ECRICOME PREPA 2022 - ECT - Technologique

Mathématiques option technologique Mathématiques

LOUIS

Note de délibération : 17.5 / 20

17.5 / 20

Écricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 01 / 06

Numéro de table 15

Exercice 1.

Partie A.

1.a) Calcul de PQ.

$$PQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$\boxed{PQ = 3I}$.

b) Déduction de l'inversibilité de P et de P^{-1}.

$PQ = 3I$ d'après 1.a) on en déduit : $\boxed{P^{-1} = \frac{1}{3}Q}$

2.a) Vérification que $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = MX_n$.

On pose $X_{n+1} = MX_n$.

$$MX_n = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n + 1/4\, c_n \\ 1/4\, a_n + \frac{1}{4}b_n + 1/2\, c_n \end{pmatrix}$$

$$MX_n = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

17.5 / 20

b) Démonstration par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = M^n X_0$.

3. a) Preuve que $(4M-I)(4M-4I) = 0$.

$$(4M-I)(4M-4I) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

b) Déduction des valeurs propres possibles de M.

$(4M-I)(4M-4I) = 16M^2 - 16M - 4M + 4I = 0$.

on a donc : $4(4X^2 - 5X + 1)$ est un polynôme annulateur de M.

$1 ; 1/4$ sont des racines du polynôme annulateur de M.
Ce sont donc les valeurs propres possibles de M.

4. a) soient x_1, x_2, x_3 les valeurs propres de M, dans l'ordre croissant.

$$D = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix}$$

b) $M^n = P D^n P^{-1}$

c)

d)

e) On admet $a_n = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{4^n}\right)$

$\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \frac{1}{3}$ car $\left|\frac{1}{4}\right| < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{3} \times \frac{2}{4^n} = 0$.

On admet $b_n = c_n = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right)$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = \lim\limits_{n \to +\infty} c_n = \frac{1}{3}$ car $\left|\frac{1}{4}\right| < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{3} \times \frac{-1}{4^n} = 0$

5. Scilab.

```
n = 0.
a = 1 ; b = 0.
while ....
 n = ....
 a = 1/3*(1+2/4^n)
 b = 1/3*(1-1/4^n)
end.
disp(a;b).
```

17.5 / 20

ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 02 / 06

Numéro de table 15

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

17.5 / 20

Partie B

6. $P(A_0) = 1$; c'est un évènement certain.
$P(B_0) = 0$
$P(C_0) = 0$ } B_0, C_0 sont des évènements impossibles.
$P(A_1) = 1/2$
$P(B_1) = 1/4$
$P(C_1) = 1/4$.

7. a) Explications des valeurs de $P_{A_n}(A_{n+1})$; $P_{B_n}(A_{n+1})$; $P_{C_n}(A_{n+1})$

- Pour aller de la case 0 vers la case 0, il y a deux façons :
  - avancer de 0 case
  - avancer de 3 cases.

  Or, les probabilités de ces deux évènements valent 1/4 donc :
  $$P_{A_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{2}.$$

- Pour aller de la case 1 vers la case 0, il n'y a qu'une manière :
  - avancer de deux cases - dont la probabilité est de 1/4.

  $$P_{B_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{4}$$

- Pour aller de la case 2 vers la case 0, il n'y a qu'une façon :
  - avancer d'une case. Or, la probabilité de cet évènement vaut 1/4. $P_{C_n}(A_{n+1}) = 1/4$.

b) Expressions des probabilités des événements A_{n+1}, B_{n+1}, C_{n+1} en fonction de A_n, B_n, C_n.

$$P(A_{n+1}) = P\Big((A_{n+1} \cap A_n) \cup (A_{n+1} \cap B_n) \cup (A_{n+1} \cap C_n)\Big)$$

$$=$$

8. Cela signifie que sur le long terme,

- la probabilité d'être sur la case 0 est de $\frac{1}{3}$.

- Les probabilités d'être sur les cases 1 et 2 sont de $\frac{1}{3}$ aussi :

$\Rightarrow$ les événement sont équiprobaux sur le long terme.

17.5 / 20

Écricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 03 / 06

Numéro de table 15

Exercice 2. $\forall x \in]-1, +\infty[, \ f(x) = x\ln(1+x)$

1.a) Limite de f en -1.

$\lim\limits_{-1} f = +\infty$ par produit, d'après le théorème d'opérations sur les limites (T.O.L.)

car • $\lim\limits_{x \to -1} \ln(1+x) = -\infty$ par composition.

• $\lim\limits_{x \to -1} x = -1$.

b) Limite de f en $+\infty$.

$\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ par produit, d'après le T.O.L.

car • $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1+x) = +\infty$ par composition.

• $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

17.5 / 20

c) Démonstration que C_f admet une branche parabolique.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \ln(1+x) = +\infty.$$

C_f admet une branche parabolique de direction Ox.

2.a) Calcul de $f'(x)$ $\forall x \in]-1, +\infty[$.

$$f'(x) = \ln(1+x) + \frac{x}{1+x} \quad \forall x \in]-1, +\infty[.$$

b) Calcul de $f^{(2)}(x)$ $\forall x \in]-1, +\infty[$.

$$f^{(2)}(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2}$$

$$f^{(2)}(x) = \frac{x+2}{(1+x)^2}$$ On en déduit que f est convexe sur $]-1, +\infty[$.
car $\forall x > -1$, $f^{(2)}(x) > 0$.

c) Variations de $f'(x)$ sur $]-1, +\infty[$.

- $f^{(2)}(x) > 0$ sur $]-1, +\infty[$ car $x+2 > 0$ et $(1+x)^2 > 0$ sur $]-1, +\infty[$

donc $f'(x)$ croissante sur $]-1, +\infty[$.

3. a) Signe de $f'(x)$ $\forall x > -1$ à partir de $f'(0)$.

$$f'(x) = \ln(1+x) + \frac{x}{x+1} \quad \text{sur }]-1, +\infty[.$$

$$f'(0) = \ln(1) = 0.$$

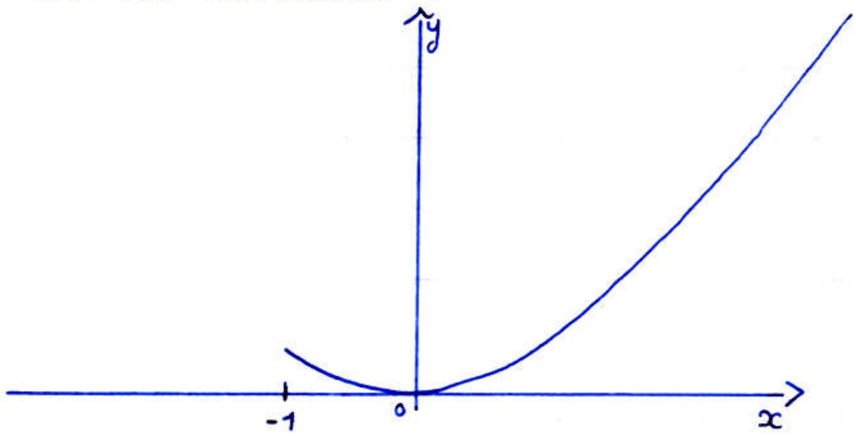
On en déduit : $f'(x) \leqslant 0$ pour $x \leqslant 0$.

et $f'(x) \geqslant 0$ pour $x \geqslant 0$.

b) Tableau de variations de f sur $]-1, +\infty[$.

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4. D'après l'étude du signe de f, de ses variations et de sa convexité :



5. $I = \int_0^1 f(x)\,dx$

a) Calcul de I à partir d'une intégration par parties.

On pose $I = \displaystyle\int_0^1 x\ln(1+x)\,dx = \frac{1}{2}\left[x^2\ln(1+x)\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx$

$$I = \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx.$$

b) Vérification que $\forall x \in [0,1]$, $\dfrac{x^2}{x+1} = x-1+\dfrac{1}{x+1}$

$$x-1+\frac{1}{x+1} = \frac{(x-1)(x+1)+1}{x+1} = \frac{x^2-1+1}{x+1} = \frac{x^2}{x+1}$$

L'égalité est vérifiée.

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx = \int_0^1 x-1+\frac{1}{x+1}\,dx = \int_0^1 x-1\,dx + \int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx$

par linéarité de l'intégralle.

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - x\right]_0^1 + \left[\ln(x+1)\right]_0^1 = \ln(2) - \frac{1}{2}.$$

d) Calcul de I. d'après 5.a, b, c.

$$I = \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2}\left(\ln(2) - \frac{1}{2}\right)$$

$$I = \frac{1}{4}.$$

17.5 / 20

Écricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 04 / 06

Numéro de table 15

6. SciLab

```
function y = f(x)
    y = x*log(1+x)
endfunction.
for n = 1 5 10 20 50
    x = linspace (0,1,100)
    plot2d (x , y)
end.
```

7. a) Interprétation géométrique de l'intégrale In.

Géométriquement, In calcule l'aire entre la courbe de f et l'axe des abcisses entre x et $f(x)$.

b) Conjecture de la limite de la suite (In) quand n tend vers +oo.

La limite de la suite (In) semble être 0 quand n tend vers +oo.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

17.5 / 20

8. a) Preuve que $\forall x \in [0,1]$, $0 \leq x^n \ln(1+x) \leq x^n \ln(2)$.

x^n, $\ln(x)$ étant des fonctions croissantes, il vient :

$$x^n \leq x^n \leq x^n$$

$$x^n \ln(1+0) \leq x^n \ln(1+x) \leq x^n \ln(1+1)$$

$$0 \leq x^n \ln(1+x) \leq x^n \ln(2).$$

b) Par croissance de l'Intégrale, il vient :

$$\int_0^1 0 \, dx \leq \int_0^1 x^n \ln(1+x) \, dx \leq \int_0^1 x^n \ln(2) \, dx$$

mais comme $\int_0^1 x^n \, dx \leq \frac{1}{n+1}$ sur $[0,1]$

et car $\ln(2)$ est une constante puis que $\int_0^1 \ln(2) \, dx = \ln(2)$.
il vient :

$$0 \leq \int_0^1 x^n \ln(1+x) \, dx \leq \frac{1}{n+1} \int_0^1 \ln(2) \, dx$$

et donc : $0 \leq \int_0^1 x^n \ln(1+x) \, dx \leq \frac{\ln(2)}{n+1}$

ou $0 \leq I_n \leq \frac{\ln(2)}{n+1}$

8. c) Limite de (I_n) $\forall n \geqslant 1$.

Il vient, par un théorème d'encadrement :

$$\lim_{n \to +\infty} I_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(2)}{n+1} = 0$$

La limite de (I_n) vaut 0.

Exercice 3.

Soit $a > 0$; $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x}{2a^2} & \text{si } 0 \leq x \leq 2a \\ 0 & \text{si } x > 2a. \end{cases}$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

1. Continuité de f en 0. puis en $2a$.

- Continuité de f en 0.

  On a : $\lim_{0^-} f = \lim_{0^+} f = f(0) = 0$;

  f continue en 0.

- Continuité de f en $2a$.

  $$f(2a) = \lim_{\substack{x \to 2a \\ <}} f = \frac{1}{a} \neq \lim_{\substack{x \to 2a \\ >}} f = 0$$

  f n'est pas continue en $2a$.

2. Vérification que f est une densité de probabilités.

- Continuité de f.

f est continue bien qu'elle admette un point de discontinuité en $2a$ - en tant que fonction continue par morceaux.

- Signe de f.

$f \geqslant 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

- Convergence et valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{2a} \frac{x}{2a^2}\,dx + \int_{2a}^{+\infty} 0\,dx$$ d'après la relation de Chasles.

$$= \int_{0}^{2a} \frac{x}{2a^2}\,dx = \frac{1}{2a^2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{2a} = \frac{1}{2a^2} \times 2a^2$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1.$$

L'intégralle de f sur $\mathbb{R}$ converge et vaut 1.
f est une densité de probabilités.

17.5 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 05 / 06

Numéro de table 15

Soit X la variable aléatoire de densité f.

3. a) Preuve de $F(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x}{2a^2} & \text{si } 0 \leq x \leq 2a \\ 0 & \text{si } x > 2a \end{cases}$$

f étant continue :

$$F(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} 0 \, dx & \text{si } x < 0 \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{x}{2a^2} & \text{si } 0 \leq x \leq 2a \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{2a} \frac{x}{2a^2} & \text{si } x > 2a \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{Si } x < 0 \\ \dfrac{x^2}{4a^2} & \text{Si } 0 \leq x \leq 2a \\ 1 & \text{Si } x > 2a \end{cases}$$

$P(0 < X < 2a) =$

$$\int_{-\infty}^{x} \frac{x}{2a^2} dx = \int_{0}^{x} \frac{x}{2a^2} dx$$

$$\int_{-\infty}^{x} \frac{x}{2a^2} dx = \frac{x^2}{4a^2}$$

$$\int_{-\infty}^{2a} \frac{x}{2a^2} dx = \left[\frac{x^2}{4a^2}\right]_0^{2a}$$

$$= \frac{4a^2}{4a^2}$$

$$\int_{-\infty}^{2a} \frac{x}{2a^2} = 1.$$

$$= P(X > 2a).$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

17.5 / 20

On retrouve bien $F(x) = P(X \leq x)$.

b) Calcul de $P_{[X > \frac{a}{2}]}(X \leq a)$

$$P_{[X>\frac{a}{2}]}(X \leq a) = P\left(\frac{a}{2} < X \leq a\right)$$

$$= \int_{\frac{a}{2}}^{a} \frac{x}{2a^2}\, dx$$

$$= \frac{1}{4a^2}\left[x^2\right]_{\frac{a}{2}}^{a}$$

$$= \frac{a^2}{4a^2} - \frac{a}{8a^2} = \frac{a(2a-1)}{8a^2}$$

$$P_{[X>\frac{a}{2}]}(X \leq a) = \frac{2a-1}{8a}.$$

4. Calcul de $E(X)$.

On sait que $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx$

$$E(X) = \int_0^{2a} \frac{x^2}{2a^2}\, dx$$

$$= \frac{1}{2a^2} \int_0^{2a} x^2\, dx$$

$$= \frac{1}{2a^2} \left[\frac{1}{3} x^3\right]_0^{2a}$$

$$= \frac{8\, a^3}{6\, a^2}$$

$$E(X) = \frac{4}{3} a \quad \square.$$

5. Calcul de $V(X)$.

D'après la formule de Koenig-Huygens, $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx - E(X)^2 .$$

$$= \int_0^{2a} \frac{x^3}{4a^2}\, dx - \frac{16}{9} a^2$$

$$= \frac{1}{16a^2} \left[x^4\right]_0^{2a} - \frac{16}{9} a^2$$

$$= \frac{16\, a^2}{16\, a^2} - \frac{16}{9} a^2$$

$$V(X) = 1 - \frac{16}{9} a^2$$

6. $Y = X^2$, G est la fonction de répartition de Y.

a. $G(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

$G(x) = P(X^2 \leq x)$

d'après $F(x)$, on déduit :

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^4}{16a^4} & \text{si } 0 \leq x \leq 4a^2 \\ 1 & \text{si } x > 2a. \end{cases}$$

c. Explication de la commande Scilab "rand()*4*a^2

rand()*4*a^2 simule un x uniformément compris entre 0 et $4a^2$.

. La commande simule donc la variable aléatoire Y.

d. simulation scilab de X sachant $\sqrt{Y} = X$.

X ou $\sqrt{Y}$ se simule par : (rand()*4*a^2)^0,5

17.5 / 20

Écricome Épreuve : Mathématiques.

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 06 / 06

Numéro de table 15

7. a) Preuve que T_n est un estimateur sans biais de a.

Si T_n est un estimateur sans biais de a alors
$$E(T_n) = a.$$

$$E(T_n) = E\left(\frac{3}{4n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right)$$

$$= \frac{3}{4n} E \sum_{k=1}^{n} X_k$$ Par linéarité de l'espérance.

$$= \frac{3}{4n} \sum_{k=1}^{n} E(X_k)$$

$$= \frac{3}{4n} n E(X)$$ Comme les variables suivent la même loi que X, elles ont la même espérance trouvée à 4.

$$= \frac{3}{4n} n \frac{4a}{3}$$

$$= \frac{3 \times 4 n \times a}{3 \times 4n}$$

$$E(T_n) = a.$$

T_n est un estimateur sans biais de a.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

17.5 / 20

b) Les risque quadratique de T_n est donné par $V(T_n)$

$$V(T_n) = V\left(\frac{3}{4n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right)$$

$$= \frac{9}{16n^2}\, n\, V(X)$$

$$V(T_n) = \frac{9}{16n^2} \times \frac{1-16}{9} a^2$$

$$V(T_n) = \frac{(1-16)a^2}{16n^2}$$

Le risque quadratique de T_n. vaut $-\dfrac{15a^2}{16n^2}$.

c) Scilab.

```
n = length(X)
T_n = (-15*a^2)/(16*n^2)
disp(T_n).
```