Copie anonyme - n°anonymat : 691024

D1-00125
691024
Maths E

Code épreuve : 296	Nombre de pages : 26	Session : 2022

Épreuve de : Maths E emlyon

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 1

Partie A

1) $X(\Omega) = \mathbb{N}$

donc $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$

$P(Y=k) = P(X+1=k)$

$= P(X = k-1)$

$= pq^{k-1}$ car $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ k-1 \in X(\Omega)$

$= p(1-p)^{k-1}$

Conclusion : Y suit une loi géométrique de paramètre p.

2) On a $Y = X+1$ donc $X = Y-1$.

Comme Y admet une espérance et une variance alors X aussi et on a ; par linéarité de l'espérance :

$E(X) = E(Y) - 1$

$= \frac{1}{p} - 1$

$= \boxed{\frac{1-p}{p}}$

et $V(X) = V(Y-1)$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$= V(Y)$

$= \boxed{\frac{1-p}{p^2}}$

3) 2. Y = X+1
3. while

Partie B

5 a) u_0 est la probabilité que le joueur n'ait plus de jetons après 0 activation de la machine.
Or, d'après l'énoncé $Z_0 = 1$ ce qui signifie qu'avant toute activation le joueur débute avec un jeton. Donc il est impossible que le joueur n'ait aucun jeton avant de démarrer la machine.
D'où $\boxed{u_0 = 0}$.

u_1 est la probabilité que le joueur n'ait ~~qu'un~~ plus de jeton après la première activation de la machine.
Comme il dispose d'un jeton avant la première activation, il faut donc pour que l'événement soit réalisé que la machine reverse au joueur X_1 jeton avec $X_1 = 0$.
D'où $u_1 = P(Z_1 = 0)$
$= P(X_1 = 0)$
$= P(X = 0)$ car X et X_1 suivent la même loi

$= q^0 p$

$= p.$

D'où $\boxed{u_1 = p}$

b) $[Z_n = 0]$ signifie qu'après la $n$ème activation le joueur n'a plus de jeton.

$[Z_{n+1} = 0]$ signifie qu'après la $(n+1)$ème activation, le joueur n'a plus de jeton.

Or, s'il n'a plus de jeton après la $n$ème activation, le joueur ne peut plus mettre de jeton dans la machine donc il n'a également plus de jeton après la $(n+1)$ème activation.

D'où $\boxed{[Z_n = 0] \subset [Z_{n+1} = 0]}$.

Par croissance de la probabilité,

$P(Z_n = 0) \leq P(Z_{n+1} = 0)$.

c'est-à-dire :

$P(Z_{n+1} = 0) - P(Z_n = 0) \geq 0$.

d'où $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$.

$\boxed{\text{D'où } (u_n) \text{ est croissante c'est-à-dire } (u_n) \text{ est monotone.}}$

Enfin, on a $u_n = P(Z_n = 0)$.

C'est une probabilité.

Donc (u_n) est majorée par 1.

$\boxed{\text{(u_n) est croissante et majorée : par le théorème de la limite monotone, } (u_n) \text{ converge.}}$

6) R est la probabilité que le joueur finisse par ne plus avoir de jeton donc soit cela arrive après la 1ère activation soit après la 2ème etc...

D'où $R = \bigcup_{n=0}^{+\infty} Z_n$

donc $P(R) = P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} u_n\right) = P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} P(Z_n=0)\right)$

Or, $([Z_n=0])_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante

d'évènements d'après la 5.b.
Donc d'après le théorème de la limite monotone,

$$P(R) = P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} P(Z_n=0)\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} P(Z_n=0)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} u_n$$

$$= \ell.$$

$\boxed{\underline{\text{Conclusion}}: P(R) = \ell.}$

7.a) Soit $k\in\mathbb{N}$
$(Z_2=0)$ sachant $(Z_1=k)$ signifie qu'avant la seconde activation, le joueur dispose de k jetons puis après celle-ci, il perd tous ses jetons.
Sachant que la machine lui renvoit $X_1+\ldots+X_k$ jetons et que $\forall i\in[\![1,k]\!]$, $X_i(\Omega)=\mathbb{N}$, alors toutes les variables $X_1, \ldots, X_k$ doivent être nulles.

D'où : $P_{(Z_1=k)}(Z_2=0) = P(X_1+\ldots+X_k=0)$

$$= P((X_1=0)\cap\ldots\cap(X_k=0))$$

$$= \prod_{i=1}^{k} P(X_i=0) \quad \text{(indépendance)}$$

$$= \prod_{i=1}^{k} P(X=0) \quad \text{car } X \text{ et } X_i \text{ suivent la même loi}$$

$$= \prod_{i=1}^{k} P(Z_1=0)$$

$= \prod_{i=1}^{k} u_1$ (car X et Z_1 suivent la même loi d'après l'énoncé)

$= (u_1)^k$.

$\boxed{\text{Conclusion : } \forall k \in \mathbb{N},\ P_{(Z_1=k)}(Z_2=0) = (u_1)^k}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$.
Par la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([Z_1 = k])_{k\in\mathbb{N}}$:

$u_{n+1} = P(Z_{n+1} = 0)$

$= \sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_1 = k)\, P_{(Z_1=k)}(Z_{n+1} = 0)$

$= \sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_1 = k)\, (u_n)^k$ (énoncé)

$= \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k)\, (u_n)^k$ (Z_1 et X suivent la même loi)

$= \sum_{k=0}^{+\infty} p\, q^k (u_n)^k$

$= p \sum_{k=0}^{+\infty} (q u_n)^k$

$= \dfrac{p}{1-q u_n}$ (somme de terme général d'une série géométrique convergente (dérivée d'ordre 0 et de raison

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$qu_n \in]-1;1[$).

$\boxed{\text{Conclusion: } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{p}{1-qu_n}}$

8.a) D'après ce qui précède,

$$u_{n+1} = \frac{p}{1-qu_n}$$

$\Leftrightarrow u_{n+1}(1-qu_n) = p$.

$\Leftrightarrow u_{n+1}(1-qu_n) - p = 0$.

Par passage à la limite, on a :

$\ell(1-q\ell) - p = 0$.

Or si l'on développe $(\ell-1)(q\ell-p)$.

$(\ell-1)(q\ell-p) = 0 \Leftrightarrow q\ell^2 - p\ell - q\ell + p = 0$

$\Leftrightarrow -p + q\ell + p\ell - q\ell^2 = 0$

$\Leftrightarrow \ell(q+p-q\ell) - p = 0$

$\Leftrightarrow \ell(1-q\ell) - p = 0$

ce qui coïncide avec l'expression trouvée précédemment.

$\boxed{\text{Conclusion: } \ell \text{ vérifie } (\ell-1)(q\ell-p) = 0}$.

b) On repart de l'expression précédente :

$(\ell-1)(q\ell-p) = 0$

$\Leftrightarrow \ell - 1 = 0$ ou $q\ell - p = 0$

$\Leftrightarrow \ell - 1 = 0$ ou $p = q\ell$.

~~$\Leftrightarrow \ell - 1 = 0$ ou $p(1+\ell) = \ell$.~~

~~Or, si $p \geq 1/2$, alors $q \leq \frac{1}{2}$~~

$\Leftrightarrow \ell = 1$ ou $p(1+\ell) = \ell$.

Or, $0 \leq \ell \leq 1$.

donc $1 \leq 1+l \leq 2$

donc $p \leq p(1+l) \leq 2p$.

$p(1+l)$ ne peut valoir l donc on en déduit que $l=1$

et comme d'après la question 6,

$P(R) = l$.

alors $\boxed{P(R) = 1}$.

c) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$: "$u_n \in \left[0 ; \frac{p}{q}\right]$".

<u>Initialisation:</u> montrons $P(0)$: "$u_0 \in \left[0 ; \frac{p}{q}\right]$"

D'après la 5.a, $u_0 = 0 \in \left[0 ; \frac{p}{q}\right]$.

D'où $P(0)$

<u>Hérédité</u> : Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $P(n)$ et on montre $P(n+1)$: "$u_{n+1} \in \left[0 ; \frac{p}{q}\right]$"

Par hypothèse de récurrence, $0 \leq u_n \leq \frac{p}{q}$

donc comme $q > 0$, $0 \leq q u_n \leq p$

donc $-p \leq -q u_n \leq 0$

donc $1-p \leq 1-q u_n \leq 1$

donc par décroissance de la fonction inverse sur $(\mathbb{R}_+^*)$, $1 \leq \frac{1}{1-q u_n} \leq \frac{1}{1-p}$

En multipliant par $p > 0$:

$p \leq u_{n+1} \leq \frac{p}{1-p}$

donc $0 \leq u_{n+1} \leq \frac{p}{q}$

D'où $P(n+1)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par le principe de récurrence et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \left[0 ; \frac{p}{q}\right]}$$

D'après la 8.a, on a la relation $(u_n - 1)(q u_n - p) = 0$.

Or, comme $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{p}{q}$,

alors $-p \leqslant q u_n - p \leqslant 0$.

et $u_n - 1 \in \left[-1 ; \frac{p}{q} - 1\right]$.

Non abouti...

d) Le casino est gagnant tant que le joueur n'a plus de jeton, c'est-à-dire quand R est réalisé.

Or, si $p \in \left[\frac{1}{2} ; 1\right]$, $P(R) = 1$

sinon, $P(R) < 1$.

R a plus de chances d'être réalisé si $p \in \left[\frac{1}{2} ; 1\right]$

Conclusion : Le casino préfèrera choisir p dans $\left[\frac{1}{2} ; 1\right]$

Partie C

9) Soit $n \in \mathbb{N}$

$(T \leqslant n)$ signifie que le joueur n'a plus de jeton au maximum après la n-ème activation.

u_n est la probabilité qu'après la n-ème activation, le joueur n'a plus de jeton (cela ne veut pas dire que cela se produit à la n-ème activation exactement).

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = P(T \leqslant n)}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ $v_{n-1} - v_n = 1 - u_{n-1} - (1 - u_n)$

$= 1 - u_{n-1} - 1 + u_n$

$= u_n - u_{n-1}$

Code épreuve : 286 | Nombre de pages : 26 | Session : 2022

Épreuve de : Maths E empyon

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$= P(T \leq n) - P(T \leq n-1)$

$= P(T=n)$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(T=n) = u_{n-1} - u_n$

10) $\sum_{n=1}^{N} n P(T=n) = \sum_{n=1}^{N} n(u_{n-1} - u_n)$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$

$= \sum_{n=1}^{N} n u_{n-1} - \sum_{n=1}^{N} n u_n$

$= \sum_{j=0}^{N-1} (j+1) u_j - \sum_{n=1}^{N} n u_n$

($j = n-1$ première somme)

$= \sum_{j=0}^{N-1} j u_j + \sum_{j=0}^{N-1} u_j - \sum_{n=1}^{N} n u_n$

$= \sum_{n=0}^{N-1} u_n - N u_N$ (télescopage).

Conclusion : $\forall N \in \mathbb{N}^*\ \sum_{n=1}^{N} n P(T=n) = \sum_{n=0}^{N-1} u_n - N u_N$

11.a) Soit $n \in \mathbb{N}$

$u_n = P(T \leq n)$

$= \sum_{i=1}^{n} P(T=i)$

$= \sum_{i=1}^{n} u_{i-1} - u_i$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$$= \sum_{j=0}^{n-1} v_j - \sum_{i=1}^{n} v_i$$

$$= v_0 - v_n \quad (\text{télescopage})$$

$$= 1 - u_0 - (1 - u_n)$$

$$= u_n \quad \text{car } u_0 = 0)$$

$$= P(Z_n = 0)$$

B) Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{n=1}^{N} n P(T=n) = \sum_{n=0}^{N-1} v_n - N v_N \quad (\text{question } 10)$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} (1 - u_n) - N(1 - u_N)$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) - N + N u_N$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n+1} - N + \frac{N^2}{N+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n+1} - \frac{N^2 - N + N^2}{N+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n+1} - \frac{N}{N+1}$$

Or, comme $\frac{N}{N+1} \underset{N \to +\infty}{\sim} \frac{N}{N} = 1$ et que $\frac{1}{n+1} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, et que $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge comme intégrale de Riemann de paramètre $1 \leq 1$,

alors la série de terme général $nP(T=n)$ diverge.

$\boxed{\text{Conclusion : } T \text{ n'admet pas d'espérance}}$.

12.a) Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+2} = \frac{1 - u_{n+1}}{\frac{p}{q} - u_{n+1}}$$

$$= \frac{1 - \frac{p}{1-qu_n}}{\frac{p}{q} - \frac{p}{1-qu_n}}$$

$$= \frac{\frac{1-qu_n-p}{1-qu_n}}{\frac{p(1-qu_n)-pq}{q(1-qu_n)}}$$

$$= \frac{q(1-qu_n-p)}{p(1-qu_n-pq)}$$

Exercice 2

1.a) Soit $(M_1, M_2) \in (M_2(\mathbb{R}))^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,

$tr(\lambda M_1 + \mu M_2)$

En posant $M_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$

$\lambda M_1 + \mu M_2 = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu x & \mu y \\ \mu z & \mu t \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \lambda a + \mu x & \lambda b + \mu y \\ \lambda c + \mu z & \lambda d + \mu t \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } tr(\lambda M_1 + \mu M_2) = \lambda a + \mu x + \lambda d + \mu t$$
$$= \lambda(a+d) + \mu(x+t)$$
$$= \lambda\, tr(M_1) + \mu\, tr(M_2).$$

Donc $\forall (M_1, M_2) \in (M_2(\mathbb{R}))^2$, $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,
$tr(\lambda M_1 + \mu M_2) = \lambda\, tr(M_1) + \mu\, tr(M_2)$.
Donc $\boxed{tr \text{ est linéaire}}$.

b) Soit $M \in M_2(\mathbb{R})$. avec $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$M \in \ker(tr) \iff tr(M) = 0$
$\iff a + d = 0$
$\iff d = -a$.

D'où $\ker(M) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} ; \text{ avec } d = -a \right\}$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

$$= \left\{ a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

$$= Vect(X_1, X_2, X_3),$$

avec $X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Cette famille est libre car ses vecteurs sont non colinéaires. $\boxed{\text{Donc c'est une base de } \ker(tr) \text{ et } \dim(\ker(tr)) = 3}$.

2) Montrons que f est linéaire.
$\forall (M_1, M_2) \in (M_2(\mathbb{R}))^2$ et $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,
$f(\lambda M_1 + \mu M_2) = \lambda M_1 + \mu M_2 + tr(\lambda M_1 + \mu M_2) I$
$= \lambda M_1 + \mu M_2 + (\cancel{\lambda M}\ ) + \mu\, tr(M_2)) I$

Copie anonyme - n°anonymat : 691024

Code épreuve : 236	Nombre de pages : 26	Session : 2022

Épreuve de : Maths E emlyon

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$= \lambda M_1 + \mu M_2 + \lambda \, tr(M_1) J + \mu \, tr(M_2) J$

$= \lambda (M_1 + tr(M_1) J) + \mu (M_2 + tr(M_2) J)$

$= \lambda f(M_1) + \mu f(M_2)$

D'où f est linéaire.

De plus comme $tr(M)$ est un réel et que $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $J \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

alors $\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $f(M) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

D'où $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$\boxed{\text{Conclusion : } f \text{ est un endomorphisme de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$.

3. a) On notant (E_1, E_2, E_3, E_4) la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$f(E_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (1+0) \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$= E_1 + 2E_2 + E_3$

$f(E_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0$

$= E_2$

$f(E_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 = E_3$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$$f(E_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= 2E_2 + E_3 + E_4.$$

D'où $\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

B) $(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= 0$$

$\boxed{\underline{\text{Conclusion}} : (A - I)^2 = 0}$

c) $(A - I)^2 = 0$ donc un polynome annulateur de A est le polynome $P(X) = (X-1)^2$.

$P(X) = 0 \iff (X-1)^2 = 0$
$\iff X - 1 = 0$
$\iff X = 1.$

D'où $Sp(A) \subset \{1\}$.

Il n'est pas obligé de montrer que $Sp(A) = \{1\}$. En effet, si 1 n'est pas valeur propre, A

n'a pas de valeur propre donc n'est pas diagonalisable.

Si 1 est valeur propre :

On suppose que A est diagonalisable : il existe donc P inversible et D diagonale tel que $A = PDP^{-1}$ avec D constitué des valeurs propres de A sur la diagonale c'est-à-dire

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

On aurait donc : $A = PIP^{-1} = I$.

Absurde.

Conclusion : A n'est pas diagonalisable

* Ayant oublié qu'il fallait effectivement démontrer le spectre de A, on peut dire que 1 est bien valeur propre de A car $A - I$ est constituée de deux lignes non nulles (3.b). Donc $rg(A - I) < 4$ et comme c'est une matrice carrée d'ordre 4, $A - I$ n'est pas inversible.

Donc on a bien $Sp(A) = \{1\}$.

d) On a $(A - I)^2 = 0$. Comme A et I commutent, on peut écrire : $A^2 - 2A + I = 0$

d'où $A^2 - 2A = -I$

d'où $2A - A^2 = I$.

d'où $(2I - A)A = I$.

Conclusion : A est inversible et $A^{-1} = 2I - A$.

4.a) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On cherche M tel que $f(M) = M$.

$f(M) = M \iff M + (tr(M)) J = 0$

$\iff (tr(M)) J = 0$

$\iff tr(M) = 0$ car J non nulle

$\iff M \in$ ~~Ker(f)~~ $Ker(tr)$

or, d'après la 1.B, ~~Ker(f)~~ $Ker(tr) \neq \{0\}$.

Cela prouve que 1 est bien valeur propre de f.

et toujours d'après la 1.B en notant $E_1(f)$ le sous espace propre de f associé à la valeur propre 1, on a (X_1, X_2, X_3), qui est une base de $E_1(f)$

et $\dim(E_1(f)) = 3$.

avec $X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

B) $f(J) = J + tr(J) J$

$= (1 + tr(J)) J$

$\boxed{\text{Conclusion : } J \text{ est un vecteur propre de } f \text{ associé à la valeur propre } tr(J)+1 .}$

c.ii) D'après l'hypothèse de l'énoncé,

$f(M) = \lambda M$ avec $\lambda \neq 1$

donc $M + (tr(M)) J = \lambda M$

donc $M - \lambda M + (tr(M)) J = 0$

donc $(1-\lambda) M + (tr(M)) J = 0$

Exercice 3

Partie A

1) • $t \mapsto 1-t$ est continue sur $]-\infty; 0[\cup]0; 1[$ car polynomiale.

• $\ln$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$

• $\forall t \in]-\infty; 0[\cup]0; 1[$, $1-t \in \mathbb{R}_+^*$.

Donc $t \mapsto \ln(1-t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée bien définie de telles fonctions.

Copie anonyme - n°anonymat : 691024

Code épreuve : 236 | Nombre de pages : 26 | Session : 2022

Épreuve de : Maths E emlyon

Consignes
• Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
• Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
• Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
• Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
• Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Donc g est continue sur $]-\infty;0[\cup]0;1[$ comme quotient bien défini de fonctions continues.

En 0 :

$$\ln(1-t) \underset{t\to 0}{\sim} -t$$

donc $\dfrac{-\ln(1-t)}{t} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t}{t} = 1 = f(0)$.

Ceci vaut tant en 0 à gauche qu'à droite.

D'où $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = f(0)$.

Donc f est continue en 0.

$\boxed{\text{Conclusion : } f \text{ est continue en }]-\infty;1[}$

2.a) ~~Soit $t<1$.~~
~~$-t > -1$~~
~~$1-t>0$~~

$\forall t<1$, soit $g(t) = \dfrac{t}{1-t} + \ln(1-t)$.

g est dérivable sur $]-\infty;1[$.

$\forall t<1$, $g'(t) = \dfrac{1-t+t}{(1-t)^2} - \dfrac{1}{1-t}$

$= \dfrac{1}{(1-t)^2} - \dfrac{1}{1-t}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$= \dfrac{1-(1-t)}{(1-t)^2}$

$= \dfrac{t}{(1-t)^2}$.

comme $(1-t)^2 > 0$,
alors $g'(t) \geq 0 \iff t \geq 0$.
D'où $\forall t \in]-\infty; 0[$, $g'(t) \leq 0$ et $\forall t \in [0;1[$
$g'(t) \geq 0$.
D'où g est décroissante sur $]-\infty; 0[$ et croissante sur $[0; 1[$.
et comme $g(0) = 0$
alors $\forall t \in]-\infty; 1[$ $g(t) \geq 0$.
c'est à dire $\dfrac{t}{1-t} + \ln(1-t) \geq 0$.

Conclusion: $\boxed{\forall t \in]-\infty; 1[,\ \dfrac{t}{1-t} + \ln(1-t) \geq 0}$

b) Les arguments sont les mêmes que pour la continuité: f est de classe C^1 sur $]-\infty; 1[\setminus \{0\}$ comme composée et quotient bien définis de telles fonctions.
$\forall t \in]-\infty; 1[\setminus \{0\}$
$f'(t) = \dfrac{\frac{1}{1-t} \times t + \ln(1-t)}{t^2}$

$= \dfrac{\frac{t}{1-t} + \ln(1-t)}{t^2}$

Or $t^2 > 0$ et d'après ce qui précède, $\forall t \in]-\infty; 1[\setminus \{0\}$ $\dfrac{t}{1-t} + \ln(1-t) \geq 0$.

Donc $\forall t \in]-\infty ; 1[\setminus \{0\}$, $f'(t) > 0$.

c) D'après ~~ça~~ ce qui précède, $\forall t \in]-\infty ; 0[\cup]0 ; 1[$, $f'(t) > 0$.

$\boxed{\text{D'où } f \text{ est } \cancel{\text{strict}} \text{ croissante sur }]-\infty ; 1[}$.

3.a) Le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $\ln(1-t)$ est $\boxed{-t - \frac{t^2}{2} + \underset{t \to 0}{o}(t^2)}$

Soit $t \in]-\infty ; 1[\setminus \{0\}$

b) $$\frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \frac{\frac{-\ln(1-t)}{t} - 1}{t} = \frac{-\ln(1-t) - t}{t^2}.$$

Or, d'après la question précédente, $\ln(1-t) \underset{t \to 0}{\sim} -t - \frac{t^2}{2}$

D'où $$\frac{-\ln(1-t) - t}{t^2} = \frac{t + \frac{t^2}{2} - t}{t^2} = \frac{\frac{t^2}{2}}{t^2} = \frac{t^2}{2t^2} = \frac{1}{2}$$

Donc $\frac{f(t) - f(0)}{t - 0} \xrightarrow[t \to 0]{} \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$

D'où $\boxed{f \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } f'(0) = \frac{1}{2}}$

c) f est de classe C^1 sur $]-\infty; 1[\setminus \{0\}$ (2.b).
Montrons que f est de classe C^1 en 0, c'est-à-dire que $\lim\limits_{t \to 0} f'(t) = f'(0)$

$\forall t \in]-\infty; 1[\setminus \{0\}$

$$f'(t) = \frac{\frac{t}{1-t} + \ln(1-t)}{t^2}$$

$$f'(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{\frac{t}{1-t} - t - \frac{t^2}{2}}{t^2} = \frac{2t - 2t(1-t) - t^2(1-t)}{2t^2(1-t)}$$

$$= \frac{2t - 2t + 2t^2 - t^2 + t^3}{2t^2(1-t)}$$

$$\cancel{= \frac{3t^3 - t^2}{2t^2(1-t)}}$$

$$\cancel{= \frac{t^2(3t-1)}{2t^2(1-t)}}$$

$$\cancel{= \frac{3t-1}{2t^2(1-t)}}$$

$$= \frac{t^2 + t^3}{2t^2(1-t)}$$

$$= \frac{t^2(1+t)}{2t^2(1-t)}$$

$$= \frac{1+t}{2(1-t)} \xrightarrow[t\to 0]{} \frac{1}{2} = f'(0)$$

On a bien : $f'(t) \xrightarrow[t\to 0]{} f'(0)$

Donc f est C^1 en 0.

$\boxed{\text{Conclusion : } f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur }]-\infty; 1[.}$

4) On a par croissances comparées : $\frac{\ln(t)}{t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$

et comme $\ln(1-t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$ et que $-t \xrightarrow[t\to-\infty]{} +\infty$

alors $\frac{-\ln(1-t)}{1-t} \xrightarrow[t\to-\infty]{} 0$. D'où $\boxed{f(t) \xrightarrow[t\to-\infty]{} 0}$

Copie anonyme - n°anonymat : 691024

Code épreuve : 296	Nombre de pages : 26	Session : 2022

Épreuve de : Maths E emlyon

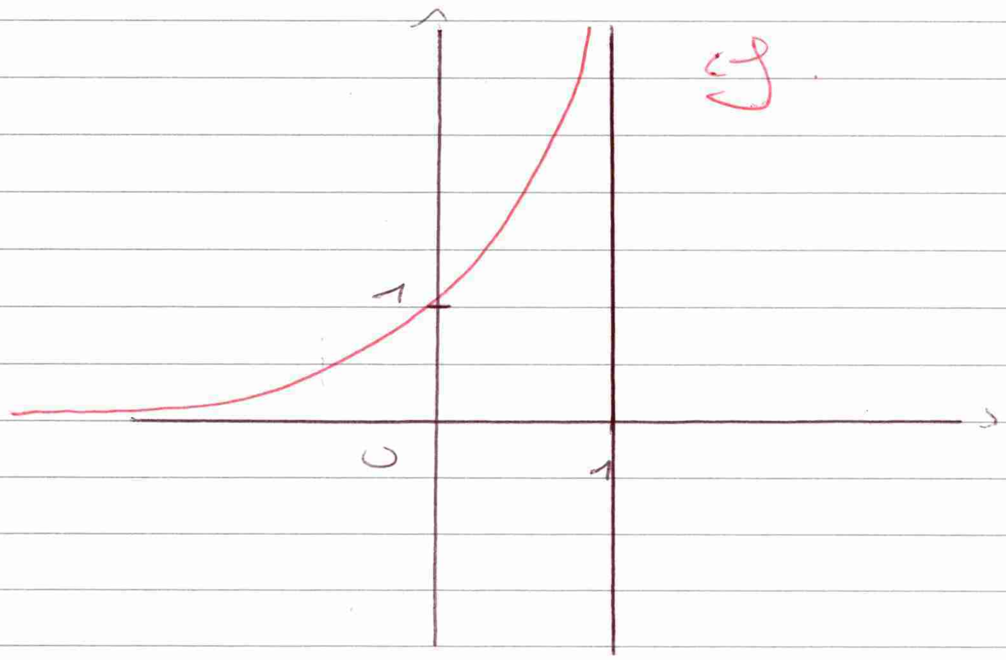
Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

et $\ln(1-t) \xrightarrow[t \to 1]{} -\infty$ car $1-t \xrightarrow[t \to 1]{} 0$

donc $-\ln(1-t) \xrightarrow[t \to 1]{} +\infty$

D'où $\boxed{f(t) \xrightarrow[t \to 1]{} +\infty}$

5) D'après toute cette partie A :



Partie B

6) g est continue sur $]-\infty ; 1[$ donc elle est aussi sur $[0 ; x]$ ou $[x ; 0]$ $\forall x < 1$.
Donc g admet une primitive F sur cet intervalle.

$\forall x < 1$, $L(x) = \int_0^x g(t)\,dt$

$= [F(t)]_0^x$

$= F(x) - F(0)$.

Or, F est de classe C^1 sur $]-\infty ; 1[$ car primitive de g et g est continue sur $]-\infty ; 1[$.

$\boxed{\text{Conclusion : } L \text{ est de classe } C^1 \text{ sur }]-\infty ; 1[\text{ et } \forall x < 1,\ L'(x) = F'(x) \ (F(0) \text{ est un réel}) = g(x).}$

7.a) Soit $(A, B) \in]0 ; 1[^2$,

$\int_A^B g(t)\,dt = \int_A^B \frac{-\ln(1-t)}{t}\,dt$.

On fait le changement de variable de classe C^1
$u = 1 - t$

donc $t = 1 - u$ et $dt = -du$

$t = A \Rightarrow u = 1 - A$

$t = B \Rightarrow u = 1 - B$

D'où $\int_A^B g(t)\,dt = \int_{1-A}^{1-B} \frac{-\ln(u)}{1-u} \times -du$

$= -\int_{1-A}^{1-B} \frac{-\ln(u)}{1-u}\,du$

$$= \int_{1-B}^{1-A} \frac{-\ln(u)}{1-u}\, du$$

<u>Conclusion :</u> $\forall (A,B) \in]0;1[^2$,

$$\int_A^B f(t)\,dt = \int_{1-B}^{1-A} \frac{-\ln(t)}{1-t}\, dt.$$

B) Soit $n \in \mathbb{N}$,
soit $t \in]0;1[$,

$$\sum_{k=0}^{n} -t^k \ln(t) + \frac{-t^{n+1}\ln(t)}{1-t}$$

$$= \cancel{-\ln(t) \sum \ln(t)}$$

$$= -\ln(t) \sum_{k=0}^{n} t^k - \frac{t^{n+1}\ln(t)}{1-t}$$

$$= \frac{-\ln(t)(1-t^{n+1})}{1-t} - \frac{t^{n+1}\ln(t)}{1-t}$$

$$= \frac{-\ln(t) + t^{n+1}\ln(t) - t^{n+1}\ln(t)}{1-t}$$

$$= \frac{-\ln(t)}{1-t}$$

<u>Conclusion :</u> $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in]0;1[$

$$\frac{-\ln(t)}{1-t} = \sum_{k=0}^{n} -t^k \ln(t) - \frac{t^{n+1}\ln(t)}{1-t}$$

c) Soit $k \in \mathbb{N}$, soit $A > 1$

$$\int_{A}^{1} -t^k \ln(t)\, dt = -\int_{A}^{1} u'(t)\, v(t)\, dt$$

avec u et v de classe C^1 sur $[A;1]$ définie par :

$u(t) = \dfrac{t^{k+1}}{k+1}$ $\qquad$ $v(t) = \ln(t)$

$u'(t) = t^k$ $\qquad$ $v'(t) = \dfrac{1}{t}$.

On intègre par parties :

$$\int_A^1 -t^k \ln(t)\,dt = -\left(\left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\ln(t)\right]_A^1 - \int_A^1 \frac{t^k}{k+1}\,dt\right)$$

$$= -\left(-\frac{A^{k+1}}{k+1}\ln(A) - \frac{1}{k+1}\left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_A^1\right)$$

$$= \frac{A^{k+1}}{k+1}\ln(A) + \frac{1}{k+1}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{A^{k+1}}{k+1}\right)$$

$$\xrightarrow[A\to 0]{} \frac{1}{(k+1)^2} \quad \text{(croissances comparées)}.$$

D'où $\boxed{\int_0^1 -t^k \ln(t)\,dt \text{ converge et vaut } \frac{1}{(k+1)^2}}$.

d) $\dfrac{-t\ln(t)}{1-t} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$ (croissances comparées)

<u>En 1 :</u>

On pose $X = 1-t$. Donc $t = 1-X$

$$\frac{-t\ln(t)}{1-t} = \frac{-(1-X)\ln(1-X)}{X}$$

or $\dfrac{\ln(1-X)}{X} \xrightarrow[X\to 0]{} -1$

Donc $-(1-X)\dfrac{\ln(1-X)}{X} \xrightarrow[X\to 0]{} 1$.

Cette fonction est également continue $]0;1[$ comme quotient bien défini de fonctions continues.
Et comme elle atteint des limites finies aux extrémités de $]0;1[$, alors cette fonction est bornée.

Copie anonyme - n°anonymat : 691024

Code épreuve : 296 **Nombre de pages :** 26 **Session :** 2022

Épreuve de : Maths E emlyon

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Emplacement QR Code

1.f) $\lim\limits_{x\to 1} L(x) = \cancel{\int} \lim\limits_{x\to 1} \int_0^x g(t)\,dt$

$= \lim\limits_{x\to 1} \int_0^x \frac{-\ln(1-t)}{t}\,dt$

$= \lim\limits_{x\to 1} \int_{1-x}^{1} -\frac{\ln(t)}{1-t}\,dt$

$= \int_0^1 -\frac{\ln(t)}{1-t}\,dt$

$= \frac{\pi^2}{6} \in \mathbb{R}$.

Donc L est prolongeable par continuité en 1 en posant $L(1) = \frac{\pi^2}{6}$.

1.e) $\int_0^1 -\frac{\ln(t)}{1-t}\,dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} t^k \ln(t) - \frac{t^{n+1}\ln(t)}{1-t}\,dt$

$\cancel{= \sum\left(\frac{1-t^{n+1}}{1-t}\right)\ln(t) - t^{n+1}\ln(t)}$

$\cancel{= \frac{1-t^{n+1}}{1-t}\int_0^1 \ln(t) - \int_0^1 \frac{t^{n+1}\ln(t)}{1-t}\,dt}$

$\cancel{= \frac{1-t^{n+1}}{1-t} \sum t \ln(t) - t \ldots}$

$$= \sum_{k=0}^{n} - t^{k} \int_0 \ln(t)\, dt$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 - t^{k} \ln(t)\, dt$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)^2}$$

Or, $\frac{1}{(k+1)^2} \underset{k \to +\infty}{\sim} \frac{1}{k^2}$

donc $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$

$$= \frac{\pi^2}{6}$$

Partie C

10. B) $H - \lambda I$ non inversible

$\Leftrightarrow \lambda^2 - \left(\frac{1}{2} - \lambda\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - \left(\frac{1}{4} - \lambda + \lambda^2\right) = 0$

$\Leftrightarrow \lambda^2 - \frac{1}{4} + \lambda - \lambda^2 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{4}$

$Sp(H) = \{1/4\}$.

11) Oui : un minimum car $1/4 > 0$.