ECRICOME PREPA 2022 - ECE - Economique

Mathématiques option économique Mathématiques

LOUISE

Note de délibération : 18.04 / 20

Prénom (s) LOUISE

18.04 / 20

Ecricome Épreuve : mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 1 / 11

Numéro de table 20

Exercice 1 :

Partie I :

1) $F = \left\{ M : \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}, (a;b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

$= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, (a;b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

$= \underline{\mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right)}$

F est bien un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$.

Par ailleurs,

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.04 / 20

vecteurs clairement non colinéaires.

$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est une famille libre

et génératrice de F.

C'est donc une base de F et $\dim(F) = 2$

2) $G = \left\{ M \in M_3(\mathbb{R}),\ M^2 = M \right\}$

$G \subset M_3(\mathbb{R})$ par définition

$0_3 \in G$ car $0_3^2 = 0_3$
Ainsi, $G \neq \emptyset$.

Soit $(M_1 ; M_2) \in G^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$
montrons que $M_1 + \alpha M_2 \in G$.

$(M_1 + \alpha M_2)^2 =$

3)

a) l' ensemble $F \cap G$ représente l'ensemble des matrices (de M) de $M_3(\mathbb{R})$ de la forme $\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ telle que $M^2 = M$.

Ainsi, si $A^2 = A$, alors $A \in F \cap G$ car $A \in F$ puisque :

$$A = a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec}$$

$a = \frac{2}{3}$ et $b = -\frac{1}{3}$

Ainsi, $A^2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix}$

$$A^2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

On a bien $\underline{A^2 = A}$

conclusion : $\underline{A \in F \cap G}$

b) D'après ce qui précède $A^2 = A$

$\Rightarrow \underline{A^2 - A = 0}$

On obtient P un polynôme annulateur de A
avec $\underline{P(X) = X^2 - X}$

c) D'après ce qui précède, on a :

$$P(X) = X^2 - X$$
$$= \underline{X(X-1)}$$

Or, on sait que les racines d'un polynôme annulateur sont les valeurs propres éventuelles de A.

Ainsi, $\underline{\{0 ; 1\} \subset Sp(A)}$.

Prénom (s) LOUISE

18.04 / 20

Ecricome Épreuve : mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 2 / 11

Numéro de table 20

Vérifions que 0 et 1 sont valeurs propres de A.

Soit $X \in M_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$AX = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z = 0 \\ -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z = 0 \\ -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \\ -x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = z \\ -x + 2y - 2x + y = 0 \\ -x - y + 4x - 2y = 0 \end{cases}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.04 / 20

$$\iff \begin{cases} 2x - y = z \\ -3x + 3y = 0 \\ 3x - 3y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = 2x - y \\ y = x \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z = x \\ y = x \end{cases}$$

On a $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

On a donc 0 qui est bien valeur propre de A.

Et $E_0 = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

Par ailleurs, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est donc une famille libre et génératrice de E_0

C'est donc une base de E_0 et $\dim(E_0) = 1$.

Soit $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$AX = X$

$$\iff \begin{cases} \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z = x \\ -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z = y \\ -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z = z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x - y - z = 3x \\ -x + 2y - z = 3y \\ -x - y + 2z = 3z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -x - y - z = 0 \\ -x - y - z = 0 \\ -x - y - z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \{ x = -y - z.$$

On a donc $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

1 est donc bien valeur propre de A

et $E_1 = \text{vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$

Par ailleurs,

$\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ sont deux vecteurs clairement non colinéaires.

$\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est une famille libre et génératrice de E_1. C'est donc une base de E_1 et $\dim(E_1) = 2$.

d) $0 \in Sp(A)$, cela suffit pour dire que A n'est pas inversible.

Par ailleurs, la somme des dimensions des sous-espaces propres associés aux valeurs propres de A vaut 3.
Or, A est de taille 3.

Ainsi, A est diagonalisable.

Prénom (s) LOUISE

18.04 / 20

Ecricome Épreuve : mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 3 / 11

Numéro de table 20

Partie II :

4)

a) $M = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$

Si $\underline{M \in G}$, alors $\underline{M^2 = M}$

$\iff \begin{pmatrix} a^2+2b^2 & 2ab+b^2 & 2ab+b^2 \\ 2ab+b^2 & a^2+2b^2 & 2ab+b^2 \\ 2ab+b^2 & 2ab+b^2 & a^2+2b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$

$\iff \begin{cases} \underline{a^2+2b^2 = a} \\ \underline{2ab+b^2 = b} \end{cases} \iff \begin{cases} a^2+2b^2 = a \\ 2ab+b^2-b = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} a^2+2b^2 = a \\ b(b+2a-1) = 0 \end{cases}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.04 / 20

conclusion : on a bien :

$$M \in G \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 2b^2 = a \\ b(b + 2a - 1) = 0 \end{cases}$$

b)

et ~~$I_3 \in F$ car $I_3 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ avec $a = 1$ et $b = 0$~~

~~$F \cap G$~~

~~$A \in F \cap G$ (cf 3a)~~

~~$O_3 \in F \cap G$ (cf. 1 /2)~~.

~~$(I_3 - A) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$~~

5) Soit $B = I_3 - A$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

D'après 3a) et 4b), on sait que :
$A \in F \cap G$ et $B \in F \cap G$.

Ainsi, on sait que $A \in F$ et $B \in F$
Il reste seulement à montrer que la famille (A, B) est libre.

Soit $(\alpha ; \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\alpha A + \beta B = 0$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2\alpha & -\alpha & -\alpha \\ -\alpha & 2\alpha & -\alpha \\ -\alpha & -\alpha & 2\alpha \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \beta & \beta & \beta \\ \beta & \beta & \beta \\ \beta & \beta & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}\alpha + \frac{1}{3}\beta = 0 \\ -\frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{3}\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta = 0 \\ -\alpha + \beta = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + \alpha = 0 \\ \alpha = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

Ainsi, la famille (A, B) est bien libre composée de deux éléments et $\dim(F) = 2$
C'est donc une base de F.

6)

a) $M = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$

$$\alpha A + \beta B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2\alpha & -\alpha & -\alpha \\ -\alpha & 2\alpha & -\alpha \\ -\alpha & -\alpha & 2\alpha \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \beta & \beta & \beta \\ \beta & \beta & \beta \\ \beta & \beta & \beta \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2\alpha+\beta & -\alpha+\beta & -\alpha+\beta \\ -\alpha+\beta & 2\alpha+\beta & -\alpha+\beta \\ -\alpha+\beta & -\alpha+\beta & 2\alpha+\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}\alpha + \frac{1}{3}\beta = a \\ -\frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{3}\beta = b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3} \times \frac{4a-b}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{a+2b}{3} = a \\ -\frac{1}{3} \times \frac{4a-b}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{a+2b}{3} = b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{8a-2b+a+2b}{9} = a \\ \frac{-4a+b+a+2b}{9} = b \end{cases}$$

18.04 / 20

Prénom (s) L O U I S E

Écricome Épreuve : mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 4 / 11

Numéro de table 20

$\Leftrightarrow \left\{ \frac{9a}{9} = a \right.$ $\Leftrightarrow \left\{ a = a \right.$

18.04 / 20

b)

AB

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$BA = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

On a $\underline{AB = BA}$

<u>A et B commutent.</u>

c) Raisonnons par récurrence.

Posons $\forall n \in \mathbb{N}$, $\underline{P(n) : \text{"} M^n = \alpha^n A + \beta^n B \text{"}}$

Initialisation : $n = 0$

$M^0 = I_3$

$\alpha^0 A + \beta^0 B = A + B = A + I_3 - A = I_3$

<u>$P(0)$ est vraie</u>

Hérédité : $n \mapsto n+1$

Supposons que pour un certain entier n fixé on a $M^n = \alpha^n A + \beta^n B$, soit $P(n)$

Montrons que $P(n+1)$ est vraie aussi.

$M^n = \alpha^n A + \beta^n B$

$M^n M = (\alpha^n A + \beta^n B) M$

$M^{n+1} = (\alpha^n A + \beta^n B)(\alpha A + \beta B)$ (cf 6.a)

$= \alpha^{n+1} A^2 + \alpha^n \beta AB + \beta^n \alpha BA + \beta^{n+1} B^2$

Or, $A \in fMG \Leftrightarrow A^2 = A$ et $B \in fMG \Leftrightarrow B^2 = B$
et $AB = BA$

$= \alpha^{n+1} A^2 + AB(\alpha^n \beta + \alpha \beta^n)$

$M^{n+1} = \alpha^{n+1} A + A(I_3 - A)(\alpha^n \beta + \alpha \beta^n) + \beta^{n+1} B$

$= \alpha^{n+1} A + (A - A^2)(\alpha^n \beta + \alpha \beta^n) + \beta^{n+1} B$

$= \alpha^{n+1} A + \beta^{n+1} B$

car $A^2 = A \Leftrightarrow A^2 - A = 0$

<u>$P(n+1)$ est vraie</u> .

conclusion : on a bien, <u>pour tout entier n naturel</u>

<u>$M^n = \alpha^n A + \beta^n B$</u> .

7)

a) D'après 6a), $M = \alpha A + \beta B$

Ainsi, $M \neq O_3$ si $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$

conclusion : M est inversible si et seulement si $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$

b) Raisonnons par récurrence :

Posons, $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$: " $M^{-n} = \alpha^{-n} A + \beta^{-n} B$ "

Initialisation : $n = 0$

$M^0 = I_3$

$\alpha^0 A + \beta^0 B = A + B = A + I_3 - A = I_3$

$P(0)$ est vraie

Prénom (s) Louise

18.04 / 20

Ecricome Épreuve : mathématiques

Sujet 1 ou 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 5 / 11

Numéro de table 20

Hérédité : $n \mapsto n+1$.

Supposons que pour un certain entier n fixé, on a $P(n)$ qui est vraie.

Montrons que $P(n+1)$ est vraie aussi

$\Pi^{-n} = \alpha^{-n} A + \beta^{-n} B$.

$\Pi^{-n}\Pi^{-1} = (\alpha^{-n} A + \beta^{-n} B)\Pi^{-1}$ $\quad$ Π inversible si $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$ (cf. 7a)

$\Pi^{-n-1} = \alpha^{-n} A\Pi^{-1} + \beta^{-n} B\Pi^{-1}$

$= \alpha^{-n}A(\alpha^{-1}A + \beta^{-1}B) + \beta^{-n}B(\alpha^{-1}A + \beta^{-1}B)$

$= \alpha^{-n-1}A^2 + \alpha^{-n}\beta^{-1}AB + \beta^{-n}\alpha^{-1}BA + \beta^{-n-1}B^2$

Or, $A \in F \cap G \Leftrightarrow A^2 = A$ et $B \in F\cap G \Leftrightarrow B^2 = B$ et $AB = BA$

$= \alpha^{-n-1} A + AB(\alpha^{-n}\beta^{-1} + \beta^{-n}\alpha^{-1}) + \beta^{-n-1} B$

Or, $AB = A(I_3 - A) = A - A^2 = 0$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.04 / 20

$$M^{-n-1} = \alpha^{-n-1} A + \beta^{-n-1} B$$

$$M^{-(n+1)} = \alpha^{-(n+1)} A + \beta^{-(n+1)} B$$

On a bien $P(n+1)$ qui est vraie

conclusion :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $M^{-n} = \alpha^{-n} A + \beta^{-n} B$ avec $(\alpha ; \beta) \in \mathbb{R}^*$

Partie III :

8) $$I_3 - T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

~~en particulier avec~~ $\cancel{M = I_3 - T}$

$\cancel{(I_3 - T) = \frac{4a - b}{3} A + \frac{a + 2b}{3} B}$ ~~avec~~ $\cancel{a = -2}$

~~et~~ $\cancel{b = -1}$

$\cancel{(I_3 - T) = \frac{4 \times (-2) - (-1)}{3} A + \frac{-2 + 2 \times (-1)}{3} B}$

$\cancel{= \frac{-7}{3} A + \frac{-4}{3} B}$

Or, $(I_3 - T) = \alpha A + \beta B$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2\alpha & -\alpha & -\alpha \\ -\alpha & 2\alpha & -\alpha \\ -\alpha & -\alpha & 2\alpha \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \beta & \beta & \beta \\ \beta & \beta & \beta \\ \beta & \beta & \beta \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} -2 = \frac{2}{3}\alpha + \frac{1}{3}\beta \\ -1 = -\frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{3}\beta \end{cases} \iff \begin{cases} -6 = 2\alpha + \beta \\ -3 = -\alpha + \beta \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -6 = 2\alpha - 3 + \alpha \\ \beta = -3 + \alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} -3 = 3\alpha \\ \beta = -3 + \alpha \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = -4 \end{cases}$$

On a donc $I_3 - T = -A - 4B$

9) D'après 7 b), pour $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$, on a $M^{-n} = \alpha^{-n} A + \beta^{-n} B$, $\forall n \in \mathbb{N}$

En particulier, pour $M = I_3 - T$

Ainsi, $\underline{(I_3 - T)^{-1}} = -1^{-1} A + (-4)^{-1} B$

$$= -\frac{1}{4} A - \frac{1}{4} B$$

$$= -\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(I_3 - T)^{-1} = \underline{-\frac{1}{4} I_3}.$$

10) Soit $L = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ telle que

$\underline{L = TL + Y}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Prénom (s) LOUISE

18.04 / 20

ecricome Épreuve : mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 6 / 11

Numéro de table 20

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + y + z \\ x + 3y + z \\ x + y + 3z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + y + z + 1 \\ x + 3y + z - 1 \\ x + y + 3z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y + z + 1 = x \\ x + 3y + z - 1 = y \\ x + y + 3z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + z + 1 = 0 \\ x + 2y + z - 1 = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2y - 4z + y + z + 1 = 0 \\ -y - 2z + 2y + z - 1 = 0 \\ x = -y - 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -y - 3z + 1 = 0 \\ y - z - 1 = 0 \\ x = -y - 2z. \end{cases}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.04 / 20

$$\iff \begin{cases} -1-z+3z+1=0 \\ y=1+z \\ x=-y-z \end{cases} \iff \begin{cases} 2z=0 \\ y=1+z \\ x=-y-z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z=0 \\ y=1 \\ x=-1 \end{cases}$$

Ainsi, $\underline{L = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$

11) $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $X_{n+1} = TX_n + Y$

$\iff X_{n+1} - L = TX_n + Y - L$

Or, $L = TL + Y$ (cf. 10)

$\iff X_{n+1} - L = TX_n + Y - TL - Y$

$\iff X_{n+1} - L = TX_n - TL$

$\iff X_{n+1} - L = T(X_n - L)$

Raisonnons par récurrence :
Posons :
$\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$: " $X_n - L = T^n(X_0 - L)$ "

Initialisation : $n = 0$

$$X_0 - L = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T^0(X_0 - L) = I_3(X_0 - L) = X_0 - L = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$P(0)$ est vraie.

Hérédité : $n \Rightarrow n+1$:

Supposons que pour un certain entier n fixé on a $P(n)$ qui est vraie
Montrons que $P(n+1)$ est vraie aussi.

$$X_{n+1} - L = T(X_n - L)$$
$$\Leftrightarrow X_{n+1} - L = T(T^n(X_0 - L))$$
$$\Leftrightarrow X_{n+1} - L = T^{n+1}(X_0 - L)$$

<u>$P(n+1)$ est vraie</u>

conclusion : <u>$\forall n \in \mathbb{N}$, on a bien $X_n - L = T^n(X_0 - L)$</u>

12) $X_n - L = T^n (X_0 - L)$

$\Leftrightarrow X_n = T^n (X_0 - L) + L$

$\Leftrightarrow X_n = (A + 4B + I_3)^n (X_0 - L) + L$ car

$I_3 - T = -A - 4B$

$\Leftrightarrow T = A + 4B + I_3$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\underline{X_n = (A + 4B + I_3)^n (X_0 - L) + L}$

Prénom (s) LOUISE

18.04 / 20

Ecricome Épreuve : mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 7 / 11

Numéro de table 20

Exercice 2 :

Partie I :

$g(x) = \exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right)$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \left(2 - \frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x \to 0^+} -\frac{1}{x} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$

Par produit, $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x) = +\infty$

Par composition, $\lim \exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right) = +\infty$

conclusion : $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = +\infty$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.04 / 20

$g(x) = \exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right) \ln(x)\right)$

$\lim_{x \to +\infty} \left(2 - \frac{1}{x}\right) = 2$ car $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$

$\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = 0^+$

Par produit, $\lim_{x \to +\infty} \left(2 - \frac{1}{x}\right) \ln(x) = 0^+$

Par composition, $\lim_{x \to +\infty} \exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right) \ln(x)\right) = 1$

conclusion: $\underline{\lim_{x \to +\infty} g(x) = 1}$

2) a) h est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ car somme de fonctions usuelles dérivables avec $x > 0$

$h'(x) = \frac{1}{x} + 2 = \frac{1 + 2x}{x}$

du signe de $1+2x$ car $x > 0$

$1+2x \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad 2x \geq -1$

$\Leftrightarrow \quad x \geq -\frac{1}{2}$

x	0		α		$+\infty$
$h'(x)$	||		$+$		
h	|| $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = -\infty$ car $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} 2x = +\infty$

conclusion : sur $\mathbb{R}^+_*$, h est bien strictement croissante.

b) Sur $\mathbb{R}^*_+$,

h est continue (car dérivable)
h est strictement croissante
h réalise donc une bijection de $\mathbb{R}^*_+$ vers $h(\mathbb{R}^*_+)$
Or, $h(\mathbb{R}^+_*) = \mathbb{R}$.

Ainsi, 0 admet un unique antécédent sur $\mathbb{R}^*_+$.
Conclusion : l'équation $h(x) = 0$ admet une seule solution sur $\mathbb{R}^*_+$

$h(\alpha) = 0$

$h(1) = \ln(1) + 2 - 1 = 1$

$h(\frac{1}{2}) = \ln(\frac{1}{2}) + 2 \times \frac{1}{2} - 1$

$h(\frac{1}{2}) = -\ln(2) + 1 - 1$

$h(\frac{1}{2}) \approx \quad -0,69$

On a donc $\underline{h(\frac{1}{2}) < h(\alpha) < h(1)}$

$\Rightarrow \underline{\frac{1}{2} < \alpha < 1}$

par stricte croissance de h sur $\mathbb{R}_*^+$

c) g dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car composée/produit de fonctions usuelles dérivables avec $x > 0$

$$g'(x) = \left(\frac{1}{x^2}\ln(x) + \left(2 - \frac{1}{x}\right)\frac{1}{x}\right)\exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right)$$

$$= \left(\frac{\ln(x)}{x^2} + \frac{2x-1}{x^2}\right) g(x)$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(\ln(x) + 2x - 1\right) g(x)$$

$$\underline{g'(x) = \frac{1}{x^2}\, h(x)\, g(x)}$$

Prénom (s) L O U I S E

18.04 / 20

Écricome Épreuve : mathématiques

Sujet 1 ou 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 8 / 11

Numéro de table 20

d) $g'(x)$ est du signe de $h(x)$ car

$g(x) > 0$ car la fonction exponentielle est positive sur $\mathbb{R}$.

et $\frac{1}{x^2} > 0$.

Or, $h(\alpha) = 0$

x	0	α	$+\infty$
$g'(x)$	||	0	
g	||		

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.04 / 20

3) $g(x) - x^2 = \exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right) - x^2$

Partie II :

4) Posons, $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$: " U_n existe et $U_n > 0$ "

Initialisation : $n = 0$

U_0 existe et $U_0 > 0$ (cf. l'énoncé)

$P(0)$ est vraie

Hérédité : $n \mapsto n+1$

Supposons que pour un certain entier n fixé $P(n)$ est vraie.

Montrons que $P(n+1)$ est vraie aussi

u_n existe et $u_n > 0$, ainsi, on peut dire que $\frac{1}{u_n}$ et $\ln(u_n)$ existent également.

Ainsi, $\exp\left(\left(2 - \frac{1}{u_n}\right)\ln(u_n)\right)$ existe
$\Leftrightarrow$ u_{n+1} existe.

Par ailleurs, $u_{n+1} > 0$ car la fonction exponentielle est toujours positive.

Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N}$, on a :
u_n qui existe et $u_n > 0$

5)

```
function y=suite(u)
u = u0
for k = 1:n
    u = exp((2 - 1/u) * log(u))
end
endfunction
```

6)

~~a) On pose~~ $\cancel{\varphi(x) = (x-1)\ln(x)}$

$\cancel{\varphi}$ ~~dérivable sur~~ $\cancel{\mathbb{R}_+^*}$ ~~car produit de fonctions usuelles dérivables avec~~ $\cancel{x>0}$

$$\cancel{\varphi'(x) = 1 \times \ln(x) + (x-1) \times \frac{1}{x}}$$
$$\cancel{= \ln(x) + \frac{x-1}{x}}$$

a) $\forall x > 0,$

$x - 1 \geqslant 0 \qquad \ln(x) \geqslant 0$

$\Leftrightarrow x \geqslant 1 \qquad \Leftrightarrow x \geqslant 1$

Ainsi, $\forall x > 0, \ (x-1)\ln(x) \geqslant 0$

car sur $]0;1[$, $(x-1) < 0$ et $\ln(x) < 0$.

donc par produit, sur $]0;1[$, $(x-1)\ln(x) > 0$

b)

Prénom (s) LOUISE

18.04 / 20

ecricome Épreuve : mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 9 / 11

Numéro de table 20

c) D'après ce qui précède,

$\forall x > 0$, $\frac{g(x)}{x} \geq 1$

$\Rightarrow g(x) \geq x$

$g(x) = x$

$\exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right) = x$

$\Rightarrow \left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x) = \ln(x)$ car $x > 0$

$= 2\ln$

7) D'après l'énoncé, $g(u_n) = u_{n+1}$

et d'après 6 c) $g(x) \geq x$ $\forall x > 0$

Et cela, en particulier pour $x = u_n$ car $u_n > 0$ (cf. 4)

Ainsi, $g(u_n) \geq u_n$

$\Rightarrow u_{n+1} \geq u_n$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.04 / 20

$\Rightarrow \underline{u_{n+1} - u_n \geq 0}$

$(u_n)_{n \geq 0}$ est une suite croissante

8)

a)

b) D'après 7) et 8a). $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 1.

D'après le théorème de la limite monotone $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $l \leq 1$.

Par ailleurs, d'après le théorème du point fixe, $g(l) = l$ (car g continue)

$\Rightarrow \underline{l = 1}$ (cf 6c)

Conclusion : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

9)

a)

b) D'après ce qui précède, $u_n > 1$.
Or, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante (cf. 7)
et elle n'est pas majorée.
Ainsi, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

10)

Partie III :

11) f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ car produit / composée de fonctions usuelles de classe C^2 avec $x > 0$

12) $\partial_1(f)(x;y) = \frac{1}{x^2}\ln(x) + \left(y - \frac{1}{x}\right) \times \frac{1}{x} \exp\left(\left(y - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right)$

$$= \frac{\ln(x)}{x^2} + \frac{xy-1}{x^2} f(x;y)$$

$$= \frac{\ln(x) + xy - 1}{x^2} f(x;y)$$

$\partial_2(f)(x;y) = \left(1 \times \ln(x) - 0\right)\exp\left(\left(\cancel{y} - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right)$

$$= \ln(x)\, f(x;y)$$

conclusion : $\forall (x;y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$,

$$\partial_1(f)(x;y) = \frac{\ln(x) + xy - 1}{x^2} f(x;y)$$

$$\partial_2(f)(x;y) = \ln(x)\, f(x;y)$$

Prénom (s) LOUISE

18.04 / 20

ecricome Épreuve : mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 10 / 11

Numéro de table 20

13) f admet un point critique lorsque que le gradient s'annule.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \partial_1(f)(x;y) = 0 \\ \partial_2(f)(x;y) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\ln(x) + xy - 1}{x^2} f(x;y) = 0 \\ \ln(x)\, f(x;y) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\ln(x) + xy - 1)\, x^2 f(x;y) = 0 \quad \text{car } x > 0 \\ \ln(x)\, f(x;y) = 0 \end{cases}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.04 / 20

15) Cherchons les valeurs propres de la matrice hessienne de f au point a.

Soit $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$

On résout : $(2-\lambda)(-\lambda) - 1 \times 1 = 0$

$\Leftrightarrow -2\lambda + \lambda^2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow$

Exercice 3 :

1)

a) X_n, Y_n et Z_n sont la répétition identique d'une expérience qui est le tirage d'un jeton parmi une infinité et sont placement dans une des trois urnes.

Ainsi, $X_n(\Omega) = [\![1 ; n]\!] = Y_n(\Omega) = Z_n(\Omega)$

$X_n \hookrightarrow B(n ; \frac{1}{3})$ car on prend un jeton que l'on place dans une des trois urnes.
Il en est de même pour Y_n et Z_n (c'est seulement l'urne qui change)

b) $P(X_n = 0)$

Or, $X_n \hookrightarrow B\left(n\,;\,\frac{1}{3}\right)$

$$P(X_n = 0) = \binom{n}{0}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$P(X_n = n) = \binom{n}{n}\left(\frac{1}{3}\right)^n\left(\frac{2}{3}\right)^0$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

c) L'événement $(Y_n = 0) \cap (Z_n = 0)$ signifit que l'urne 2 et l'urne 3 ne contiennent aucun jeton après avoir réparti les n premiers jetons.

Cela signifit que les n premiers jetons sont tous dans l'urne 1.

Soit $(Y_n = 0) \cap (Z_n = 0) = (X_n = n)$.

d) $((X_n = 0)(Y_n = 0)(Z_n = 0))$ forment un système complet d'événements

d'après la formule des probabilités totales:

$$P(V_n) = P(X_n = 0)P_{(X_n = 0)}(V_n) + P(Y_n = 0)P_{(Y_n = 0)}(V_n) + P(Z_n = 0)P_{(Z_n = 0)}(V_n).$$

Prénom (s) LOUISE

18.04 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 11 / 11

Numéro de table 20

6)

T admet une espérance si et seulement si $\sum_{n \in T(\Omega)} n P(T=n)$ converge absolument.

13) On admet que $E(X_n W_n) = n\left(\frac{2}{3}\right)^n$

$$\mathrm{Cov}(X_n W_n) = E(X_n W_n) - E(X_n)E(W_n)$$
$$= n\left(\frac{2}{3}\right)^n - n\frac{1}{3}E(W_n)$$

car $X_n \hookrightarrow B(n; \frac{1}{3})$.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.04 / 20