$\boxed{H_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \left(\frac{F(a-\frac{x}{n})}{F(a)}\right)^n & \text{si } x \geq 0. \end{cases}}$$

b) Montrons le résultat demandé.

On a que F est une fonction de répartition associée à la densité f, suivant la variable aléatoire X.

On a par le théorème de Taylor-Young que F admet un développement limité à l'ordre 2.
On a ainsi pour g de classe C^1, par la formule de Taylor Young que g admet un développement limité à l'ordre 1 sur l'intervalle $[a, a+h)$, on a alors :

$$g(a+h) = g(a) + g'(a)h + o(h). \quad (4)$$

Associons -ici g à F qui est bien de classe C^1, car f est continue sur $\mathbb{R}$.

Prenons ici $h = -\frac{x}{n}$ avec $x \in \mathbb{R}$
avec $\lim_{n\to\infty} -\frac{x}{n} = 0$
Ainsi, en reprenant l'égalité (4), on obtient que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F\left(a - \frac{x}{n}\right) = F(a) - f'(a)\frac{x}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{x}{n}\right)$$

Ainsi, on trouve bien en divisant par $F(a)$ qui est non nul que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{F\left(a - \frac{x}{n}\right)}{F(a)} = 1 - \frac{f(a)}{F(a)} \times \frac{x}{n} + \underset{n\to\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

avec $F'(a) = f(a)$ $\forall a \in \mathbb{R}$
(a un réel fixé d'après l'énoncé)

c) Reprenons les résultats précédents

On a d'après 4)a) que

$$H_n(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - \left(\frac{F\left(a - \frac{x}{n}\right)}{F(a)}\right)^n & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

On a $\left(\frac{F\left(a - \frac{x}{n}\right)}{F(a)}\right)^n = e^{n \ln\left(\frac{F\left(a - \frac{x}{n}\right)}{F(a)}\right)}$

$$= e^{n \ln\left(1 - \frac{f(a)}{F(a)}\frac{x}{n} + \underset{n\to\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)}$$

Or, $\ln(1+x) \underset{x\to0}{\sim} x$

On a que $\lim\limits_{n\to\infty} -\dfrac{f(a)}{F(a)} \times \dfrac{x}{n} = 0$

Ainsi, on a par principe multiplicatif et par continuité de la fonction exponentielle que

$$\left(\frac{F(a-\frac{x}{n})}{F(a)}\right)^n = e^{-\frac{f(a)}{F(a)}x + o\left(\frac{1}{n}\right)}$$

Ainsi, on a que la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire Z, à savoir (avec F_Z sa fonction de répartition associée).

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\frac{f(a)}{F(a)}x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } (Z_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{E}\left(\frac{f(a)}{F(a)}\right)}$$ avec $\dfrac{f(a)}{F(a)} > 0$

car f est strictement positive et F sa primitive associée (à savoir la fonction de répartition de la variable X).

Exercice 2,

1) Soit l'ensemble $\mathcal{F}$, l'ensemble des endomorphismes f de $\mathbb{R}^3$ tels qu'il existe un réel k de $[0;1[$ pour lequel on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \|f(x)\| \leq k\|x\|$$

Si l'on prend $k=0$

On a alors $\forall x \in \mathbb{R}^3$ $\|f(x)\|^2 \leq 0$

Par encadrement, on a que $\|f(x)\|^2 = 0$

Comme c'est le cas pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, on en déduit que

$f=0$, à savoir l'endomorphisme nul

Ainsi, l'ensemble F lorsque $k=0$ est l'endomorphisme nul !

2) a) Un premier exemple

Calculons A^2

$$\begin{pmatrix} -1 & 8 & -4 \\ 8 & -1 & -4 \\ -4 & -4 & -7 \end{pmatrix}$$

On a $A^2 = \frac{1}{(27)^2} \begin{pmatrix} -1 & 8 & -4 \\ 8 & -1 & -4 \\ -4 & -4 & -7 \end{pmatrix}$ $= \frac{1}{(27)^2} \begin{pmatrix} 1+64+16 & -8-8+16 & 8\times4-8\times4 \\ -8-8+16 & 64+1+16 & -8\times4-8\times4 \\ -8\times4+8\times4 & -8\times4+8\times4 & 32+49 \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{(27)^2} \times \begin{pmatrix} 81 & 0 & 0 \\ 0 & 81 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{pmatrix}$$

avec $81 = 3\times27$

$$= \frac{3}{27} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \frac{1}{9} I_3$$

Les valeurs propres possibles de A sont à trouver parmi les racines de son polynôme annulateur.

Soit P le polynôme annulateur, que l'on note de la manière suivante, à savoir

$$P = X^2 - \frac{1}{9}$$

On a alors $P = \left(X - \frac{1}{3}\right)\left(X + \frac{1}{3}\right)$

Ainsi, les deux valeurs propres possibles de A sont $\frac{1}{3}$ et $-\frac{1}{3}$

Copie anonyme - n°anonymat : 447594

Code épreuve : 297	Nombre de pages :	Session : 2022

Épreuve de : MATHS S EDHEC BS

Emplacement QR Code

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

2) b) · A est une matrice symétrique à coefficients réels, donc diagonalisable.
En effet,
On trouve bien que $^tA = A$.

On en déduit que λ et p, à savoir $-\frac{1}{3}$ respectivement $1/3$ sont bien valeurs propres de A

2) c) On sait que A est une matrice symétrique et diagonalisable.

Soit p et λ les valeurs propres de A

On considère d'après l'énoncé l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base B est

$$A = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} -1 & 8 & -4 \\ 8 & -1 & -4 \\ -4 & -4 & -7 \end{pmatrix}$$

On a par propriété du cours que les sous-espaces propres associés à un endomorphisme symétrique forment une famille orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

Les sous-espaces de f forment une famille libre et sont orthogonaux, avec $\dim E_\lambda(f) + \dim E_p(f) = \dim \mathbb{R}^3$
avec $E_\lambda(f)$ et $E_p(f)$ les sous-espaces propres associés

respectivement à λ et à μ.

Ainsi, les sous-espaces propres de f sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathbb{R}^3$.

2d) On sait d'après ce qui précède que x s'écrit de manière unique comme la somme d'un élément de $E_\lambda(f) = \ker(f - \lambda Id)$ et de $E_\mu(f) = \ker(f - \mu Id)$

On a x de $\mathbb{R}^3$ qui s'écrit sous la forme suivante

$$x = y + z \qquad \text{avec } y \in \ker(f - \lambda Id) \text{ et } z \in \ker(f - \mu Id)$$

On a alors

$$\|f(x)\|^2 = \|f(y+z)\|^2 = \lambda\|y\|^2 + \mu\|z\|^2$$

d'après le théorème de Pythagore

$$= \lambda\left(\|y\|^2 - \|z\|^2\right) \quad (2)$$

car $\lambda = -\mu$ d'après la question 2)a)

En reprenant (2), on trouve que

$$\|f(x)\|^2 \leq \lambda\,\|y+z\|^2 \qquad \text{avec } \lambda = \frac{1}{3} \qquad (4)$$

car $\left|\,\|y\| - \|z\|\,\right| \leq \|y+z\|^2$

Ainsi en passant à la racine carrée dans (4), qui est une application strictement croissante :

On trouve qu'il existe bien un $k \in [0;1[$ tel que

$\forall x \in \mathbb{R}^3 \quad \|f(x)\| \leq k\|x\|$ avec $k = \frac{1}{\sqrt{3}} \in [0;1[$

Ainsi, l'endomorphisme f appartient bien à F.

3)a) Raisonnons par l'absurde
. Supposons que id appartient à F

Si tel est le cas, on aurait que

$\forall x \in \mathbb{R}^3 \quad \|x\| \leq k\|x\| \Leftrightarrow \quad 0 \leq (k-1)\|x\|$

Si l'on a $\|x\| \neq 0$, alors on aurait dès ce cas $1 \leq k$
ce qui n'est pas le cas selon l'énoncé
D'où la contradiction
Si $\|x\| = 0$, le résultat est également démontré

Ainsi, Id_E n'appartient pas à F.

3b) Montrons que F n'est pas un espace-vectoriel

On a $f \in E$
. Regardons si F est stable est stable par combinaison linéaire
Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$
et $(f, g) \in F^2$
On a $\quad \|(\lambda f + \mu g)(x)\| \leq \|\lambda f(x)\| + \|\mu g(x)\|$
par l'inégalité triangulaire

$\leq |\lambda| k \|x\| + |\mu| k' \|x\|$

car f et g appartiennent à F, on
a

$\leq (|\lambda| k + |\mu| k') \|x\|$

on pose $k' = |\lambda| k + |\mu| k'$
or k' n'est ici pas forcément compris entre 0 et
1 (exclus).

Ainsi : F n'est pas un espace vectoriel, n'est pas stable par combinaison linéaire

3c) Montrons que F est stable par la loi de composition des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$

Soit f et g deux endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ appartenant à l'ensemble F.

On a alors $\forall x \in \mathbb{R}^3$ $\|f(x)\| \leq k\|x\|$ et $\|g(x)\| \leq k'\|x\|$
avec $(k, k') \in [0;1[^2$

On a alors $\|f(g(x))\| \leq k\|g(x)\| \leq k \times k' \|x\|$
$\leq k'' \|x\|$
avec $k'' = k \times k'$
et $k'' \in [0;1[$

Ainsi, F est stable par la loi de composition des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$.

3d) Soit F qui est stable par la loi de composition des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$.
Soit f un automorphisme de F, ie au où f est un endomorphisme bijectif
Raisonnons par l'absurde
Si f^{-1} appartenait à F, on aurait d'après ce qui précède

$f \circ f^{-1}$ qui appartiendrait à F.

Or, Id_E n'appartient pas à F d'après 3)a)
d'où la contradiction

Ainsi, si f est un automorphisme de F, alors f^{-1} n'appartient pas à F.

Copie anonyme - n°anonymat : 447594

Code épreuve : 297 | Nombre de pages : | Session : 2022

Épreuve de : MATHS S EDHEC BS

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

4)a) On a vu à la question précédente que F était stable par la loi de composition des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$.

On aurait alors $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $\|p^i(x)\| \leq k^i \|x\|$
avec $\|p^i(x)\| = \|p(x)\|$
car p projecteur
avec $\|p(x)\| \leq k\|x\|$
On aurait alors que $k = k^i$ $\forall i \in \mathbb{N}^*$
ce qui est ici possible que si $k=0$ ou $k=1$ (impossible car le projecteur p appartient à F).

Or, d'après la question 1), on a que l'ensemble F lorsque $k=0$ est l'endomorphisme nul.

Ainsi, p est le projecteur nul.

Ainsi, F ne contient pas de projecteurs autres que le projecteur nul.

4b) F ne contient pas des symétries, car on aurait pour f une symétrie $f^2 = id$ avec f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ appartenant à F.
Or, F est stable par la loi de composition des endomorphismes de $\mathbb{R}3$

Or, $u_{\mathcal{E}}$ n'appartient pas à $\mathcal{F}$.

Ainsi, $\mathcal{F}_{n_e}$ contient pas les symétries

5)a) Soit f un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^3$
Il existe donc une base orthonormée $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres associés à l'endomorphisme f symétrique respectivement associée aux valeurs propres λ_1, λ_2 et λ_3
avec $k = \max\{|\lambda|, \lambda \in Sp(f)\}$

on a $\quad x = \sum_{i=1}^{3} x_i \varepsilon_i \quad$ (par propriété)

Ainsi, $\|f(x)\| = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} x_i x_j \lambda_i \lambda_j \langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle$ (5)

avec $\langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

on reprenant les calculs de (5), on a alors que

$$\|f(x)\| = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 \lambda_i^2 \quad (6)$$

or, $\quad |\lambda_i| \leq k \quad$ avec $k = \max\{|\lambda|, \lambda \in Sp(f)\}$

Ainsi, en réinsérant cette information dans l'inégalité (6), on obtient que

$$\|f(x)\| \leq k \sum_{i=1}^{3} x_i^2$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^3 \ \|f(x)\| \leq k\|x\|}$$

5b) • Soit f appartient à F.

On a alors que $\forall x \in \mathbb{R}^3 \quad \|f(x)\| \leq k\|x\|$
avec $k \in [0;1[$

or, d'après ce qui précède, on a que $k = \max\{|\lambda|, \lambda \in Sp(f)\}$.

Ainsi, $|\lambda| < 1$; ainsi $\lambda \in]-1, 1[$

• Réciproquement, si les valeurs propres de f appartiennent à $]-1, 1[$, on obtient en reprenant le résultat précédent que

$\forall x \in \mathbb{R}^3, \|f(x)\| \leq k\|x\|$

avec $k = \max\{|\lambda|, \lambda \in Sp(f)\}$, avec $\lambda \in [0; 1[$.

f appartient à F.

• Ainsi, on a bien montré que f appartenait à F, si et seulement si, les valeurs propres de f appartiennent toutes à $]-1, 1[$.

Un dernier exemple

6) a) Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base B est $A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On a $A^2 = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & -4 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

Le calcul n'est pas fructueux.

• Raisonnons avec les valeurs propres de A.

$(A - \lambda I_3)$ inversible $\Leftrightarrow \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -\lambda & -2 & 2 \\ -2 & -1-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$ n'est pas inversible $\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1-\lambda \\ -2 & -1-\lambda & 0 \\ -\lambda & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftrightarrow L_3$

$A-\lambda I_3$ pas inversible $\Leftrightarrow \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1-\lambda \\ 0 & -1-\lambda & 1-\lambda \\ 0 & -4 & 4+(1-\lambda)\lambda \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 + \lambda L_1 \end{matrix}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1-\lambda \\ 0 & -4 & 4+(1-\lambda)\lambda \\ 0 & -1-\lambda & (1-\lambda) \end{pmatrix} \quad L_3 \leftrightarrow L_2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1-\lambda \\ 0 & -4 & 4+(1-\lambda)\lambda \\ 0 & 0 & 4(1-\lambda) - (1+\lambda)(4+(1-\lambda)\lambda) \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow 4L_3 - (1+\lambda)$$

avec $4(1-\lambda)-(1+\lambda)(4+(1-\lambda)\lambda) = 4-4\lambda-(1+\lambda)(4+\lambda-\lambda^2)$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1-\lambda \\ 0 & -4 & 4+(1-\lambda)\lambda \\ 0 & 0 & 4-4\lambda-(1+\lambda)(4+\lambda-\lambda^2) \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de A sont données par les valeurs pour lesquelles $A-\lambda I_3$ non inversible.
Il faut donc que $\frac{1}{6}(4-4\lambda-(1+\lambda)(4+\lambda-\lambda^2))$ soit nul pour que $A-\lambda I_3$ soit non inversible.

Ainsi, le polynôme annulateur de A est donné par P avec $P = \frac{1}{6}(4-4X-(1+X)(4+X-X^2))$

$$= \frac{1}{6}(\cancel{4}-4X-\cancel{4}-X+\cancel{X^2}-4X-\cancel{X^2}+X^3)$$

$$= \frac{1}{6}(X^3-9X)$$

$$= \frac{1}{6}(X(X^2-9))$$

$$P = \frac{1}{6}(X(X-3)(X+3))$$

Ainsi, les valeurs propres de f sont données par les valeurs de ses racines, à savoir 0, $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$

---

6 b) On a que ${}^tA = A$
On a alors que f est un endomorphisme symétrique

Copie anonyme - n°anonymat : 447594

Code épreuve : 297

Nombre de pages :

Session : 2022

Emplacement QR Code

Épreuve de : MATHS SEDHEC BS

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

On a que les valeurs propres de A sont comprises entre -1 et 1 exclues.

Ainsi, f appartient à F d'après la question 5/b
On a ainsi pour $k = 1/2$ de $[0;1[$ que

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \|f(x)\| \leq k\|x\|$$

c) On complète le script Scilab suivant, on a :

```
A = [0, -2, 2 ; -2, -1, 0, 2, 1] / 6
k = max ( abs (Spec(A)))
disp (k)
```

$Abs(x) = |x|$

avec spec(A) qui renvoie les valeurs propres de A.

Le programme devrait renvoyer la valeur $1/2$.

Exercice 3.

1) a). On a $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$

On a la suite $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes des variables N, suivant toutes la même loi que X

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

On a $N(\Omega) = \mathbb{N}^*$

On déduit que S est une variable aléatoire définie sur l'univers $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

On a $S(\Omega) = \mathbb{N}$

1b) On a que $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$

On a que la variable aléatoire N telle que $N(\Omega) = \mathbb{N}^*$, indépendante des variables X_i et possède une espérance

On, $\omega \in \Omega$, $S(\omega) = \sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i(\omega)$

avec la suite de variable aléatoire mutuellement indépendantes et suivant toutes la même loi que X, à savoir une loi de Bernoulli de paramètre p.

On a alors d'après la formule de l'espérance totale que S admet une espérance car la variable aléatoire N telle que $N(\Omega) = \mathbb{N}^*$, indépendante des variables $(X_i)_{i \in [1, N]}$, possède une espérance

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$

On a la suite de variables aléatoires indépendantes et suivant toutes la même loi que X, qui suit une loi de Bernoulli de paramètre p

Par stabilité des lois de Bernoulli, on en déduit par propriété du cours que $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$

Ainsi, $S_n \to \mathcal{B}(n, p)$

S_n admet donc une espérance et vaut $\boxed{E(S_n) = np.}$

3). On a $\forall k \in \mathbb{N}^*$
$$(S = k) = \left[\sum_{i=1}^{N} X_i = k\right]$$

On a d'après le système complet d'évènement $\{N=n\}$ pour $n \geq k$ que et la formule des probabilités totales que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, P(S=k) = \sum_{n=k}^{+\infty} P\left([N=n] \cap \left[\sum_{i=1}^{N} X_i = k\right]\right)$$

avec $k \geq n$, sinon $P(X_i = j) = 0$

$$= \sum_{n=k}^{+\infty} P\left([N=n] \cap \sum_{i=1}^{n} [X_i = k]\right) \quad (2)$$

or, la variable aléatoire N est indépendante de la suite de variable $(X_i)_{i \in [\![1, n]\!]}$

Ainsi en reprenant (2), on trouve que

$$\boxed{\begin{aligned}\forall k \in \mathbb{N}^* \; P(S=k) &= \sum_{n=k}^{+\infty} P(N=n) \times P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = k\right) \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} P(N=n) \times P(S_n = k)\end{aligned}}$$

4)a) Soit $N - 1 \to \mathcal{P}(\lambda)$

On a alors $N(\Omega) = \mathbb{N}^*$

Ainsi, $P(N-1 = k-1) = P(N=k)$
$$P(N=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

car $(N-1) \to \mathcal{P}(\lambda)$

Ainsi, $N(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $P(N=k) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$ $\forall k \in \mathbb{N}^*$

4) b) Reprenons le résultat précédent à partir de la question 3.

On a que $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$

Ainsi, en reprenant le résultat de la question (3), on a que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(S=k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} p^k q^{n-k} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{n-k} \times \lambda^{k-1}}{(n-1)!}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^* \quad P(S=k) = \frac{p^k \lambda^{k-1} e^{-\lambda}}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} n \frac{(\lambda q)^{n-k}}{(n-k)!}}$$

On opère le changement d'indice $n-k=i$, on obtient que

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad P(S=k) = \frac{p^k \lambda^{k-1} e^{-\lambda}}{k!} \cdot \sum_{i=0}^{+\infty} (k+i) \frac{(\lambda q)^i}{i!}$$

on reconnaît une série exponentielle

$$= \frac{p^k \lambda^{k-1} e^{-\lambda}}{k!} \times \left(k e^{\lambda q} + \lambda q \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{(\lambda q)^{i-1}}{(i-1)!} \right)$$

en opérant le changement d'indice $i-1=k$

$$= \frac{p^k \lambda^{k-1} e^{-\lambda}}{k!} \times \left(k e^{\lambda q} + \lambda q e^{\lambda q} \right)$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, P(S=k) = \frac{p^k \lambda^{k-1}}{k!} e^{-\lambda p} (k+\lambda q).}$$

c) On a $S(\Omega) = \mathbb{N}$ d'après 1)a)

Ainsi, $\sum_{k=0}^{+\infty} P(S=k) = 1.$

Copie anonyme - n°anonymat : 447594

Code épreuve : 297

Nombre de pages :

Session : 2022

Épreuve de : MATHS S EDHEC BS

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

On a $P(S=0)+\sum_{k=1}^{n} P(S=k)=1$

$$P(S=0)=1-\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{p^k \lambda^{k-1}}{(k-1)!}(\lambda q+k)e^{-\lambda p}$$

$$(3)=1-e^{-\lambda p}\left(\lambda q p \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(\lambda p)^{k-1}}{(k-1)!}+p\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(p\lambda)^{k-1}k}{(k-1)!}\right)$$

or, on a $\lambda p q \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(\lambda p)^{k-1}}{(k-1)!}=\lambda p q e^{\lambda p}$

De même, on a que : On a $k=(k-1)+1$.

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(p\lambda)^{k-1}}{(k-1)!}\times((k-1)+1)=\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{(p\lambda)^{k-1}}{(k-2)!}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(p\lambda)^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$=p\lambda\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{(p\lambda)^{k-2}}{(k-2)!}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(p\lambda)^{k-1}}{(k-1)!}$$

en opérant les changements d'indice $k-2=i$ et $k-1=j$, on a

$$=p\lambda e^{\lambda p}+e^{\lambda p}$$

Ainsi, en réinsérant ces 3 informations dans (3), on obtient que

$$P(S=0)=1-e^{-\lambda p}\left(\lambda p q e^{\lambda p}+p^2\lambda e^{\lambda p}+p e^{\lambda p}\right)$$

$$\boxed{P(S=0)=1-\lambda p q+p^2\lambda+p}$$

d) On a alors par propriété de l'espérance conditionnelle que

$E(S \mid [N=n]) = \sum_{k=0}^{+\infty} k \, P_{[N=n]}(S=k)$

Je n'arrive pas à conclure.

8).

Problème

1) Question préliminaire

Soit f une fonction définie strictement positive sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) \underset{0^+}{\sim} x$

Partie 1.

2) a) Étudions la parité de la fonction sh.

On a $sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ pour $x \in \mathbb{R}$

On a alors $sh(-x) = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2} = -sh(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{On en déduit que la fonction sh est impaire}}$

2) b) On a que la fonction sh est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Dérivons la fonction sh

On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $sh'(x) = \frac{e^x}{2} + \frac{e^{-x}}{2}$

On a alors que $\forall x \in \mathbb{R}$, $sh'(x) \geq 0$ (s'annule en un nombre fini de points

Ainsi, la fonction sh est strictement croissante. On a le tableau de variations suivant de sh, à savoir

x	$-\infty$	0	$+\infty$
variations de sh	$-\infty$ ↗	0	↗ $+\infty$

avec $\lim_{x\to-\infty} sh(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} sh(x) = +\infty$.

2c) Determiner un équivalent de sh en 0

On a $e^{x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

et $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

Ainsi, $\frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = \frac{1 + x - (1 - x) + o(x)}{2}$

$= x + o(x)$

$\boxed{\text{Ainsi, } sh(x) \underset{x\to 0}{\sim} x}$.

3)a) On a $ch(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = ch(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\text{Ainsi, la fonction ch est paire}}$

3 b) Dresser le tableau de variations de ch.

On a ch qui est une fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On a alors sa dérivée qui vaut

$\forall x \in \mathbb{R}$ $ch'(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$

• $ch'(x) \geq 0 \iff e^{x} \geq e^{-x}$ en appliquant l'application
$\iff 2x \geq 0$ croissante $t \mapsto \ln(t)$
$\iff x \geq 0$

Copie anonyme - n°anonymat : 447594

Code épreuve : 297	Nombre de pages :	Session : 2022

Épreuve de : MATHS S EDHEC BS

Emplacement QR Code

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

De même, $ch'(x) \leq 0 \iff x \leq 0$

Ainsi, on a le tableau de variations suivant à savoir

x	$-\infty$		$+\infty$
var de ch	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

4)a) On a $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$(ch(x))^2 - (sh(x))^2 = \left(\frac{e^{x} + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^{x} - e^{-x}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}}{4}$$

$$= \frac{4}{4} = 1$$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$, on a que

$$\boxed{(ch(x))^2 - (sh(x))^2 = 1.}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Partie 2

5) a)

On a que $\forall x \in \mathbb{R}$ $th(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ qui est bien définie

sur $\mathbb{R}$ car $e^x + e^{-x} \neq 0$

Ainsi, on définit une fonction, appelée "tangente hyperbolique", notée th définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad th(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)}}$$

5 b) On sait d'après les questions précédentes que sh est impaire et ch paire.

On a alors que th est impaire

en effet, cela se vérifie facilement

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad th(-x) = \dfrac{e^{-x} - e^{x}}{e^x + e^{-x}} = -th(x).$

$\boxed{\text{Ainsi, th est impaire.}}$

5) c) On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $th(x) = \dfrac{sh(x)}{ch(x)}$

th est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

On a alors que $th'(x) = \dfrac{sh'(x)ch(x) - ch'(x)sh(x)}{(ch(x))^2}$ $(\forall x \in \mathbb{R})$

or $ch' = sh$ et $sh' = ch$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$, on a que

$$th'(x) = \frac{(ch(x))^2 - (sh(x))^2}{(ch(x))^2} = \frac{1}{(ch(x))^2} \geq 0 \text{ d'après 4)}$$

$$\boxed{\text{La fonction th est donc croissante sur } \mathbb{R}.}$$

5d) On a alors le tableau de variations suivant, de la fonction th

x	$-\infty$	0	$+\infty$
variation de la fonction th	-1 $\nearrow$	0	$\nearrow$ 1

En effet, $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-e^{-x}}{e^{-x}} = -1$

De même, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{x}}{e^{x}} = 1.$

6)a) Trouvons les constantes a et b qui remplissent les critères de l'égalité

On a $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ $\frac{1}{\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}} = \frac{2}{e^{x}-e^{-x}}$

On a alors le système d'équation suivant, à savoir

$$\frac{a e^{-x}}{1 - e^{-x}} + \frac{b e^{-x}}{1 + e^{-x}} = \frac{a e^{-x}(1 + e^{-x}) + b e^{-x}(1 - e^{-x})}{1 - e^{-2x}}$$

$$= \frac{a(1 + e^{-x}) + b(1 - e^{-x})}{e^{x} - e^{-x}}$$

On a alors le système suivant : (la famille $(1, e^{-x})$ étant libre)

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ a e^{-x} - b e^{-x} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ (a - b) e^{-x} = 0 \end{cases} \quad (7)$$

On simplifie par $e^{-x} \neq 0$, ce qui nous donne dans (7)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=2 & (L_1) \\ a-b=0 & (L_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 & L_1 \leftarrow L_1+L_2 \\ b=1. \end{cases}$$

Ainsi, on a que a et b valent réciproquement 1 afin de remplir les conditions de l'inégalité démontrée.

6b) On a d'après ce qui précède que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{1}{sh(x)} = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} + \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$$

$$= \frac{1}{e^{x}-1} + \frac{1}{e^{x}+1}$$

On reconnait ici des primitives de la forme $\frac{u'}{u}$

On a une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction qui à $x \to \frac{1}{sh(x)}$ est donc donné par $\ln(1-e^{-x}) - \ln(1+e^{-x})$ à une constante près

Ainsi, la primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction qui à $x \to \frac{1}{sh(x)}$ est $\ln\left(\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}\right)$, c'est-à-dire $\ln(th(x))$

7) En reprenant le résultat de la question 1) préliminaire on obtient le résultat

On a que th est une fonction continue et positive sur $\mathbb{R}^+$ telle que $th\left(\frac{x}{2}\right) \underset{x\to 0^+}{\sim} x$

En effet, en reprenant le résultat de la question 2)c) On a $sh(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} x$

et $ch(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} 2.$

Copie anonyme - n°anonymat : 447594

Code épreuve : 2 31	Nombre de pages :	Session : 2022

Épreuve de : MATHS BS EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Ainsi on reprenant le résultat de la question préliminaire que $\ln\left(\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right) \underset{x \to 0^+}{\sim} \ln(x)$

Partie 3.

Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$

8) a) On a $g : t \mapsto \frac{1}{\operatorname{sh}(tx)}$ qui est une fonction décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ par composition d'une fonction croissante, à savoir $f : t \mapsto \operatorname{sh}(tx)$ (2)b) et d'une fonction décroissante $h : t \mapsto \frac{1}{t}$. avec $x \in \mathbb{R}^{*+}$, $t \in \mathbb{R}^{+*}$

En effet $h'(t) = -\frac{1}{t^2} \leq 0$ pour $t \in \mathbb{R}^{+*}$

Ainsi la fonction $g(t) = \frac{1}{\operatorname{sh}(t)}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^{*+}$

On a alors $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in [k, k+1]$ et $x \in \mathbb{R}^{+*}$

$$\frac{1}{\operatorname{sh}((k+1)x)} \leqslant \frac{1}{\operatorname{sh}(tx)} \leq \frac{1}{\operatorname{sh}(kx)} \quad (\ast)$$

Par croissance de l'intégrale dans le bon sens $[k, k+1]$, on a alors à partir de $(\ast)$ que

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $$\boxed{\frac{1}{sh((k+1)x)} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{sh(xt)}\, dt \leq \frac{1}{sh(kx)}} \quad (3)$$

Ce qu'il fallait démontrer

8b) Sommons de 1 à n dans l'égalité précédente, on a a alors l'égalité suivante, à savoir

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{sh((k+1)x)} \leq \int_1^{n+1} \frac{1}{sh(xt)}\, dt \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{sh(kx)}$$

On a alors d'une part, à partir du membre droit précédent que

$$\boxed{\int_1^{n+1} \frac{1}{sh(tx)}\, dt \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{sh(kx)}}$$

• D'autre part, on somme de 1 à n-1 dans l'égalité (3), on a alors

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{sh((k+1)x)} \leq \int_1^{n} \frac{1}{sh(xt)}\, dt$$

en opérant le changement d'indice $k+1 = i$, on a alors que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{sh(kx)} - \frac{1}{sh(x)} \leq \int_1^{n} \frac{1}{sh(xt)}\, dt$$

Ce qui nous donne alors le membre droit de l'inégalité demandée à savoir :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{sh(kx)} \leq \int_1^n \frac{1}{sh(xt)} dt + \frac{1}{sh(x)}$$

Ainsi, on a en rassemblant ces résultats que

$$\boxed{\int_1^{n+1} \frac{1}{sh(tx)} dt \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{sh(kx)} \leq \int_1^n \frac{1}{sh(tx)} dt + \frac{1}{sh(x)}}$$

9) a) Montrons que la série de terme général $\frac{1}{sh(kx)}$ est convergente.

Montrons ainsi que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{sh(tx)} dt$ est convergente.

Soit $A \geq 1$

On a que la fonction intégrée est continue sur $[1,+\infty[$

Il y a donc une impropreté en $+\infty$.

On a $\frac{1}{sh(tx)} = \frac{2}{e^{tx}-e^{-tx}} = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ avec $x \in \mathbb{R}^{+*}$ fixé

En effet, on a par croissance comparée que

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{2t^2}{e^{tx}-e^{-tx}} = 0$$

or, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge

Ainsi par comparaison d'intégrale de fonctions positives, on en déduit que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{sh(tx)} dt$ converge.

- Revenons-en à l'inégalité précédente

On en déduit par cette égalité que la série de terme général $\frac{1}{sh(nx)}$ $(n \in \mathbb{N})$ et l'intégrale de $\int_1^n \frac{1}{sh(tx)} dt$

ont mêmes caractères convergents

On a d'après ce que nous venons de montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{sh(tx)} dt$ converge

Ainsi, la série de terme général $\frac{1}{sh(nx)}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ est convergente

10)
```
n = input('entrez une valeur pour n')
x = input('entrez une valeur strictement positive pour x:')
S=0
for k=1:n
    S = S + (1 / %e(k*x) - %e(-k*x))
end
disp(S)
```