Copie anonyme - n°anonymat : 691024

D1-00125
691024
Maths 2E

Code épreuve : 287

Nombre de pages : 22

Session : 2022

Épreuve de : Maths II ESSEC

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Première partie

1.a) ~~$f_Z(t)$ est~~

Φ est la fonction de répartition de la variable aléatoire Z. Et comme Z est bien à densité, alors la définition même de la fonction de répartition assure que :

$\boxed{\Phi \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$.

b) Soit $x \in \mathbb{R}$.

~~On a $\Phi(x)$~~. Comme Φ est continue sur $\mathbb{R}$, on note F la fonction de répartition de f_Z sur l'intervalle $]-\infty, x]$. Soit $A \leq x$:

On a $\Phi(x) = \displaystyle\int_A^x f_Z(t)\,dt$

$= [F(t)]_A^x$

$= F(x) - F(A)$

Φ

B) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y > x$.

Comme $y \geq x$, on a :

$$\int_{-\infty}^{y} f_Z(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} f_Z(t)\,dt + \int_x^y f_Z(t)\,dt \quad \text{(convergence)}$$

$$= \Phi(x) + \int_x^y f_Z(t)\,dt.$$

Donc $\Phi(y) = \Phi(x) + \displaystyle\int_x^y f_Z(t)\,dt$

Or, comme f_Z est la densité d'une loi normale centrée réduite, on a $\forall x \in \mathbb{R},\ f_Z(x) > 0$.
Et comme $y > x$, on a $\int_x^y f_Z(t)\,dt > 0$.

On peut donc écrire :
$\phi(y) > \phi(x)$.
On a donc $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > x \Rightarrow \phi(y) > \phi(x)$.

$\boxed{\text{Conclusion : } \phi \text{ est strictement croissante}}$.

c) ϕ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Donc par le théorème de la bijection, ϕ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\left] \lim\limits_{x \to -\infty} \phi(x) ; \lim\limits_{x \to +\infty} \phi(x) \right[$

$=]0 ; 1[$ par définition d'une fonction de répartition d'une variable à densité.

$\boxed{\text{Conclusion : } \phi \text{ est une bijection de } \mathbb{R} \text{ sur }]0;1[}$.

d) Soit $x \in \mathbb{R}$. $\cancel{\phi(-x)} =$

$$1 - \phi(x) = 1 - \int_{-\infty}^{x} f_Z(t)\,dt$$
$$= \int_x^{+\infty} f_Z(t)\,dt$$
$$= \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

On pose $t = -u$ (changement de variable de classe C^1)
donc $dt = -du$
D'où
$$1 - \phi(x) = \int_{-x}^{-\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \times -du$$
$$= -\int_{-x}^{-\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du$$

$$= \int_{-\infty}^{-x} f_Z(t)\,dt$$

$$= \phi(-x).$$

$\boxed{\underline{\text{Conclusion}} : \forall x \in \mathbb{R},\ \phi(-x) = 1 - \phi(x)}$.

1.a) Comme $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_Z(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

et que $x \mapsto e^{-x^2/2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme composée bien définie de telles fonctions, alors f_Z est continue sur $\mathbb{R}$.

Donc en particulier f_Z est continue sur $]-\infty; x]$.

Donc $\boxed{\phi \text{ est bien continue sur } \mathbb{R} \text{ entier}}$.

1.b) Par continuité de f sur $\mathbb{R}$ on peut noter F la fonction primitive de f_Z sur $\mathbb{R}$ donc sur $]-\infty; x]$ en particulier. Soit $A < x$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \phi(x) = \int_A^x f_Z(t)\,dt$$

$$= [F(t)]_A^x$$

$$= F(x) - F(A).$$

ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme différence de fonctions dérivables (primitive et constante).

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \phi'(x) = f_Z(x) - f_Z(A)$$

$$\xrightarrow[A \to -\infty]{} f_Z(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

Or, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} > 0$

D'où $\phi'(x) > 0$.

D'où $\boxed{\phi \text{ est croissante sur } \mathbb{R}}$

2.a) Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi et admettant une même espérance m. Alors d'après la loi faible des grands nombres $\forall \varepsilon > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$P\left(\left|\frac{X_1+\dots+X_n}{n}-m\right|\geqslant \varepsilon\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

b) Soit $(X_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi admettant une même espérance μ et une même variance σ^2.

$$P(Z_n\leqslant x)=P\left(\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n-\mu)}{\sigma}\right)$$

$$=P\left(\frac{\bar{X}_n-\mu}{\frac{\sqrt{\sigma^2}}{\sqrt{n}}}\right)$$

$$=P\left(\frac{\bar{X}_n-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}\right)$$

Or, $E(\bar{X}_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)$ (linéarité)

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu$$

$$=\mu.$$

et $V(\bar{X}_n)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}V(X_i)$ (indépendance)

$$=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2$$

$$=\frac{\sigma^2}{n}$$

D'où $P(Z_n\leqslant x)=P\left(\frac{\bar{X}_n-E(\bar{X}_n)}{\sqrt{V(\bar{X}_n)}}\right)$

Comme $\bar{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ avec $(X_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ une suite de variables aléatoires indépendantes admettant une même espérance et une même variance, on a d'après le théorème central limite :

$$\boxed{P(Z_n\leqslant x)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\Phi(x)}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 691024

Code épreuve : 287	Nombre de pages :	Session : 2022

Épreuve de : Maths II ESSEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

3.a) Par le théorème de transfert :

$$E(X_i) = 0\,P(X_i=0) + 2\,P(X_i=2) + 5\,P(X_i=5) + 10\,P(X_i=10)$$
$$= \frac{2}{2} + \frac{5}{5} + \frac{10}{10}$$
$$= \boxed{3}$$

b) Toujours par le théorème de transfert :

$$E(X_i^2) = 4\,P(X_i=2) + 25\,P(X_i=5) + 100\,P(X_i=100)$$
$$= \frac{4}{2} + \frac{25}{5} + \frac{100}{10}$$
$$= 2+5+10$$
$$= 17$$

Donc par Koënig-Huygens :

$$V(X_i) = E(X_i^2) - E(X_i)^2$$
$$= 17 - 3^2$$
$$= 17 - 9$$
$$= \boxed{8}$$

c.i) On pose $Y = f(U)$. Comme U est à valeurs dans $[0;1]$ et comme f prend ses valeurs dans $[0;1]$ et les renvoit dans $\{0;2;5;10\}$ alors $Y(\Omega) = \{0;2;5;10\}$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Donc $P(Y=0) = P(g(U)=0)$

$= P\left(U \in \left[0 ; \frac{1}{5}\right[\right)$

$= P\left(0 \leq U < \frac{1}{5}\right)$

$= P\left(U < \frac{1}{5}\right) - P(U \leq 0)$

$= P\left(U \leq \frac{1}{5}\right) - P(U \leq 0)$ (car U est à densité)

$= \frac{1}{5} - 0$ car $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0;1])$

$= \frac{1}{5} = P(X_i = 0)$

De même, on a :

$P(Y=2) = P(g(U)=2)$

$= P\left(U \leq \frac{7}{10}\right) - P\left(U \leq \frac{1}{5}\right)$

$= \frac{7}{10} - \cancel{\frac{5}{10}}\ \frac{1}{5}$

$= \frac{5}{10}$

$= \frac{1}{2}$

$= P(X_i = 2)$

$P(Y=5) = P\left(U \leq \frac{9}{10}\right) - P\left(U \leq \frac{7}{10}\right)$

$= \frac{9}{10} - \frac{7}{10}$

$= \frac{2}{10}$

$= \frac{1}{5}$

$= P(X_i = 5)$

$P(Y = 10) = P(U < 1) - P\left(U < \frac{9}{10}\right)$

$= 1 - \frac{9}{10}$

$= \frac{1}{10}$

$= P(X_i = 10).$

$\boxed{\underline{\text{Conclusion}} : f(U) \text{ suit la même loi que } X_i}.$

d) $Z_n = \sqrt{n}\left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}\right)$

$= \sqrt{n}\left(\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu}{\sigma}\right)$

$= \sqrt{n}\left(\frac{\frac{1}{n} S_n - \mu}{\sigma}\right)$

$= \frac{\frac{1}{\sqrt{n}} S_n - \mu\sqrt{n}}{\sigma}$

$= \frac{\frac{S_n - \mu n}{\sqrt{n}}}{\sigma}$

$= \frac{S_n - \mu n}{\sigma\sqrt{n}}.$

Or, $\mu = E(X_i) = 3$
et $V(X_i) = \sigma^2 = 8$
donc $\sigma = \sqrt{8}$.

D'où $Z_n = \frac{S_n - 3n}{\sqrt{8n}}$

e) Cela revient à calculer $P(S_{200} < 500)$ avec $n = 200$
$P(S_{200} < 500) = P(S_{200} - 600 < -100)$

$$= P\left(\frac{S_{200} - 600}{\sqrt{1600}} \leq \frac{-100}{\sqrt{1600}} \right)$$

$$= P\left(\frac{S_{200} - 600}{40} \leq \frac{-100}{40} \right)$$

$$= P\left(\frac{S_{200} - 600}{40} \leq -2,5 \right)$$

$$= P\left(\frac{S_{200} - E(S_{200})}{\sqrt{V(S_{200})}} \leq -2,5 \right)$$

D'après le théorème central limite cette probabilité converge vers $\Phi(-2,5)$ car

$$P\left(\frac{S_{200} - E(S_{200})}{\sqrt{V(S_{200})}} \leq -2,5 \right) = P(Z_{200} \leq -2,5)$$
$$\simeq \Phi(-2,5) \quad (2.B).$$

$\boxed{\text{Conclusion : La probabilité que le score du joueur soit égal ou inférieur à 500 est } \Phi(-2,5)}$

4.a) $\max_{k \in \{0,\dots,2N\}} |P(Z_n \leq x_k) - \Phi(x_k)|$

$$= \max_{k \in \{0,\dots,2N\}} \left| P(Z_n \leq x_k) - \Phi\left(\Phi^{-1}\left(\frac{k}{2N}\right)\right) \right|$$

$$= \max_{k \in \{0,\dots,2N\}} \left| P(Z_n \leq x_k) - \frac{k}{2N} \right|$$

Non abouti

B.i) On sait que $x \leq x_k$

Donc $(Z_n \leq x) \subset (Z_n \leq x_k)$.

Donc par croissance de la probabilité

$P(Z_n \leq x) \leq P(Z_n \leq x_k)$.

donc $P(Z_n \leq x) - \Phi(x) \leq P(Z_n \leq x_k) - \Phi(x)$.

Or, on a aussi $x_{k-1} < x$.

Donc par stricte croissance de Φ sur $\mathbb{R}$,

$\Phi(x_{k-1}) < \Phi(x)$.

Copie anonyme - n°anonymat : 691024

Code épreuve : 287

Nombre de pages :

Session : 2022

Épreuve de : Maths II ESSEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

$P(Z_n \leq x) - \phi(x) \leq P(Z_n \leq x_k) - \phi(x_{k-1})$

$\iff \phi(x_{k-1}) - \phi(x) \leq P(Z_n \leq x_k) - P(Z_n \leq x)$.

Etude de $\phi(x_{k-1}) - \phi(x)$:

d'après l'énoncé, $x_{k-1} \leq x$ donc par stricte croissance de ϕ sur $\mathbb{R}$, $\phi(x_{k-1}) < \phi(x)$ c'est-à-dire :

$\phi(x_{k-1}) - \phi(x) < 0$.

Etude de $P(Z_n \leq x_k) - P(Z_n \leq x)$:

$x \leq x_k$

donc $(Z_n \leq x) \subset (Z_n \leq x_k)$

Donc par croissance de la probabilité,

$P(Z_n \leq x) \leq P(Z_n \leq x_k)$

Donc $P(Z_n \leq x_k) - P(Z_n \leq x) \geq 0$.

On a donc finalement :

$\phi(x_{k-1}) - \phi(x_k) < 0$

et $P(Z_n \leq x_k) - P(Z_n \leq x) \geq 0$

D'où $\phi(x_{k-1}) - \phi(x_k) \leq P(Z_n \leq x_k) - P(Z_n \leq x)$.

En remettant les choses dans l'ordre, on a bien :

$\boxed{P(Z_n \leq x) - \phi(x_k) \leq P(Z_n \leq x_k) - \phi(x_{k-1})}$

~~iii) D'après la 4.b/i)~~

~~$P(Z_n$~~

d) D'après la 4.b.ii), $P(Z_n \leq x) - \phi(x) \leq \frac{1}{N}$

Soit $x \in \mathbb{R}$, soit $n \in \mathbb{N}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

D'après la 4. b. iii), $\phi(x) - P(Z_n \leq x) \leq \frac{1}{N}$.

On a donc $P(Z_n \leq x) - \phi(x) \geq -\frac{1}{N}$

et $P(Z_n \leq x) - \phi(x) \leq \frac{1}{N}$

Donc $-\frac{1}{N} \leq P(Z_n \leq x) - \phi(x) \leq \frac{1}{N}$

<u>Conclusion</u> : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \geq n_0, |P(Z_n \leq x) - \phi(x)| \leq \frac{1}{N}$

d) D'après la question précédente, il vient que :

$-\frac{1}{N} \leq P(Z_n \leq x) - \phi(x) \leq \frac{1}{N}$

Comme on a $\frac{1}{N} \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$,

et que $-M_n \leq P(Z_n \leq x) - \phi(x) \leq M_n$ d'après l'énoncé, M_n étant un majorant de $|D_n(x)|$

alors on peut choisir $(M_n)_{n \geq 1}$ telle que :

$\lim_{n \to +\infty} M_n = 0$.

5. a. i) $\phi(x) = \phi(\lim_{n \to +\infty} x_n)$.

D'après la continuité de ϕ sur $\mathbb{R}$

alors $\phi(\lim_{n \to +\infty} x_n) = \lim_{n \to +\infty} \phi(x_n)$.

<u>Conclusion</u> : $\lim_{n \to +\infty} \phi(x_n) = \phi(x)$

ii) On a $-M_n \leq P(Z_n \leq x_n) - \phi(x_n) \leq M_n$

Le résultat $(\ast\ast)$ de la question 4. d montre que $M_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Un théorème d'encadrement permet d'assurer que :

$$\boxed{|P(Z_n \leq x) - \phi(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$$

iii) Comme $|P(Z_n \leq x_n) - \phi(x_n)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$,

alors on a directement
$\lim\limits_{n\to+\infty} P(Z_n \leq x_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \phi(x_n)$

$= \phi(x)$ (question 5.a.i)

$\boxed{\underline{\text{Conclusion}}: \lim\limits_{n\to+\infty} P(Z_n \leq x_n) = \phi(x)}$

B.i) Soit $n \geq 1$. L'énoncé souhaite que l'on démontre $P\left(Z_n \leq x - \frac{1}{n}\right) \leq P(Z_n \leq x) \leq P(Z_n \geq x)$.

~~Compte tenu du résultat demandé à la 5.B.ii),~~
~~on peut démontrer que :~~
~~$P\left(Z_n \leq x - \frac{1}{n}\right) \leq P(Z_n \geq x)$~~

comme $\frac{1}{n} > 0$, on a $x - \frac{1}{n} \leq x$.

Donc $\left(Z_n \leq x - \frac{1}{n}\right) \subset (Z_n < x) \subset (Z_n \leq x)$

car si $Z_n < x$, alors $Z_n \leq x$

Donc $P\left(Z_n \leq x - \frac{1}{n}\right) \leq P(Z_n < x) \leq P(Z_n \leq x)$

et on a bien $P(Z_n < x) \leq P(Z_n \leq x)$.

$\boxed{\underline{\text{Conclusion}}: P\left(Z_n \leq x - \frac{1}{n}\right) \leq P(Z_n < x) \leq P(Z_n \leq x)}$

ii) Comme $x - \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} P(Z_n \leq x) = \phi(x)$

Un théorème d'encadrement donne : $\boxed{\lim P(Z_n < x) = \phi(x)}$.

c) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$.

$P(Z_n \in [a; b]) = P(a \leq Z_n \leq b)$

$= P(Z_n \leq b) - P(Z_n \leq a)$

Or, comme $P(Z_n \leq x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \phi(x)$

alors $P(Z_n \leq b) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \phi(b)$

et $P(Z_n \leq a) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \phi(a)$.

<u>Conclusion</u> : $\boxed{\lim_{n \to +\infty} P(Z_n \in [a; b]) = \phi(b) - \phi(a)}$

<u>Deuxième partie</u>

6. a) $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ car la probabilité qu'un électeur vote pour le candidat A est p.

Le cours assure que :

$$\boxed{\begin{array}{l} E(X_i) = p \\ V(X_i) = p(1-p) \end{array}}$$

b) On utilise la majoration "classique" suivante :

$p(1-p) \leq \frac{1}{4}$

Donc par croissance de la racine carrée sur $\mathbb{R}_+$,

$\sqrt{p(1-p)} \leq \sqrt{\frac{1}{4}}$

d'où $\boxed{\sigma \leq \frac{1}{2}}$

c) $E(\overline{X_n}) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i\right)$

$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$ (linéarité)

$= \frac{np}{n}$

Code épreuve : 287

Nombre de pages :

Session : 2022

Épreuve de : Maths II ESSEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

$= \boxed{p}$

d) Par indépendance,

$$V(\overline{X_n}) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} V(X_i)$$
$$= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} p(1-p)$$
$$= \frac{np(1-p)}{n^2}$$
$$= \left(\frac{\sqrt{p(1-p)}}{n}\right)^2$$
$$= \frac{\sigma^2}{n}$$

7.a) Soit $a > 0$

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\overline{X_n} - p) = \frac{\overline{X_n} - p}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}$$
$$= \frac{\overline{X_n} - E(\overline{X_n})}{\sqrt{V(\overline{X_n})}}$$

Comme $\overline{X_n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$,

avec $(X_i)_{i\in[1;n]}$ une suite de variable aléatoires indépendante, de même loi, de même espérance

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

et de même variance; on applique le théorème central limite:

$$P\left(\frac{\bar{X}_n - E(\bar{X}_n)}{V(\bar{X}_n)} \in [-a; a]\right)$$

$$= P\left(-a \leq \frac{\bar{X}_n - E(\bar{X}_n)}{\sqrt{V(\bar{X}_n)}} \leq a\right)$$

$$= P\left(\frac{\bar{X}_n - E(\bar{X}_n)}{\sqrt{V(\bar{X}_n)}} \leq a\right) - P\left(\frac{\bar{X}_n - E(\bar{X}_n)}{\sqrt{V(\bar{X}_n)}} \leq -a\right)$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \phi(a) - \phi(-a) \quad \text{(théorème central limite).}$$

$$\boxed{\text{Conclusion: } P\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X}_n - p) \in [-a; a]\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \phi(a) - \phi(-a)}$$

2) $P\left(p \in \left[\bar{X}_n - \frac{a\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + \frac{a\sigma}{\sqrt{n}}\right]\right)$

$$= P\left(X_n - \frac{a\sigma}{\sqrt{n}} \leq p \leq \bar{X}_n + \frac{a\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= P\left(-\frac{a\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{X}_n - p \leq \frac{a\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= P\left(-a \leq \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X}_n - p) \leq a\right)$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \phi(a) - \phi(-a) \quad \text{(question précédente)}$$

$$= \phi(a) - (1 - \phi(a))$$

$$= 2\phi(a) - 1$$

$$\boxed{\text{Conclusion: } \lim_{n\to+\infty} P\left(p \in \left[\bar{X}_n - \frac{a\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{X}_n + \frac{a\sigma}{\sqrt{n}}\right]\right) = 2\phi(a) - 1}$$

En posant $a = 1{,}96$:

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(p \in \left[\bar{X}_n - \frac{1{,}96\sigma}{\sqrt{n}} ; \bar{X}_n + \frac{1{,}96\sigma}{\sqrt{n}}\right]\right)$$

$$= 2\phi(1{,}96) - 1.$$

$$= 2 \times 0{,}975 - 1.$$

Or,
$$\begin{array}{r} 0{,}975 \\ \times\quad 2 \\ \hline 1{,}950 \end{array}$$

Donc $2 \times 0{,}975 - 1 = 1{,}950 - 1$

$= 0{,}95.$

$\boxed{\text{Conclusion : pour } n \text{ assez grand, } p \text{ a à peu près } 95\,\% \text{ de chances d'appartenir à } \left[\bar{X}_n - \frac{1{,}96\sigma}{\sqrt{n}} ; \bar{X}_n + \frac{1{,}96\sigma}{\sqrt{n}}\right].}$

8. a) $V_n - \sigma^2 - \frac{1}{n} = \bar{X}_n(1 - \bar{X}_n) - \sigma^2 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n}$

$= \bar{X}_n(1 - \bar{X}_n) - \sigma^2$

$= \bar{X}_n(1 - \bar{X}_n) - p(1-p).$

$= \bar{X}_n - \bar{X}_n^2 - p + p^2$

et $(\bar{X}_n - p)(1 - \bar{X}_n - p) = \bar{X}_n - \bar{X}_n^2 - \cancel{\bar{X}_n p} - p + \cancel{p\bar{X}_n} + p^2$

$= \bar{X}_n - \bar{X}_n^2 + p^2 - p.$

$\boxed{\text{Conclusion : } V_n - \sigma^2 - \frac{1}{n} = (\bar{X}_n - p)(1 - \bar{X}_n - p)}$

b) On a d'après ce qui précède :

$V_n - \sigma^2 = (\bar{X}_n - p)(1 - \bar{X}_n - p) + \frac{1}{n}.$

Donc $|V_n - \sigma^2| = \left|(\bar{X}_n - p)(1 - \bar{X}_n - p) + \frac{1}{n}\right|$

$\leq |(\bar{X}_n - p)(1 - \bar{X}_n - p)| + \frac{1}{n}$ (inégalité triangulaire)

$= |\bar{X}_n - p + p^2 - \bar{X}_n^2| + \frac{1}{n}.$

$= |\bar{X}_n - p + (\bar{X}_n + p)(\bar{X}_n - p)| + \frac{1}{n}$

$\leq |\bar{X}_n - p| + |(\bar{X}_n + p)||(\bar{X}_n - p)| + \frac{1}{n}$

$= |\bar{X}_n - p| + |\bar{X}_n - p|(\bar{X}_n + p) + \frac{1}{n}$.

et comme $(\bar{X}_n + p) \geq 0$,

alors $|\bar{X}_n - p| + |\bar{X}_n - p|(\bar{X}_n + p) + \frac{1}{n}$

$\leq 2|\bar{X}_n - p| + \frac{1}{n}$.

$\boxed{\text{Conclusion : } |V_n - \sigma^2| \leq 2|\bar{X}_n - p| + \frac{1}{n}}$

c) D'après la question précédente,

$(|V_n - \sigma^2| > \varepsilon) \subset \left(2|\bar{X}_n - p| + \frac{1}{n} > \varepsilon\right)$

D'où $P\left(|V_n - \sigma^2| > \varepsilon\right) \leq P\left(2|\bar{X}_n - p| + \frac{1}{n} > \varepsilon\right)$

$= P\left(2|\bar{X}_n - p| > \varepsilon - \frac{1}{n}\right)$

$= P\left(|\bar{X}_n - p| > \frac{\varepsilon}{2} - \frac{1}{2n}\right)$

Conclusion : $P\left(|V_n - \sigma^2| > \varepsilon\right) \leq P\left(|\bar{X}_n - p| > \frac{\varepsilon}{2} - \frac{1}{2n}\right)$

d) On cherche n tel que $\frac{\varepsilon}{2} - \frac{1}{2n} \geq \frac{\varepsilon}{4}$.

$\frac{\varepsilon}{2} - \frac{1}{2n} \geq \frac{\varepsilon}{4} \iff \frac{1}{2n} \leq \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{4}$

$\iff \frac{1}{2n} \leq \frac{\varepsilon}{4}$.

$\iff 2n \geq \frac{4}{\varepsilon}$ (décroissance de $x \mapsto 1/x$ sur $\mathbb{R}_+^*$)

$\iff n \geq \frac{1}{2\varepsilon}$.

Donc $\forall n \geq \frac{1}{2\varepsilon}$, $\frac{\varepsilon}{2} - \frac{1}{2n} \geq \frac{\varepsilon}{4}$.

Copie anonyme - n°anonymat : 691024

Code épreuve : 287	Nombre de pages :	Session : 2022

Épreuve de : Maths II ESSEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Donc $\left(\bar{X}_n - p \geq \frac{\varepsilon}{2} - \frac{1}{2n}\right) \subset \left(\bar{X}_n - p \geq \frac{\varepsilon}{4}\right)$

D'où $P\left(\bar{X}_n - p \geq \frac{\varepsilon}{2} - \frac{1}{2n}\right) \leq P\left(\bar{X}_n - p \geq \frac{\varepsilon}{4}\right)$.

<u>Conclusion</u> : pour n assez grand, on a bien

$$\boxed{P\left(\bar{X}_n - p \geq \frac{\varepsilon}{2} - \frac{1}{2n}\right) \leq P\left(\bar{X}_n - p \geq \frac{\varepsilon}{4}\right)}$$

c) D'après les deux dernières questions on a :

$0 \leq P(|V_n - \sigma^2| \geq \varepsilon) \leq P\left(|\bar{X}_n - p| \geq \frac{\varepsilon}{4}\right)^4 \leq P\left(|\bar{X}_n - p| \geq \frac{\varepsilon}{4}\right)$

car $\left(|\bar{X}_n - p| \geq \frac{\varepsilon}{4}\right) \subset \left(|\bar{X}_n - p| \geq \frac{\varepsilon}{4}\right)$

En appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$P\left(|\bar{X}_n - p| \geq \frac{\varepsilon}{4}\right) \leq \frac{V(\bar{X}_n)}{\frac{\varepsilon^2}{16}} = \frac{\frac{\sigma^2}{n}}{\frac{\varepsilon^2}{16}} = \frac{16\sigma^2}{\varepsilon^2 n}$$

et comme $\frac{16\sigma^2}{\varepsilon^2 n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ alors un théorème

d'encadrement donne : $P\left(|\bar{X}_n - p| \geq \frac{\varepsilon}{4}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

En revenant à l'inégalité :
$0 \leq P(|V_n - \sigma^2| \geq \varepsilon) \leq P\left(|\bar{X}_n - p| \geq \frac{\varepsilon}{4}\right)$

Un nouveau théorème d'encadrement assure que :

$$\boxed{P(|V_n - \sigma^2| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0}$$

9.a) iii) D'après le théorème central limite,
$P(Z_n \leq (1+\varepsilon)x) = \Phi((1+\varepsilon)x)$

iii) $P\left(\cancel{\frac{\sqrt{V_n}}{\sigma} \geq 1+\varepsilon}\right) = \cancel{P\left(\frac{\sigma}{\sqrt{V_n}} \leq 1+\varepsilon\right)}$

9.B) $\Phi((1-\varepsilon)x) - \varepsilon \leq P(W_n \leq x) \leq \Phi((1+\varepsilon)x) + \varepsilon$.

Par encadrement, $P(W_n \leq x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \Phi(x)$

11.a) Si $X_i = 1$:

$Y_i = 1$.

Si $X_i = 0$:

$Y_i = T_i$ et $T_i(\Omega) = \{0; 1\}$.

~~$P(Y_i =$~~ Donc Y_i est bien une variable de Bernoulli.

$\cancel{P(Y_i = 1) = P((X_i = 1) \cup ((X_i = 0) \cap (T_i = 1)))}$ ~~(incompatibilité~~
$\cancel{= P(X_i = 1) + P(X_i = 0) P(T_i = 1)}$ ~~(incompatibilité et indépendance)~~

$\cancel{= p + q(1-p)}$.

$P(Y_i = 0) = P((X_i = 0) \cap (T_i = 0)) = q(1-p)$.

Conclusion : Y_i suit une loi de Bernoulli de paramètres $u = 1 - q(1-p)$.

Troisième partie :

12.a.i) $\int_0^1 u^2(1-u)^3 du = \int_0^1 u'(x) v(x) dx$

avec u et v C^1 sur $[0;1]$ définies par :

$u(x) = \frac{u^4}{4}$ $\quad v(x) = (1-u)^3$

$\quad v'(x) = -3(1-u)^2$

$u'(x) = u^3$

On intègre par parties :

$$\left[\frac{u^4(1-u)^3}{4} \right]_0^1 + \frac{3}{4} \int_0^1 (1-u)^2 u^4 dx$$

$$= \frac{3}{4} \int_0^1 (1-u)^2 u^4 dx$$

$$= \frac{3}{4} \left(\left[\frac{u^5}{5} (1-u)^2 \right]_0^1 + \frac{2}{5} \int_0^1 u^5(1-u) du \right)$$

$$= \frac{6}{20} \int_0^1 u^5(1-u) du$$

$$= \frac{6}{20} \left(\left[\frac{u^6}{6} (1-u) \right]_0^1 + \frac{1}{6} \int_0^1 u^6 du \right)$$

$$= \boxed{\frac{1}{20} \int_0^1 u^6 du}$$

ii) $\int_0^1 u^2(1-u)^3 du = \frac{1}{20} \int_0^1 u^6 du$

$$= \frac{1}{20} \left[\frac{u^7}{7} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{20 \times 7}$$

$$= \boxed{\frac{1}{140}}.$$

b) h est continue sur $]-\infty;0]$ et sur $[1;+\infty[$ car constante.
On a de même : $\forall z \in]0;1[$,
$u \mapsto u^3(1-u)^3$ continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale donc continue sur $[0;z]$.
Donc h est continue sur $]0;1[$.
<u>En 0 :</u> $\lim_{z \to 0} h(z) = \lim_{z \to 0} 140 \int_0^z u^3(1-u)^3 du$
$= 140 \int_0^0 u^3(1-u)^3 du$
$= 0$
$= h(0)$.
et d'après la 12.a.ii),
$\lim_{z \to 1} h(z) = \frac{140}{140}$
$= 1$
$= h(1)$.

c) $\forall z \in]-\infty;0] \cup [1;+\infty[$, $h(z) \in [0;1]$.
$\forall z \in]0;1[$,
$h(z) = 140 \int_0^z u^3(1-u)^3 du \leq 140 \int_0^1 u^3(1-u)^3$ $= \frac{140}{140}$
$= 1$.
donc $\forall z \in]0;1[$, $h(z) \leq 1$.
Ensuite, $\forall u \in [0;z]$, $0 \leq u^3(1-u^3) \leq 1$.
Donc par croissance de l'intégrale (fonction en jeu continue) $0 \leq h(z) \leq [u]_0^z = z < 1$.
La continuité de h sur $\mathbb{R}$ permet de conclure :
$\boxed{\forall z \in \mathbb{R},\ 0 \leq h(z) \leq 1}$.

B.i) Si $z \leq x$, alors $(z-x) \leq 0$ donc $\frac{1}{a_n}(z-x) \leq 0$.
donc $h\left(\frac{1}{a_n}(z-x)\right) = 0$ donc $g_n(z) = 1$.
(continuité)

Copie anonyme - n°anonymat : 691024

Code épreuve : 287 | **Nombre de pages :** | **Session :** 2022

Épreuve de : Maths II ESSEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Si $z > x + a_n$

alors $z - x > a_n$

~~donc par continuité~~

donc $\frac{(z-x)}{a_n} > 1$ ($a_n > 0$)

donc par continuité, $f\left(\frac{z-x}{a_n}\right) = 1$.

Donc $g_n(z) = 0$.

15.a i) $\sum_{i=1}^{n} Y_i$ est la somme de n loi normale centrée réduite.

On sait que si ~~$\forall(x)$~~ $Y_i \hookrightarrow N(0,1)$

alors $Y_1 + \dots + Y_n \hookrightarrow N(0, n)$ (indépendance).

car $E(Y_1 + \dots + Y_n) = 0$

$V(Y_1 + \dots + Y_n) = 1$.

$\boxed{\text{Conclusion: } \sum_{i=1}^{n} Y_i \text{ est une loi normale de paramètres } (0, n)}$

ii) On pose $X = \sum_{i=1}^{n} Y_i$.

On a T_n à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $P(T_n \leqslant x) = P\left(\frac{1}{\sigma_n} X \leqslant x\right)$

$= P\left(X < \sqrt{n}\, x \right)$

$= F_X\left(\sqrt{n}\, x\right).$

$F_X'\left(\sqrt{n}\, x\right) = f_X\left(\sqrt{n}\, x\right)$

$= \dfrac{1}{\sqrt{n}\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{\sqrt{n}\, x^2}{2n}}$

$=$

Loi normale de paramètre $\left(\cancel{\ldots}\right)$ $(0, \sqrt{n})$