ECRICOME PREPA 2022 - ECE - Economique

Mathématiques option économique Mathématiques

506961

MAS

ANTOINE

04/02/2003

Note de délibération : 20 / 20

Numéro d'inscription 506961

Né(e) le 04/02/2003

Signature MAS

Nom MAS

Prénom (s) ANTOINE

20 / 20

Ecricome Épreuve : MATHEMATIQUES OPTION ECO

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 01/10

Numéro de table 6

Exercice II

Partie I $\lim_{x\to 0^+} 2-1/x = -\infty$, $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ donc par produit $\lim_{x\to 0^+} (2-1/x)\ln(x) = +\infty$

Par composition, $\lim_{x\to 0^+} e^{(2-1/x)\ln(x)} = +\infty$. $\lim_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$

De plus $\lim_{x\to +\infty} (2-1/x)\ln(x) = +\infty$ donc par composition

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

2) a) h est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ comme somme de fonctions usuelles dérivables sur $\mathbb{R}^{+*}$.

$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $h'(x) = \frac{1}{x} + 2$

$= \frac{2x+1}{x} > 0 \; \forall x \in \mathbb{R}^{+*}$ car $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\begin{cases} 2x+1>0 \\ x>0. \end{cases}$

Donc h est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

b) h est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ (i) (2)c)

h est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ comme somme de fonctions continues sur $\mathbb{R}^{+*}$ (ii)

$\lim\limits_{x \to 1/2} h(x) = -\ln(2) < 0$, $\lim\limits_{x \to 1} h(x) = 1 > 0$. (iii)

Donc d'après le théorème de la bijection, h réalise une bijection strictement croissante de $]1/2;1[$ dans $]-\ln(2);1[$.

Comme $0 \in]-\ln(2);1[$, on déduit que

$\boxed{\text{l'équation } h(x)=0 \text{ admet une unique solution } \alpha \text{, avec } 1/2 < \alpha < 1}$

c) g est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ comme composée de telles fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^{+*}$ et :

$$\forall x > 0,\ g'(x) = \left(\frac{1}{x^2}\ln(x) + (2 - 1/x)\frac{1}{x}\right) e^{(2-1/x)\ln(x)}$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(\ln(x) + x(2 - 1/x)\right) e^{(2-1/x)\ln(x)}$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(\ln(x) + 2x - 1\right) g(x)$$

$$= \frac{1}{x^2}\, g(x)\, h(x)$$

~~$\forall x > 0$, $g'(x) = 1/x^2$~~ $\boxed{\forall x > 0,\ g'(x) = \frac{1}{x^2}\, g(x)h(x)}$

d) $\forall x > 0$, $\dfrac{g(x)}{x^2} > 0$ par produit.

D'après 2)b), $h(x) \geq 0$ $\forall x \geq \alpha$, et $\forall x \leq \alpha$, $h(x) \leq 0$.

Donc : h est croissante sur $[\alpha ; +\infty[$ et est décroissante sur $]-\infty ; \alpha]$.

3) On veut montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x) - x^2}{-x\ln(x)} = 1$.

$$\cancel{g(x) - x^2 = e^{2(1-1/x)\ln(x)} - x^2}$$

$$\cancel{= x^{2(1-1/x)} - x^2} = x^2\left(x^{1-1/x} - 1\right).$$

$$\cancel{\text{Donc } \frac{g(x) - x^2}{-x\ln(x)} = \frac{-x\left(x^{1-(1/x)} - 1\right)}{\ln(x)}}$$

$$= -x$$

$$g(x) - x^2 = e^{2(1-1/x)\ln(x)} - x^2$$

$$= x^{2(1-1/x)} - x^2$$

$$= x^{2-2/x} - x^2$$

Donc $\dfrac{g(x) - x^2}{-x\ln(x)} = \dfrac{-1}{\ln(x)}\left(x^{1-2/x} - x\right)$

$$= \frac{-1}{\ln(x)}$$

Partie II

4) Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, P_n$: " $U_{n+1} = g(U_n)$ "

Initialisation

$U_0 > 0$ d'après l'énoncé. P_0 est vérifiée.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose P_n : " ~~$U_{n+1} = g(U_n)$~~ $U_n > 0$ ". Montrons que P_{n+1} : " $U_{n+1} > 0$ "

~~$U_n > 0$ HR~~
~~$\Rightarrow g(U_n) > \ldots$ car g est strict~~
~~$\Rightarrow$~~

$U_n > 0$ HR
$\Rightarrow g(U_n) > 0$ car $U_n > 0$ ($g(U_n)$ est bien défini) et car g est strictement positive sur $\mathbb{R}^{+*}$
$\Rightarrow U_{n+1} > 0$.

Donc : P_{n+1} est vérifiée.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, P_n$: " $U_n > 0$ "

Numéro d'inscription 506961

Né(e) le 04/02/2003

Nom MAS

Prénom (s) ANTOINE

Signature MAS.

20 / 20

Ecricome Épreuve : MATHEMATIQUES OPTION ECO

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 02 / 10

Numéro de table 6

5)
```
function L=f(u0, n)
 L = [u0]
 for k = 1 : n
 u(k) = exp((2 - 1/u(k-1))*log(u(k-1))
  L = [L, u(k)]
 end
 endfunction.
```

6) a) $\forall x > 0$:

x	0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$+$	
$\ln(x)$		$-$		$+$	
$(x-1)\ln(x)$		$+$		$+$	

Donc $\forall x > 0, (x-1)\ln(x) > 0$

b) $\forall x > 0, \dfrac{g(x)}{x} = \dfrac{e^{(2-1/x)\ln(x)}}{x} = \dfrac{\left(e^{\ln(x)}\right)^{(2-1/x)}}{x} = x^{2-1/x-1} = x^{1-1/x}$.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

$\forall x \geq 0, \ \frac{g(x)}{x} = e^{x\ln(\frac{x-1}{x})} \cancel{= e^{x}}$. $\forall x \geq 1, \ \frac{x-1}{x}$

c) $\forall x > 0, \ \frac{g(x)}{x} \geq 1 \iff g(x) \geq x$ car $x > 0$.

$g(1) = e^{2 \times \ln(1)} = e^{0} = 1$.

Donc $g(x) = x$ admet 1 comme solution. Posons $f(x) = g(x) - x$.

$\forall$

7) Comme d'après 4), $U_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$, on a d'après 6) c),

$\forall n \in \mathbb{N}, \ g(U_n) \geq U_n$ en posant $x = U_n$.

$\iff U_{n+1} \geq U_n$

Donc : $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante

8) c) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n : " $U_n \in [1/2 ; 1]$.

Initialisation : $U_0 \in [1/2 ; 1]$ (énoncé). P_0 est vérifiée.
Hér. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose P_n : " $U_n \in [1/2 ; 1]$ ". Montrons que P_{n+1} : " $U_{n+1} \in [1/2 ; 1]$ ".

$1/2 \leq U_n \leq 1$.
$\Rightarrow$

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $g(U_n) \geq U_n$ 7) c)
$\Rightarrow U_{n+1} \geq U_n$
Donc $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

De plus, d'après c), $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée par 1.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 1$

Donc d'après le TLM, $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Par continuité de g sur $\mathbb{R}^{+*}$, on a d'après le théorème du point fixe avec $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} U_n$, $g(\ell) = \ell \Leftrightarrow \ell = 1$.

9) a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n : " $U_n \geq 1$ "
Initialisation : $U_0 \geq 1$ d'après l'énoncé.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose P_n " $U_n \geq 1$ ". Montrer que P_{n+1}.

$U_n \geq 1$ HR
$\Rightarrow g(U_n) \geq g(1)$ car g est strictement croissante sur $]\alpha ; +\infty[$ et que $\alpha < 1$
$\Rightarrow U_{n+1} \geq 1$. P_{n+1} est vérifiée.

Donc : D'après le principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n " $U_n \geq 1$ "

b) g étant croissante sur $[1 ; +\infty[$, et $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$,
on déduit donc que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas majorée. (on pourrait le montrer par l'absurde)..
De plus $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante donc :
D'après le TLM,

$(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$

10)

Numéro d'inscription 506961

Né(e) le 04/02/2003

Nom MAS

Prénom (s) ANTOINE

Signature MAS

20 / 20

Ecricome Épreuve : MATHEMATIQUES OPTION ECO

Sujet 1 ou 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 03/10

Numéro de table 6

Partie III $x \to \ln(x)$ est C^2 sur $\mathbb{R}^{+*}$, donc $(x,y) \to \ln(x)$ est C^2 sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$.
$(x,y) \to x$ est C^2 sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$.

$x \to 1/x$ est C^2 sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc $(x,y) \to (y - 1/x)$ est C^2 sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$.

Donc $(x,y) \to y\ln(x) - \frac{\ln(x)}{x}$ est C^2 sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$. à valeurs dans $\mathbb{R}$.

De plus, $x \to e^x$ est C^2 sur $\mathbb{R}$ donc :

f est C^2 sur l'ouvert $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$

12) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$, comme f est C^2 sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$,

$$\partial_1 f(x,y) = \left(\frac{y}{x} - \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\ln(x)}{x^2} \right) \right) e^{((y - 1/x)) \ln(x)}$$

$$= \left(\frac{xy - 1 + \ln(x)}{x^2} \right) e^{(y - 1/x)\ln(x)}.$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

Et $\partial_2 f(x,y) = \ln(x) e^{((y-1/x)\ln(x))}$

$= \underline{\underline{\ln(x) f(x,y)}}$

13) a point critique $\Leftrightarrow \begin{cases} \partial_1 f(x,y) = 0 \\ \partial_2 f(x,y) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\ln(x) + xy - 1}{x^2} f(x,y) = 0 \\ \ln(x) f(x,y) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \ln(x) + xy - 1 = 0 \\ \ln(x) = 0 \end{cases}$ car $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$, $f(x,y) \neq 0$ et car $x \neq 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1. \\ x = 1 \end{cases}$

Donc $\underline{\underline{a = (1,1)}}$, et a est l'unique point critique de f

14) Comme f est C^2 sur $\mathbb{R}^{+*}$,

$\partial_{2,2} f(x,y) = \ln(x)\, \partial_2 f(x,y)$. $\partial_{2,2} f(1,1) = \ln(1)\, \partial_2 f(1,1)$
$= 0$. Car $\ln(1) = 0$.

~~$\partial_{1,1} f(x,y) = \frac{1}{x}$~~

$\cancel{\partial_{2,1} f(x,y)} = \partial_{1,2} f(x,y) = \frac{x}{x^2} f(x,y) + \frac{\ln(x)+xy-1}{x^2}\, \partial_2 f(x,y)$.

$= \frac{f(x,y)}{x} + \frac{\ln(x)+xy-1}{x^2}\, \partial_2 f(x,y)$.

Comme $f(1,1) = 1$ et que $\ln(1) + 1 - 1 = 0$,
$\partial_{2,1} f(1,1) = \partial_{1,2} f(1,1) = 1$.

De même, $\partial_{1,1} f(1,1) = 2$

$$\boxed{\text{Donc } \nabla^2 f(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

15) $\det(\nabla^2 f(1,1) - \lambda I) = (2-\lambda)(-\lambda) - 1$
$= -2\lambda + \lambda^2 - 1$
$= \lambda^2 - 2\lambda - 1$

On a $\lambda_1 \lambda_2 = -1$, et $\lambda_2 + \lambda_1 = \frac{2}{1}$. Les deux valeurs propres sont de signes contraires, donc f n'admet pas en a d'extremum local

16) Supposons que f admet un extremum global sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$.
Alors cet extremum est local. Or, d'après 15), f n'admet pas d'extremum local. Donc f n'admet pas d'extremum global sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$

Exercice III

Partie I

1) a) Pour X_n :
On répète n fois une expérience de Bernoulli de manière identique et indépendante de succès " mettre le jeton dans U_1 " de probabilité $1/3$ (car équiprobabilité, et on a 3 urnes). Donc comme X_n compte le nombre de succès,

$X_n \sim B(n, 1/3)$

De même, comme c'est le même processus pour Y_n et Z_n,
$Y_n \sim B(n, 1/3)$, et $Z_n \sim B(n, 1/3)$

b) $P(X_n = 0) = P(\bigcap_{k=1}^{n} \overline{A_k})$ avec A_k : " le $k$ième jeton va dans U_1 "

$= \prod_{k=1}^{n} P(\overline{A_k})$ indépendance

Numéro d'inscription | B 0 6 9 6 1
Né(e) le | 04 / 02 / 2003
Signature | MAJ
Nom | MAJ
Prénom (s) | ANTOINE

20 / 20

Ecricome Épreuve : MATHS

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 04 / 10

Numéro de table 006

$= \prod_{k=1}^{n} 2/3 = (2/3)^n$. $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X_n=0) = (2/3)^n$

et $\forall n \in \mathbb{N}, P(X_n=n) = P(\bigcap_{k=1}^{n} A_k)$

$= \prod_{k=1}^{n} P(A_k)$ indépendance

$= \prod_{k=1}^{n} 1/3$

$= (1/3)^n$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X_n=n) = (1/3)^n$

c) $(Y_n=0) \cap (Z_n=0)$ signifie qu'aucun des n jeton n'est aller dans U_2, ni U_3. ~~durant les n premiers lancers~~.
Ces n jetons sont donc allés dans U_1, donc
$(Y_n=0) \cap (Z_n=0) =$ ~~(X_1)~~ $(X_n=n)$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X_n=n) = P(Y_n=0) \cap (Z_n=0)$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

d) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $V_n = (X_n = 0) \cup (Y_n = 0) \cup (Z_n = 0)$

(Au moins une des U_1, U_2, U_3 est vide, donc n'a aucun jeton.

e) $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$P(V_n) = P(X_n = 0) \cup (Y_n = 0) \cup (Z_n = 0)$

$= P(X_n = 0) + P(Y_n = 0) + P(Z_n = 0) - P(X_n = 0) \cap (Y_n = 0) - P(X_n = 0) \cap (Z_n = 0)$

$- P(Y_n = 0) \cap (Z_n = 0) + P(Z_n = 0) \cap (X_n = 0) \cap (Y_n = 0)$ (CRIBLE)

$= 3P(X_n = 0) - 3P(Z_n = 0) \cap (Y_n = 0) + 0$

Car X_n, Y_n et Z_n suivent la même loi, et car $(Z_n = 0) \cap (X_n = 0) \cap (Y_n = 0) = \emptyset$

(les n jetons vont forcement dans une urne...

$= 3P(X_n = 0) - 3P(X_n = n)$ Car si aucun jeton ne va ni dans U_2, ni dans U_3, les n vont donc dans U_1.

$= 3\left(\frac{2}{3}\right)^n - 3\left(\frac{1}{3}\right)^n$ ~~Car~~ d'après 1)b)

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$P(V_n) = 3\left(2/3\right)^n - 3\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $V = \bigcap_{n=1}^{+\infty} V_n$. (i) par que au moins une urne reste toujours vide si on répartit une infinité de jeton

Or, $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante d'événements. (ii)

Donc $P(V) = P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} V_n \right)$ d'après (i)

$= \lim_{n \to +\infty} P(V_n)$ d'après (ii) et le corollaire du théorème de la limite monotone

$= 0$

Car $\frac{1}{3} \in]-1;1[$ et $2/3 \in]-1;1[$.

Donc : $P(V) = 0$

3) a) while $x=0, y=0, z=0$

liste (i) =

$t = n.$

b)

4) $T(\Omega) = [\![3 ; +\infty [\![$ car si on répartit 2 jetons ou 1, au moins une urne sera vide.

5) $\forall n \in T(\Omega)$, $P(T=n) = P((V_{n-1}) \cap (\overline{V_n}))$

Comme $V_n \subset V_{n-1}$, on a :

$\forall n \geq 3, P(T=n) = P(V_n) - P(V_{n-1})$

6) $\cancel{\forall n \geq 3, P(T=n) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^n - 3\left(\frac{1}{3}\right)^n}$

$\cancel{\forall n \geq 3,\ nP(T=n) = 3\left(n\left(\frac{2}{3}\right)^n - n\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)}$

6) $\forall n \geq 3$,

$$nP(T=n) = 3\left(n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} n\right) - 3\left(n\left(\frac{2}{3}\right)^n - n\left(1/3\right)^n\right)$$

Donc $\sum_{n \geq 3} nP(T=n)$ converge, comme somme de séries géométriques de paramètre $1/3 \in]-1;1[$ et $2/3 \in]-1;1[$ convergentes.

Donc $E(T)$ existe, et :

$$\forall n \geq 3,\ \sum_{n=3}^{+\infty} nP(T=n) = 3\left(\sum_{n=3}^{+\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \frac{2}{3}\sum_{n=3}^{+\infty} n(2/3)^{n-1} - \sum_{n=3}^{+\infty} n(1/3)^{n-1}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{3}\sum_{n=3}^{+\infty}(1/3)^{n-1} n\right)$$

$$= \cancel{3\left(\left(\frac{1}{(1-2/3)^2} - \frac{2}{3}\ \frac{1}{1-2}\right.\right.}$$

$$= 3\left(\left(\frac{1}{(1-2/3)^2} - \frac{4}{3} - 1\right) - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{(1-2/3)^2} - \frac{4}{3} - 1\right) - \left(\frac{1}{(1-1/3)^2} - \frac{2}{3} - 1\right)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{(1-1/3)^2} - \frac{2}{3} - 1\right)\right)$$

Numéro d'inscription 506961

Né(e) le 04/02/2003

Signature MAJ

Nom MAJ

Prénom (s) ANTOINE

20 / 20

Ecricome Épreuve : MATHS

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 05 / 10

Numéro de table 006

$$= 3\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{(1-2/3)^2} - \frac{4}{3} - 1\right) - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{(1-1/3)^2} - \frac{2}{3} - 1\right)\right)$$

$$= \frac{9}{1} - \frac{4}{3} - 1 - 2\left(\frac{4}{9} - \frac{2}{3} - 1\right)$$

$$= 9 - \frac{4}{3} - 1 - \frac{8}{9} + \frac{4}{3} + 2$$

$$= \frac{10 \cancel{-12} - 8 + \cancel{12}}{9}$$

$$= \cancel{10}\ \frac{90 - 8}{9} = 82/9.$$

Donc $\boxed{E(T) \text{ existe et } E(T) = 82/9}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

Partie III

7)a) $W_2(\Omega) = \{1, 2\}$ (il n'y a pas 3 car au moins une urne n'est pas vide.

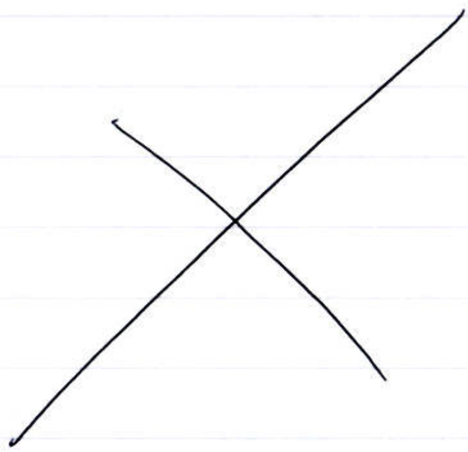
~~$\forall k \in \mathbb{N}^*$~~

~~$P(W_2 = 0) \cap (X_2 = 0) = P($~~

b)

c)

d)



8) $\boxed{W_n(\Omega) = \{0, 1, 2\}}$ Car il ne peut pas rester 3 urnes vides après la répartition des n jetons !

9) a) $\forall i \in [\![1;3]\!]$, $E(W_{n,i})$ existe car son support est fini ($W_{n,i}(\Omega) = \{0;1\}$), et

$\forall i \in [\![1;3]\!]$,

$E(W_{n,i}) = 0P(W_{n,i} = 0) + P(W_{n,i} = 1)$

$= P(W_{n,i} = 1) = P(X_n = 0)$ si $i = 1$, $P(Z_n = 0)$ si $i = 3$, $P(Y_n = 0)$ si $i = 2$

$= \left(2/3\right)^n$ car X_n, Y_n et Z_n suivent la même loi.

Donc $\boxed{E(W_{n,i}) = \left(2/3\right)^n}$

~~$\forall n \in \mathbb{N}$~~ $\forall n \geq 3$,

b) $\boxed{W_n = \underbrace{W_{n,1}}_{} + W_{n,2} + W_{n,3}}$

vaut 1 si après n répartition, U_1 est vide. De même pour $W_{n,2}$ et $W_{n,3}$.

c) $\forall n \geq 3$, $E(W_n) = E(W_{n,1} + W_{n,2} + W_{n,3})$

$= E(W_{n,1}) + E(W_{n,2}) + E(W_{n,3})$ linéarité, et

les espérances existent donc $E(W_n)$ existe.

Numéro d'inscription 506967

Né(e) le 04/02/2003

Signature MAJ

Nom MAJ

Prénom (s) ANTOINE

20 / 20

Ecricome Épreuve : MATHS

Sujet 1 ou 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 06/10

Numéro de table 066

Donc : $\forall n \geq 3, E(W_n) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^n$ d'après 9)

10) $\forall n \in \mathbb{N}^*, P((X_n = n) \cap (W_n = 2)) = P(X = n) P_{(X=n)}(W_n = 2)$

(Formule des probabilités composées, avec $(X_n = n) \cap (W_n = 2) \neq \emptyset$.

$= P(X = n)$ car si $(X_n = n)$, $(W_n = 2)$. (si toutes les ~~boîtes~~ jetons vont dans U_1, aucun ne va dans U_2 ni U_3).

$= \left(\frac{1}{3}\right)^n$ d'après 1)b).

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*, P((X_n = k) \cap (W_n = 2)) = \left(\frac{1}{3}\right)^n$

$\forall k \in [\![1; n-1]\!], (X_n = k) \cap (W_n = 2) = \emptyset$ car il est impossible qu'il y ait des ~~boules~~ jetons qui ne vont ~~n'allant~~ pas dans U_1 et que U_2 et U_3 ~~ne~~ soient ~~pas~~ vides.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

Donc : $\forall k \in [\![1;n-1]\!],\ P(X_n=k)\cap(W_n=2) = 0$

11) $\forall k \in [\![1;n-1]\!],\ P(X_n=k)\cap(W_n=1)$ ~~= P(X~~

$= P((X_n=k)\cap(Z_n=n-k)\cup(X_n=k)\cap(Y_n=n-k))$

Pour que l'une des urnes U_2 ou U_3 soit vide

$= P(X_n=k)\cap(Z_n=n-k) + P(X_n=k)\cap(Y_n=n-k)$

incompatible

$$= \underbrace{\frac{1}{3^n}\binom{n}{k}}\ + \underbrace{\binom{n}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^n}$$

Car il y a $\binom{k}{n}$ façons d'avoir dans l'urne U_1 avec k jetons et pour U_3 on a avoir $n-k$ (avec indépendance !)

↳ Car Y_n et Z_n suivent la même loi

$$= \frac{2}{3^n}\binom{n}{k}$$

Donc : $\forall k \in [\![1;n-1]\!],\ P(X_n=k)\cap(W_n=1) = \dfrac{2\binom{n}{k}}{3^n}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$P(X_n=n)\cap(W_n=1) = 0$ Car il est impossible que les n jetons aillent dans U_1 et qu'une seule urne soit vide (si les n jetons vont dans U_1, 2 urnes sont vides !).

12) $(X_n W_n)(\Omega)$ est fini donc $E(X_n W_n)$ existe.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$E(X_n W_n) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{2} P((X_n = k) \cap (W_n = i))\, ik$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k P((X_n = k) \cap (W_n = 1)) + \sum_{k=1}^{n} 2n\, P((X_n = k) \cap (W_n = 2))$$ car si $i=0$, la ~~som~~ somme vaut 0.

$$= \sum_{k=1}^{n-1} k\, P((X_n = k) \cap (W_n = 1)) + 2n\, P((X_n = n) \cap (W_n = 2))$$

~~Don~~ Car $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P((X_n = n) \cap (W_n = 1)) = 0$ d'après 11)

et $\forall k \in [\![1 ; n-1]\!]$, $P((X_n = k) \cap (W_n = 2)) = 0$ 10)

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $E(X_n W_n) = 2n\, P((X_n = n) \cap (W_n = 2)) + \sum_{k=1}^{n-1} k P((X_n = k) \cap (W_n = 1))$

13) ~~$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $E(X_n W_n) = 2n \sum_{k=}$~~

13) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $E(W_n X_n) = 2n \left(\frac{1}{3}\right)^n + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2k \binom{n}{k}}{3^n}$

$$= 2n \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{2n}{3^n} \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k-1}$$

$$= 2n \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{2n}{3^n} 2^{n-1}$$

$$= 2n \left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n n.$$

$\forall n$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $Cov(X_n, W_n) = E(X_n W_n) - E(X_n)E(W_n)$

$$= n\left(2/3\right)^n - \frac{82}{9} \times 3\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^n\left(n - \frac{82}{3}\right).$$

Numéro d'inscription 569961

Né(e) le 04/02/2003

Signature

Nom MAS

Prénom (s) ANTOINE

20 / 20

Ecricome Épreuve : MATHS

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 07/10

Numéro de table 006

Exercice I

Partie 1

~~1) $F = \{ A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),$~~

1) $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}, \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2. \right\}$

$= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$

$= \text{Vect}\left(I_3, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$

Donc F est bien un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ $(F \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R}))$, et comme I_3 et $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, ils forment une base de F.

Donc $F = \text{vect}\left(I_3, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ et $\dim F = 2$

~~2) Posons~~ $\cancel{M = \begin{pmatrix} c & d & e \\ f & g & h \\ i & j & k \end{pmatrix}}$ ~~, les coefficients étant des réels.~~

$$\cancel{M \in G \iff \begin{pmatrix} c & d & e \\ f & g & h \\ i & j & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d & e \\ f & g & h \\ i & j & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d & e \\ f & g & h \\ i & j & k \end{pmatrix}}$$

$$\cancel{\iff \begin{pmatrix} c^2+df+ei & cd+gd+ej & ce+dh+ek \\ fc+gf+hi & fd+g^2+hj & fe+gh+hk \\ ic+jf+ik & id+gj+kj & \end{pmatrix}}$$

2) $I_3^2 = I_3$ donc $I_3 \in G$.
Or, $I_3 + I_3 = 2I_3$ et $(2I_3)^2 = 4I_3 \neq 2I_3$.

Donc : G n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

3) a) $A^2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$\cancel{= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 6(-3) & -3 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}}$

$\cancel{= \frac{1}{3}(}$

$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$= A$.

$A^2 = A$ donc $A \in G$. (i)

b) ~~$A^2 = A$ donc~~ De plus, en posant $a = 2/3$ et $b = -1/3$, on a bien : $A \in F$. (ii)

D'après (i) (ii), $A \in F \cap G$

b) $A^2 = A$ donc $A^2 - A = 0$. $P(x) = x^2 - x$ est un polynôme annulateur de A

c) $Sp(A) \subset \{0 ; 1\}$ (racines de P). Posons $E_\lambda(A)$ le sous-espace propre associé à λ. (Si λ n'est pas valeur propre, $E_\lambda(A) = \{0\}$)

En 0 :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_0(A) \iff \begin{cases} 2/3\,x - 1/3\,y - 1/3\,z = 0 \\ -1/3\,x + 2/3\,y - 1/3\,z = 0 \\ -1/3\,x - 1/3\,y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x = y + z \\ 2y = z + x \\ 2z = x + y \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = y = z. \end{cases}$$

Donc $0 \in Sp(A)$ et $E_0(A) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Ce vecteur étant

non nul, il forme une base de $E_0(A)$.

De plus, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1(A) \iff \begin{cases} -(2/3)x - (1/3)y - (1/3)z = 0 \\ -(1/3)x - (1/3)y - (1/3)z = 0 \\ -(1/3)x - (1/3)y - (1/3)z = 0 \end{cases}$

$$\iff x = y - z.$$

Donc $1 \in Sp(A)$ et $E_1(A) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

Ces deux vecteurs étant non colinéaires, ils forment une base

Numéro d'inscription 506961

Né(e) le 04/02/2003

Nom MAS

Prénom (s) ANTOINE

Signature MAS

20 / 20

Ecricome Épreuve : MATHS

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 08/10

Numéro de table 006

de $E_1(A)$ (car ils forment une famille libre..)

Donc $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_1(A)$

Partie III

4)a) $M \in G \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} = M$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^2+2b^2 & 2ab+b^2 & 2ab+b^2 \\ 2ab+b^2 & a^2+2b^2 & 2ab+b^2 \\ 2ab+b^2 & 2ab+b^2 & a^2+2b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+2b^2 = a \\ 2ab+b^2 = b \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+2b^2 = a. \\ b^2+2ab-b = 0 \end{cases}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 2b^2 = a \\ b(b+2a-1) = 0 \end{cases}$$

Donc $\Pi \in G \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+2b^2 = a \\ b(b+2a-1) = 0 \end{cases}$

4)b) Comme $\Pi \in F$ et $\Pi \in G \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+2b^2 = a \\ b(b+2a-1) = 0 \end{cases}$,

On a :

$\Pi \in F \cap G \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+2b^2 = a \\ b(b+2a-1) = 0 \end{cases}$ (S)

Si $b = 0$, $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = 0 \text{ ou } a = 1 \end{cases}$ (1)

Si $b \neq 0$, $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+2b^2 = a \\ b+2a-1 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+2b^2 - a = 0 \\ b+2a-1 = 0 \end{cases}$$

~~$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+2b^2-a = 0 \\ 1 \end{cases}$~~

$L_2 + L_1 \to L_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 2b^2 = a \\ \cancel{b+2(a}^2 b = 1 - 2a \end{cases}$$

$$\cancel{\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 2b^2 = a \\ \end{cases}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 2(1-2a)^2 = a \\ b = 1 - 2a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 2(1 - 4a + 4a^2) = a \\ b = 1 - 2a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9a^2 + 2 - 8a = a \\ b = 1 - 2a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9a^2 - 9a + 2 = 0 \quad (*) \\ b = 1 - 2a. \end{cases}$$

En (*) haut : $\Delta = b^2 - 4ac = 81 - 72 = 9.$

$$\cancel{\text{Donc } a_1 = \frac{-9-3}{18} \quad a_2 = \frac{-9+3}{18} \quad a_1 = -2/3 \quad a_2 = \frac{-6}{18} = -1/3.}$$

$\cancel{\text{Si } a = -2/3,\ b = 1}$

Donc $a_1 = \dfrac{9-3}{18} = \dfrac{1}{3}$ $\quad a_2 = \dfrac{9+3}{18} = 2/3.$

Si $a = 1/3$, $b = 1 - 2a = 1/3$. (2)

Si $a = 2/3$, $b = 1 - 2a = -1/3$. (3)

D'après (1), (2), (3),

$$M \in F \cap G \iff \begin{cases} a = 1/3 \text{ et } b = 1/3 & (2) \\ \text{ou } a = 0 \text{ et } b = 0 & \\ \text{ou } a = 1 \text{ et } b = 0 & (1) \\ \text{ou } a = 2/3 \text{ et } b = -1/3 & (3) \end{cases}$$

Les matrices correspondantes (en remplaçant a et b par ces valeurs) sont A, O_3, I_3 et $I_3 - A$.

Donc : $F \cap G = \{ I_3, O_3, A, I_3 - A \}$

5) $\text{Card}(A, B) = 2 = \dim F$ (i)

$A \in F$ et $B \in F$ (ii) d'après 4)

~~Soient $(\lambda_1 \ldots \lambda_9) \in \mathbb{R}^9$ tel que~~ Soient $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\lambda_1 B + \lambda_2 A = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1/3\lambda_1 + 2/3\lambda_2 = 0 \\ 4/3\lambda_1 - 1/3\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -2\lambda_2 \\ 4\lambda_1 = \lambda_2 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

Numéro d'inscription 506961

Né(e) le 04/02/2003

Signature

Nom MAJ

Prénom (s) ANTOINE

20 / 20

Ecricome Épreuve : MATHS

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 09/10

Numéro de table 006

Donc (A,B) est libre dans F. (iii)

D'après (i), (ii), (iii),

(A,B) est une base de F

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 4/3 & 4/3 \\ 4/3 & 1/3 & 4/3 \\ 1/3 & 1/3 & 4/3 \end{pmatrix}$$

6)a) $\alpha A + \beta B = \dfrac{4a-b}{9}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \dfrac{a+2b}{9}\cancel{\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}}$

$\cancel{= \dfrac{1}{9}\left(8a - 2b + a + 4b \quad C \quad C\right)}$

$\cancel{\text{Avec } C = 8a + a - 2b + 4b}$

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9a & 9b & 9b \\ 9b & 9a & 9b \\ 9b & 9b & 9a \end{pmatrix}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

$= \Pi$.

$\boxed{\text{Donc } \Pi = \alpha A + \beta B}$

b) $AB = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 4/3 & 4/3 \\ 4/3 & 1/3 & 4/3 \\ 1/3 & 1/3 & 4/3 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -3 & -3 & -3 \\ -6 & -3 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix}$

$BA = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -6 & 3 & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$

6) b) $AB = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -6 & 3 & 3 \\ 3 & -6 & 3 \\ 3 & 3 & -6 \end{pmatrix} = \cancel{\frac{1}{3}} \quad A.$

$BA = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \cancel{\frac{1}{3}} \quad A.$

6) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n : " $M^n = \alpha^n A + \beta^n B$ "

I | $M^0 = I$ et $\alpha^0 A + \beta^0 B = A + I_3 - A = I_3$. P_0 vérifiée.

HR : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose P_n. Montrons que P_{n+1}.

$M^{n+1} = M^n(\alpha A + \beta B)$

$= (\alpha^n A + \beta^n B)(\alpha A + \beta B)$

$= \alpha^{n+1} A^2 + \alpha^n \beta AB + \alpha\beta^n BA + \beta^{n+1} B^2$

$= \alpha^{n+1} A + \alpha^n \beta AB + \alpha\beta^n BA + \beta^{n+1}(I_3 - 2A + A^2)$

$= \alpha^{n+1} A + \alpha^n \beta AB + \alpha\beta^n BA + \beta^{n+1}(I_3 - A)$ car $A^2 = A$.

$= \alpha^{n+1} A + \alpha^n \beta AB + \alpha\beta^n BA + \beta^{n+1} B.$

$= \alpha^{n+1} A + \beta^{n+1} B$ d'après 6) c).

7)a) Si $\alpha = \beta = 0$, $M = 0$ donc M n'est pas inversible

Sinon, $M = \alpha A + \beta B$

Si $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$, les colonnes de M forment une famille libre de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

Donc : $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$ ssi M inversible

Numéro d'inscription 506961

Né(e) le 04/02/2003

Nom MAJ

Prénom (s) ANTOINE

Signature

20 / 20

Ecricome Épreuve : MATHS

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 10/10

Numéro de table 066

Partie III

8) $I_3 - T = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

~~= -3A~~

=

D'après 6)a), avec $a = -2$, et $b = -1$,

$$I_3 - T = \frac{-7}{3} A + \left(\frac{-4}{3} B\right)$$

$$I_3 - T = \frac{-7}{3} A - \frac{4}{3} B$$

9) Comme $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$, avec 7)b) on a :

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

$(I_3 - T)^{-1} = \alpha^{-1} A + \beta^{-1} B$

$(I_3 - T)^{-1} = \frac{-3}{7} A - \frac{3}{4} B$

Donc $(I_3 - T)^{-1} = \frac{-3}{7} A - \frac{3}{4} B$

10) $TL + Y = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 3a + b + c \\ a + 3b + c \\ a + b + 3c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 3a + b + c + 1 \\ a + 3b + c - 1 \\ a + b + 3c \end{pmatrix}$

Donc $L = TL + Y \iff \begin{cases} 3a + b + c + 1 = a \\ a + 3b + c - 1 = b \\ a + b + 3c = c \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 2a + b + c + 1 = 0 \\ a + 2b + c - 1 = 0 \\ a + b + 2c = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b + c + 1 = 0 & \\ 3b + c - 3 = 0 & 2L_2 - L_1 \to L_2 \\ b + 3c - 1 = 0 & 2L_3 - L_1 \to L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b + c = -1 & \\ 3b + c = 3 & \\ 8c = 0 & 3L_3 - L_2 \to L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ b = 1 \\ a = -1. \end{cases}$$

Donc $L = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

11) $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} - L = T X_n + Y - L$

$= T X_n + Y - TL - Y$

$X_{n+1} - L = T(X_n - L)$ $(\ast\ast)$

Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n : " $X_n - L = T^n (X_0 - L)$ "

I | $X_0 - L = I(X_0 - L) = T^0 (X_0 - L)$. P_0 vérifiée.

HR Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose P_n. Montrons que P_{n+1}.

$X_{n+1} - L = T(X_n - L)$ d'après $(\ast\ast)$

$= \cancel{T(X_0} = T\, T^n (X_0 - L)$ HR.

$= T^{n+1}(X_0 - L)$. P_{n+1} vérifiée.

Conclusion : d'après le principe de récurrence,

$\forall n \in \mathbb{N}$, P_n : " $X_n - L = T^n(X_0 - L)$ "

12) $\forall n \in \mathbb{N}$,

$X_n = T^n(X_0 - L) + L$

$= (I_3 - (I_3 - T))^n (X_0 - L) + L$

$X_n = \left(I_3 + \frac{7}{3}A + \frac{4}{3}B\right)^n (X_0 - L) + L$