Partie I

Section A :

Q1. On a : $\mathrm{card}(\mathcal{B}(e, n+1)) = n+1$ et $\dim(E) = n$

Donc : $\mathcal{B}(e, n+1)$ est liée

Q2. Toute sur famille d'une famille liée est liée
Donc :

$\forall k \geqslant n+1$, $\mathcal{B}(e,k)$ est liée

Donc : $d(e) = \max\{k \in [\![0, n]\!] \,;\, \mathcal{B}(e,k) \text{ est libre}\}$

Puisque $d(e)$ est le maximum d'un ensemble fini de nombre dénombrable, on a :

$d(e)$ existe

Q3. Par définition : $\forall k > d(e)$, $\mathcal{B}(e,k)$ est liée $(*)$
En particulier : $\mathcal{B}(e, d(e)+1)$ est liée
Mais $\mathcal{B}(e, d(e))$ libre donc : $u^{d(e)}(e) \in \mathrm{Vect}(e, \dots, u^{d(e)-1}(e))$
Donc :

$$\exists (a_0, \dots, a_{d(e)-1}) \in \mathbb{K}^{d(e)} \,/\, u^{d(e)}(e) = \sum_{i=0}^{d(e)-1} a_i u^i(e)$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

~~Soit $k \geq d(e)$~~

~~Supposons que $u^k(e) \in Vect(e, \dots, u^{d(e)-1}(e))$~~

Soit $k \geq d(e)$ Avec $(*)$, on a : $\forall i \in [\![d(e)+1, k+1]\!]$ $\mathcal{B}(e, i)$ est liée

Donc, d'un raisonnement analogue au précédent, on a :

$$\forall i \in [\![d(e), k]\!] \quad , u^i(e) \in Vect(e, \dots, u^{d(e)-1}(e))$$

Donc :

$$\forall k \geq d(e), u^k(e) \in Vect(e, \dots, u^{d(e)-1}(e))$$

Ainsi : $\forall i \geq d(e)$, $\mathcal{B}(e, d(e)+1)$ est liée

Donc : $\mathcal{B}(e, d(e))$ est la plus grande famille libre de $\{\mathcal{B}(e,k) ; k \in \mathbb{N}^*\}$

Or : $E_u(e) = Vect(\mathcal{B}(e, d(e)))$

Donc :

$\mathcal{B}(e, d(e))$ est une base de $E_u(e)$

Q4. Soit $x \in E_u(e)$

Alors :

$$\exists (a_0, \dots, a_{d(e)-1}) \in \mathbb{K}^{d(e)} \;/\; x = \sum_{i=0}^{d(e)-1} a_i u^i(e)$$

$$\text{d'où : } u(x) = \sum_{i=0}^{d(e)-1} a_i u^{i+1}(e)$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{d(e)-1} a_{i-1} u^i(e)}_{\in E_u(e)} + \underbrace{a_{d(e)-1} u^{d(e)}(e)}_{\in E_u(e)}$$

D'où : $u(x) \in E_u(e)$ et ce quelque soit $x \in E_u(e)$

Donc : $E_u(e)$ stable par u

Soit F un sous-espace vectoriel de E tel que :

$$e \in F \quad \text{et} \quad \forall x \in F, \ u(x) \in F$$

Soit $x \in E_u(e)$

Alors : $\exists (a_0, \dots, a_{d(e)-1}) \in \mathbb{K}^{d(e)} \ / \ x = \sum_{i=0}^{d(e)-1} a_i u^i(e)$

Or : $e \in F$ donc $u(e) \in F$ donc $u^2(e) \in F$ etc.

D'où : $\forall i \in [\![0, d(e)-1]\!], u^i(e) \in F$

Donc, puisque $x \in \mathrm{Vect}(e, \dots, u^{d(e)-1}(e))$, on a : $x \in F$

D'où :

$$E_u(e) \subset F$$

Q5. On a :

$d(e) = 1 \Leftrightarrow \mathcal{B}(e, 1)$ est libre et : $\forall k \geq 2, \mathcal{B}(e, k)$ est liée

$\Leftrightarrow \mathcal{B}(e, 1)$ est libre et : $\forall k \geq 2, \mathcal{B}(e, k)$ est liée et : $\exists \lambda \in \mathbb{K} \ / \ u(e) = \lambda e$

$\Leftrightarrow d(e) = 1$ et e est vecteur propre pour u

D'où :

$$e \text{ est vecteur pour } u \Leftrightarrow d(e) = 1$$

Q6. On a :

u est une homothétie $\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K} \ / \ \forall e \in E \setminus \{0\}, u(e) = \lambda e$

$\Leftrightarrow$ pour tout vecteur $e \in E \setminus \{0\}$, e est vecteur propre pour u

D'où, d'après Q5., on a :

$$u \text{ est une homothétie} \Leftrightarrow \forall e \in E \setminus \{0\}, \ d(e) = 1$$

Q7. On a :

u est un endomorphisme cyclique $\Leftrightarrow \exists e \in E \setminus \{0\} / E = E_u(e)$
$\Leftrightarrow \exists e \in E \setminus \{0\} / \mathcal{B}(e, n)$ est libre
$\dim(E) = n$

Or : $\forall k \geqslant n+1$, $\mathcal{B}(e, k)$ est liée

D'où : $\mathcal{B}(e, n)$ est libre $\Leftrightarrow d(e) = n$

Donc :

u est un endomorphisme cyclique $\Leftrightarrow d(e) = n$

Section B :

Q8. On a :

- $\forall i \in [\![0, n-2]\!]$, $u(u^i(e)) = u^{i+1}(e)$
- $u(u^{n-1}(e)) = u^n(e)$

D'où : $\exists (a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n / u^n(e) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(e)$ d'après Q3.

Donc :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Donc :

A est une matrice de Frobenius

Q9. On a :

$$(P_A(u))(e) = u^n(e) - \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(e)}_{= u^n(e) \text{ d'après A}}$$

Donc : $(P_A(u))(e) = 0$

On a : $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $(P_A(u))(u^k(e)) = \underbrace{u^{n+k}(e)}_{= u^k(u^n(e))} - \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} a_i u^{i+k}(e)}_{= u^k\left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i u^i(e)\right)}$

Copie anonyme - n°anonymat : 551293

Emplacement QR Code	Code épreuve : 282	Nombre de pages : 20	Session : 2022
	Épreuve de : Mathématiques S ESSEC/HEC		

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Donc : $\forall k \in [\![1, n-1]\!], (P_A(u))(u^k(e)) = u^k(\underbrace{u^n(e) - u^n(e)}_{=0})$

D'où : $\forall k \in [\![1, n-1]\!], (P_A(u))(u^k(e)) = 0$

Donc : $\forall k \in [\![0, n-1]\!], (P_A(u))(u^k(e)) = 0$

Or $(e, \ldots, u^{n-1}(e))$ est génératrice de E car $E = E_u(e)$

Donc : $\forall x \in E, (P_A(u))(x) = 0$

Donc : $P_A(u)$ est l'endomorphisme nul de E

D'où :

P_A est annulateur de u

Q10. ~~Soit $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tels que~~

$$\cancel{\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k u^k = 0_{\mathcal{L}(E)}}$$

~~D'après la matrice A, puisque ses $n-1$ premières colonne~~

Soit $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tels que
$\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k u^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$ d'où : $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k u^k(e) = 0$

Or : $(e, \ldots, u^{n-1}(e))$ est libre donc : $\lambda_0 = \ldots = \lambda_{n-1}$

Donc :

$(id_E, \ldots, u^{n-1})$ est libre dans $\mathcal{L}(E)$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Q11. Supposons $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que : $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$

Alors : $\exists (\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tels que :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k u^k = 0_{\mathcal{L}(E)} \quad \text{avec} \quad P = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k X^k$$

Or, $(e, \dots, u^{n-1})$ est libre donc : $\lambda_0 = \dots = \lambda_{n-1} = 0$

Donc : P est le polynôme nul et ce quelque soit $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$

Donc : il n'existe aucun polynôme annulateur non nul de u de degré inférieur ou égal à $n-1$

Donc :

P_A est un polynôme annulateur non nul de degré minimal de u

Q12. On sait déjà :

$\lambda \in sp(u)$ alors λ une racine de P_A car P_A annulateur de u

Supposons désormais que $P_A(\lambda) = 0$

Alors : $\exists Q \in \mathbb{K}_{n-1}[X] \,/\, P_A = (X - \lambda) Q$

D'où : $P_A(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$

donc : $(u - \lambda id_E) \circ Q(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$

Si $Ker(u - \lambda id_E) = \{0_E\}$ alors : $Q(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$

Donc Q est annulateur de u, ce qui est absurde puisque $deg(Q) \leqslant n-1$

Donc : $Ker(u - \lambda id_E) \neq \{0_E\}$ donc $\lambda \in sp(u)$

D'où :

$\lambda \in sp(u) \Leftrightarrow P_A(\lambda) = 0$

Q13. On en déduit :

u diagonalisable $\iff$ P_A admet n racines simples distinctes

Section C :

Q14. F étant symétrique, le théorème spectrale nous donne :

F est diagonalisable

Donc : f est diagonalisable

Q15.

Section D :

Q20. • Supposons que P admet une racine complexe de multiplicité strictement supérieur à 1

Donc :

$\exists Q \in \mathbb{C}[X], \exists z \in \mathbb{C} \,/\, P = (X-z)^{r} Q$ avec $r > 1$

D'où : $\exists T \in \mathbb{C}[X] \,/\, P' = (X-z)^{r-1} T$

Ainsi : $(X-z)^{r-1}$ est bien un pgcd de P et P' et $\deg((X-z)^{r-1}) \geq 1$ car $r-1 \geq 1$

• Supposons Δ un pgcd de P et P' et $\deg(\Delta) \geq 1$

On a : $\exists (Q,R) \in (\mathbb{C}[X])^2 \,/\, P = \Delta Q$ et $P' = \Delta R$

Δ étant un polynôme à coefficient complexe, il admet au moins une racine complexe (car $\deg(\Delta) \geq 1$)

Donc :

$$\exists z \in \mathbb{C}[X], \exists T \in \mathbb{C}[X] \ / \ \Delta = (X-z)T$$

D'où :

$$P = (X-z)TQ \quad \text{et} \quad P' = (X-z)TR$$

Or z est racine complexe de P' de multiplicité au moins 1 (car il peut aussi être racine de TR)
Donc il est racine de multiplicité au moins 2
c'est-à-dire strictement supérieur à 1

Donc :

P admet une racine complexe de multiplicité strictement supérieur à 1 ⇔ un pgcd de P et P' est degré supérieur ou égal à 1

Q21.

```
function b = racSimp(c)
    p = poly(c,'x','c')
    d = bezout(p, derivat(p))
    b = (degree(d) < 1)
endfunction
```

D'après Q13., on en déduit que cette fonction nous indique qu'une matrice de Frobenius est diagonalisable lorsque racSimp(c) avec c le vecteur ligne des coefficients du polynôme caractéristique de cette matrice de Frobenius nous renvoie 'T' et ne l'est pas lorsque racSimp(c) renvoie 'F'

Copie anonyme - n°anonymat : 551293

Code épreuve : 282	Nombre de pages : 20	Session : 2022
Épreuve de : Mathématiques S ESSEC / HEC		

Emplacement QR Code

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Q22. Si on a :

$$\exists (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} / P(x_k)P(x_{k+1}) < 0$$
$$x_1 < \dots < x_{n+1}$$

Alors on a un changement de signe entre x_k et x_{k+1} pour $k \in [\![1, n]\!]$

Or : $x \mapsto P(x)$ étant continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, elle est continue sur $[x_k, x_{k+1}]$ pour $k \in [\![1, n]\!]$

Or : $0 \in [\min(P(x_k), P(x_{k+1})), \max(P(x_k), P(x_{k+1}))]$ car $P(x_k)$ et $P(x_{k+1})$ de signes strictement opposés pour $k \in [\![1, n]\!]$

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on a :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \exists \lambda_k \in [x_k, x_{k+1}] / P(\lambda_k) = 0$$

Puisque $x_1 < \dots < x_{n+1}$, on a a fortiori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ distincts

Donc :

$$\underline{P \text{ admet } n \text{ racines distinctes}}$$

Q23. Soit $z \in \mathbb{R}$ et $P = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ (avec $a_0, \dots, a_{n-1}$ n réels) tels que $P(z) = 0$

Supposons $|z| > 1$

Alors, puisque $z^n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k$ et $z \neq 0$ ($|z| > 1$), on a : $z = \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^{k-(n-1)}$

Donc : $|z| = \left|\sum_{k=0}^{n-1} a_k z^{k-(n-1)}\right|$

$$\leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \left|\frac{z^k}{z^{n-1}}\right| \quad \text{(inégalité triangulaire)}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Or : $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\frac{1}{|z^{n-1-k}|} \leqslant 1$ car $\begin{cases} |z| > 1 \\ n-1 \geqslant k \end{cases}$

Donc : $|z| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|$

Donc :

$$|z| \leqslant \begin{cases} \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| & \text{si } |z| > 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc : $|z| \leqslant \max\left(1, \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\right)$

Q2a.

```
function val = racSimpApprox (c, pas)
    m = max([1, sum(abs(c))])
    p = poly([zeros(1,n-1), 1] - [c, 0],
             'x', 'c')

    y = 0
    k = 0
    while -m - pas/2 + k*pas < m + pas/2
        k = k + 1
    end
    for i = 0 : k
        if horner(p, -m-pas/2+ i*pas)
              * horner(p, -m -pas/2 + (i+1)*pas)
              > = 0
           then y = y + 1
        end
    end
    val = (y == n)
    if val = 'F'
        then val = ind
    end
endfunction
```

Q25.

Afin de s'assurer que la fonction nous permette de tester si une matrice de Frobenius est diagonalisable ou non, il faut prendre un pas suffisament petit pour être le plus précis possible, auquel cas : si la fonction renvoie 'T' alors la matrice de Frobenius associée à son polynôme caractéristique est diagonalisable

Lorsque la fonction renvoie "ind", soit :

- Le polynôme n'admet pas n racines distinctes
- Soit le polynôme admet n racines distinctes mais le pas choisi n'était pas suffisament petit pour trouver les n changements de signe

Partie II

Section A :

Q26. Puisque u est diagonalisable, le théorème spectrale nous assure l'existence d'une base de E formée de vecteurs de u que l'on note $(x_1, \dots, x_n)$

Or :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \prod_{k=1}^{p} (u - \lambda_k id_E)(x_i) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{p} (u - \lambda_k id_E) \circ \overbrace{(u - \lambda_j id_E)(x_i)}^{=0}$$

avec x_i associé à la valeur propre λ_j

$= 0$

Or $(x_1, \dots, x_n)$ une base de E

Donc :

$$\prod_{k=1}^{p} (u - \lambda_k id_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

Q27. Puisque $\deg\left(\prod_{k=1}^{p}(X - \lambda_k)\right) = p$, on a prouvé qu'il existe un polynôme annulateur non-nul $P \in \mathbb{K}_p[X]$ tel que :

$$P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)} \quad \text{et} \quad P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k \quad \text{avec } (a_0, \dots, a_p) \neq (0, \dots, 0)$$

Donc : $\exists (a_0, \dots, a_p) \in \mathbb{K}^p \setminus \{(0, \dots, 0)\} \,/\, \sum_{k=0}^{p} a_k u^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$

Donc : $(id_E, \dots, u^p)$ est liée dans $\mathcal{L}(E)$

Q28. D'après Q7., on a :

Si p est cyclique alors $\exists e \in E \setminus \{0_E\} \,/\, d(e) = n$

alors $(e, \dots, u^{n-1}(e))$ est libre

alors $p \geq n$ car $(e, \dots, u^p(e))$ liée

Or $p \leq n$ donc :

Si p est cyclique alors $p = n$

Copie anonyme - n°anonymat : 551293

Q29. On a :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ u^k(e) = \sum_{i=1}^{n} u^k(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k e_i$$

Soit $(\mu_0, \dots, \mu_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tels que :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mu_k u^k(e) = 0$$

donc : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \mu_k \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k e_i = 0$

donc, d'après Fubini, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_i^k \mu_k \right) e_i = 0$$

Puisque $(e_1, \dots, e_n)$ est libre, on a :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k \lambda_i^k = 0$$

Si $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \mu_k X^k$ n'est pas le polynôme nul

Alors on a :

$$\mu_{n-1} \prod_{k=1}^{n} (X - \lambda_k) = \sum_{k=1}^{n} \mu_k X^k \quad (\lambda_1, \dots, \lambda_n \text{ les } n \text{ racines})$$

Donc a fortiori $\mu_{n-1} \neq 0$

~~Or on vient à une absurdité car d'après Q26., on a :~~

$$\cancel{\prod_{k=1}^{n} (u - \lambda_k id_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

En admettant que $\mathcal{B}(e,n)$ est libre, d'après Q27., $\mathcal{B}(e,n+1)$ est liée, et tout sur famille d'une famille liée est liée, donc $d(e) = n$

Donc, d'après Q7., on a :

u est cyclique

Section B :

Q31. Soit $e \in E$ tel que $u^{r-1}(e) \neq 0_E$

Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_{r-1}) \in \mathbb{K}^r$ tels que :

$$\sum_{k=0}^{r-1} \lambda_k u^k(e) = 0_E$$

Alors :

$\forall i \in [\![0, r-1]\!], u^i\left(\sum_{k=0}^{r-1} \lambda_k u^k(e)\right) = 0_E$

donc : $\sum_{k=0}^{r-1} \lambda_k u^{k+i}(e) = 0_E$

Donc : Pour $i = r-1$, il nous reste : $\lambda_0 \underbrace{u^{r-1}(e)}_{\neq 0_E} = 0_E$ car u nilpotent d'indice r

donc $\lambda_0 = 0$

De manière analogue, en composant par u^i il vient : $\lambda_0 = \dots = \lambda_{r-1} = 0$

Donc :

$(e, \dots, u^{r-1}(e))$ est libre dans E

Q32. Toute famille de $n+1$ vecteurs ou plus est liée dans E (car $\dim(E) = n$) donc :

$r \leqslant n$

On a :

$$x = n \Leftrightarrow (e, u(e), \dots, u^{n-1}(e)) \text{ libre dans } E$$
$$\Leftrightarrow \exists e \in E \,/\, \mathcal{B}(e,n) \text{ est libre}$$
$$\Leftrightarrow d(e) = n$$

Donc, d'après Q7., on a :

$$\underline{x = n \Leftrightarrow u \text{ est cyclique}}$$

Pour $x = n$, on a donc :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}(e,n)}(u) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & (0) & \vdots & \vdots \\ \vdots & (0) & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{car } u^n(e) = 0_E$$

Section C :

~~Q33. $(X^k)_{k\in[\![0,n-1]\!]}$ une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a donc $(x \mapsto x^k)_{k\in[\![0,n-1]\!]}$ une base de E~~

~~Or, par tout $x \in \mathbb{R}$, on a :~~

~~$\forall k \in [\![0,n-1]\!], \forall A \in \mathbb{R}_+, \int_0^A (x+t)^k e^{-t}\,dt = \int_x^{A+x} u^k e^{-u} e^{x}\,du$ (changement affine $u = x+t$)~~

~~d'où : $\left|\int_0^A (x+t)^k e^{-t}\,dt\right| = \left|\int_x^{A+x} \underbrace{u^k e^{-u} e^{x}}_{\geq 0}\,du\right| = \int_x^{A+x} u^k e^{-u} e^{x}\,du$~~

On a :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \forall x \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathbb{R}_+, \int_0^A (x+t)^k e^{-t}\,dt = \int_0^A \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} x^{k-i} t^i e^{-t}\,dt$$

$$\underset{\text{linéarité de l'intégrale}}{=} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} x^{k-i} \underbrace{\int_0^A t^i e^{-t}\,dt}_{\xrightarrow[A\to+\infty]{} \Gamma(i+1) = i!}$$

D'où : $\forall k \in [\![0, n-1]\!], \forall x \in \mathbb{R}, \int_0^{+\infty} (x+t)^k e^{-t}\,dt$ converge et :

$$\int_0^{+\infty} (x+t)^k e^{-t}\,dt = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} i!\, x^{k-i} \in E \quad (\text{car } \forall i \in [\![0,k]\!], k-i \leq k \text{ donc } i \leq n-1)$$

Or, puisque $(X^k)_{k\in [\![0,n-1]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, ce qui est vrai pour X^k avec $k\in[\![0,n-1]\!]$, c'est aussi pour $P\in E$

Donc :

$$\forall P\in E, \int_0^{+\infty} P(x+t)e^{-t}dt \text{ converge et } x\in\mathbb{R}\mapsto \int_0^{+\infty}P(x+t)e^{-t}dt\in E$$

Q34. Soit $\lambda\in\mathbb{R}$ et $(P,Q)\in E^2$

Alors : $\forall x\in\mathbb{R}$, $u(\lambda P+Q)(x) = \int_0^{+\infty}(\lambda P+Q)(x+t)e^{-t}dt$

$$= \int_0^{+\infty}(\lambda P(x+t)+Q(x+t))e^{-t}dt$$

$$= \lambda u(P)(x) + u(Q)(x) \text{ (linéarité de l'intégrale)}$$

d'où : $u(\lambda P+Q) = \lambda u(P)+u(Q)$

Donc : u est linéaire

Or, d'après Q33, on a : $\forall P\in E, u(P)\in E$

Donc :

$$u\in\mathcal{L}(E)$$

Q35. Soit $P\in E$ et $x\in\mathbb{R}$

On a :

$$u(P)(x) = \int_0^{+\infty}P(x+t)e^{-t}dt$$

$t\mapsto e^{-t}$ et $t\mapsto -P(x+t)$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$

$$= \int_0^{+\infty} -P(x+t)\frac{d}{dt}(e^{-t})dt$$

$$= \underbrace{\left[-P(x+t)e^{-t}\right]_0^{+\infty}}_{=P(x)} + \int_0^{+\infty}P'(x+t)e^{-t}dt$$

$= P(x)$ car par croissance comparée : $\forall k\in[\![0,n-1]\!]$, $t^k e^{-t}\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$

Donc : $u(P)(x) = P(x)+u(P')(x)$

Copie anonyme - n°anonymat : 551293

Code épreuve : 282	**Nombre de pages :** 20	**Session :** 2022
Épreuve de : Mathématiques S ESSEC / HEC		

Emplacement QR Code

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Q36. On a donc :

$$\forall P \in E,\ u(P) = P + u(P') = P + P' + u(P^{(2)}) = P + P' + P^{(2)} + u(P^{(3)})$$

$\vdots$ $n-1$ itérations

$$= \sum_{k=0}^{n-1} P^{(k)} + \underbrace{u(\underbrace{P^{(n)}}_{=0 \text{ car } \deg(P) \leq n-1})}_{=0}$$

Donc : $\forall P \in E,\ u(P) = \sum_{k=0}^{n-1} P^{(k)}$

Q37. Soit $P \in E$ et $x \in \mathbb{R}$

Le changement de variable, dans $\int_0^{+\infty} P(x+t)e^{-t}dt$, $s = x+t$ et $ds = dt$, licite car affine, mais donne (puisque $\int_0^{+\infty} P(x+t)e^{-t}dt$ converge) :

$$\int_0^{+\infty} P(x+t)e^{-t}dt = \int_x^{+\infty} P(s)e^{-(s-x)}ds$$

D'où : $u(P)(x) = e^{x}\int_x^{+\infty} P(s)e^{-s}ds$

Q38. La fonction $x \mapsto \int_x^{+\infty} P(s)e^{-s}ds$ avec $P \in E$ est une primitive de $x \mapsto -P(x)e^{-x}$ (théorème fondamental de l'analyse)

Donc : Pour tout $P \in E$, $x \mapsto \int_x^{+\infty} P(s)e^{-s}ds$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Puisque exp est dérivable sur $\mathbb{R}$, par produit, la fonction $x \mapsto e^x \int_x^{+\infty} P(s) e^{-s}\, ds$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

Donc, d'après Q37., on a :

$u(P)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

Donc, avec Q35., il vient :

$$\forall P \in E,\ u(P)' = P' + u(P')'$$

$$= P' + \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{((P^{(k)})')'}_{= P^{(k+2)}} \quad \text{d'après Q36.}$$

$$= P' + \sum_{k=2}^{n-1} P^{(k)} + \underbrace{P^{(n)}}_{=0} + \underbrace{P^{(n+1)}}_{=0} \quad \text{car } \deg(P) \leq n-1$$

$$= \underbrace{P + P' + \sum_{k=2}^{n-1} P^{(k)}}_{= u(P) \text{ d'après Q36.}} - P$$

Donc : $\forall P \in E,\ u(P)' = u(P) - P$

Or : $\forall P \in E$, $u(P') = \sum_{k=0}^{n-1} P^{(k)\prime}$ d'après Q36.

$$= \sum_{k=0}^{n-1} P^{(k+1)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} P^{(k)} + \underbrace{P^{(n)}}_{=0} \quad \text{car } \deg(P) \leq n-1$$

$$= \underbrace{P + \sum_{k=1}^{n-1} P^{(k)}}_{= u(P)} - P$$

Donc :

$$\forall P \in E,\ u(P)' = u(P')$$

Q39. ~~On a :~~

$$\cancel{\forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad u(X^k) = X^k + u\left(\frac{d}{dx} X^k\right)}$$

$$\cancel{= X^k + u(X^k)'} \text{ ~~d'après Q38.~~}$$

On a :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad u(X^k) = \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{(k-i)!} X^{k-i}$$

Donc :

$$\mathrm{Mat}_{(X^k)_{k \in [\![0, n-1]\!]}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & (0) & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc $sp(u) = \{1\}$

Partie III

Section A :

Q42. Soit u une homothétie

Donc : $\exists \lambda \in \mathbb{K} / u = \lambda id_E$

Alors : $E = \mathrm{Ker}(u - \lambda id_E)$

Or :

$\forall x \in \mathrm{Ker}(u - \lambda id_E)$, $u(u(x)) = \lambda u(x)$

d'où : $u(u(x) - \lambda u(x)) = 0$

donc u