Copie anonyme - n°anonymat : 604119

G2-00047
604119
Maths S

Code épreuve : 295	Nombre de pages : 31	Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques Emlyon

Consignes
• Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
• Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
• Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
• Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
• Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Problème 1

Partie A :

1)a) La matrice A n'est pas inversible car le colonne 3 est formé du colonne 1 et colonne 2

$C_3 = C_2 - C_1$

$rg(A) = 2$.

1) b)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$A^3 - A^2 + A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$A^3 - A^2 + A = O_{M_3(\mathbb{R})}$.

1) c) on en déduit que A admet comme polynôme annulateur $X^3 - X^2 + X = P(X)$

donc $sp(A) \subset \{$racine de $P(X)\}$.

$P(X) = X(X^2 - X + 1)$

or $X^2 - X + 1$ n'admet pas de racine réelle car son discriminant est négatif : $\Delta = -3$
donc $P(X)$ admet uniquement 0 comme racine.
donc $sp(A) \subset \{0\}$.

$\{0\} \subset sp(A)$ car $\dim \operatorname{Ker} A = 1$ d'après le théorème du rang (d'après 1)a) $rg(A) = 2$)

donc $sp(A) = 0$.

A n'est pas diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$ car si A l'est ; A sera semblable à la matrice nulle.
or ce n'est pas le cas

A n'est pas diagonalisable.

2) a) $B = {}^tAA$

${}^tA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. ${}^tAA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

B est diagonalisable car B est une matrice symétrique est réelle.

2) b) i) .

$$^tR = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$^tR\,R = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ 2 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1+1+4 & -\sqrt{3}+\sqrt{3}+0 & -\sqrt{2}-\sqrt{2}+2\sqrt{2} \\ -\sqrt{3}+\sqrt{3} & 3+3 & \sqrt{6}-\sqrt{6}. \\ -\sqrt{2}-\sqrt{2}+2\sqrt{2} & +\sqrt{6}-\sqrt{6}+0 & 2+2+2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

R est une matrice orthogonale car $^tRR = I_{M_3(\mathbb{R})}$.

2) b) ii)

$$ {}^tRB = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}. $$

$$ = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. $$

$$ {}^tRBR = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3}. & -\sqrt{2} \\ 2 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}. $$

$$ = \frac{1}{6.} \begin{pmatrix} 14 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. $$

$$ {}^tRBR = \begin{pmatrix} 7/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. $$

${}^tRBR$ est diagonale

Copie anonyme - n°anonymat : 604119

Code épreuve : 295	Nombre de pages : 31	Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques Emlyon

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie B

3) soit $x, y \in \mathbb{R}^n$

on pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

* f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base B est M.

soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ $Y \in M_{n,1}(\mathbb{R})$

$\langle MX, Y \rangle = {}^t(MX)Y$

$= {}^tX\,{}^tMY$

* g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base B est ${}^tM$

soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ $Y \in M_{n,1}(\mathbb{R})$

$\langle X, {}^tMY \rangle = {}^tX({}^tMY)$

$= {}^tX\,{}^tMY$

$= {}^t(MX)Y$

$= \langle MX, Y \rangle$

donc on peut conclure que :

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad \langle x, g(y) \rangle = \langle f(x), y \rangle$

4) a) soit $x \in \ker(h)$

$\langle x, h(x) \rangle = \langle x, g \circ f(x) \rangle$ on pose $y = f(x)$

$= \langle f(x), f(x) \rangle$

$= \| f(x) \|^2$.

or $x \in \ker h$ donc $h(x) = 0$.

donc $\langle x, h(x) \rangle = 0$
donc $\| f(x) \|^2 = 0$.

donc $\forall x \in \ker h \quad \| f(x) \|^2 = 0$

donc $f(x) = 0$ selon les propriétés de la norme.

donc $x \in \ker f$.

4) b) on a montré que $\ker h \subset \ker f$.

soit $x \in \ker f$ alors $f(x) = 0$

en composant par g

on a $g \circ f(x) = 0$

donc $h(x) = 0$

donc $x \in \ker h$

donc $\ker f \subset \ker h$

d'après la double inclusion

$\underline{\ker f = \ker h}$

* on a $rg(M) = r$

donc $rg(f) = r$

d'après le théorème du rang

$\dim \ker f = \dim \mathbb{R}^n - rg(f)$

$= n - r$.

et on a $\ker f = \ker h$

donc $\dim \ker f = \dim \ker h$

donc $\dim \ker h = n - r$

donc d'après le theorème du rang :

$rg(h) = \dim \mathbb{R}^n - \dim \ker h$

$= n - (n - r)$

$= r$

d'où $\underline{rg(h) = r}$

3) pour montrer $\forall x \in \mathbb{R}^n \ \langle x, h(x) \rangle = \|f(x)\|^2$

d'après ce qui précède

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \ \langle x, g(y) \rangle = \langle f(x), y \rangle$

soit $x \in \mathbb{R}^n$

$\langle x, h(x) \rangle = \langle x, g\circ f(x) \rangle$ en posant $y = f(x)$
$f(x) \in \mathbb{R}^n$ car f est un endomorphisme.

$= \langle f(x), f(x) \rangle$

$= \|f(x)\|^2$

5). soit $x, y \in \mathbb{R}^n$ on pose $f(x) = z$

$\langle h(x), y \rangle = \langle g\circ f(x), y \rangle$

$= \langle g(z), y \rangle$

$= \langle z, f(y) \rangle$

$= \langle f(x), f(y) \rangle$

$\langle x, h(y) \rangle = \langle x, g\circ f(y) \rangle$ on pose $f(y) = K$.

$= \langle x, g(K) \rangle$

$= \langle f(x), K \rangle$

$= \langle f(x), f(y) \rangle$

donc $\langle x, h(y) \rangle = \langle h(x), y \rangle$.

Copie anonyme - n°anonymat : 604119

Code épreuve : 295	Nombre de pages : 31	Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques Emlyon

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

h est un endomorphisme symétrique donc h est diagonalisable dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteur propre de h.

5) b) soit x un vecteur propre de h associé à la valeur propre λ

alors $\langle x, h(x) \rangle = \langle x, \lambda x \rangle$

$= \lambda \|x\|^2$

or d'après 3)

$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \langle x, h(x) \rangle = \|f(x)\|^2 \geq 0$

donc en particulier pour $x \in E_\lambda(h)$.

donc $\langle x, h(x) \rangle = \lambda \|x\|^2 \geq 0$

or $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \|x\|^2 \geq 0$

donc $\lambda \geq 0$

donc $Sp(h) \subset \mathbb{R}^+$

6) h est diagonalisable
donc il existe une base orthonormée $B_1 = (\varepsilon_1, -, \varepsilon_n)$ de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de h.

* P est orthogonale car P est une matrice de passage d'une matrice à une matrice orthogonale.

* il existe n réels $(\lambda_1, -, \lambda_n)$ positifs ou nuls car h est diagonalisable donc h admet n valeurs propres pas forcément distincts (car $rg(h) = r$).
et les $(\lambda_1, -, \lambda_n)$ sont positifs car d'après 5) b)
$Sp(h) \subset \mathbb{R}^+$

* h est diagonalisable dans une base orthonormé
${}^tMM$ est la matrice representatif de h.

donc ${}^tMM = P D {}^tP$ où $D = Diag(\lambda_1, -, \lambda_n)$
↳ formé de valeurs propres

$P =$ les vecteurs propres dans une base orthonormal.

7). supposons que M est symétrique.
les valeurs singulières de M sont
$\forall i \in [\![1, n]\!] \quad \sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$

8). D admet r coefficient diagonaux non nul car
$rg(h) = r$
donc $\dim \operatorname{Ker} h = n - r$

donc 0 est valeur propre et la dimension de son sous-espace propre est $n-r$

de plus h est d'ordre n donc le nombre de coefficient non nuls sur la diagonal est r..

9) a) soit $i \in [\![1, r]\!]$

on a d'après 5)a) $B_1 = (\varepsilon_1, ---, \varepsilon_n)$ une base orthonormée constituée de vecteurs propres de h

donc $\forall i \in [\![1, n]\!]$ $\varepsilon_i = 0_E$.

de plus $\forall i \in [\![1, r]\!]$ $f(\varepsilon_i) \neq 0$

car si $f(\varepsilon_i) = 0$ alors $\varepsilon_i \in \ker f$

alors $\varepsilon_i \in \ker h$ (d'après 4) b)).

or on a dit que $\forall i \in [\![1, r]\!]$ $\lambda_i \neq 0$

donc ε_i étant le vecteur propre associé de λ_i

ne peut pas appartenir au noyau de h

car cela contredit le fait que λ_i est non nul.

donc $\underline{\forall i \in [\![1, r]\!] \; f(\varepsilon_i) \neq 0}$.

* soit $i \in [\![1, r]\!]$ $\|f(\varepsilon_i)\|^2 = \langle \varepsilon_i, h(\varepsilon_i) \rangle$

car $\varepsilon_i \in E_{\lambda_i}(h)$

$= \langle \varepsilon_i, \lambda_i \varepsilon_i \rangle$

$= \lambda_i \|\varepsilon_i\|^2$

donc $\underline{\|f(\varepsilon_i)\| = \sqrt{\lambda_i} \|\varepsilon_i\| = \sigma_i = \|\varepsilon_i\|}$

a) b).

soit $i \in [\![1, r]\!]$

$$\|ui\| = \left\| \frac{1}{\|f(\varepsilon_i)\|} f(\varepsilon_i) \right\|$$

$$= \frac{\|f(\varepsilon_i)\|}{\|f(\varepsilon_i)\|}$$

$$= 1.$$

$\forall i \in [\![1, r]\!] \quad \|ui\| = 1.$

* montrons que la famille est orthogonale.

soit $i,j \in [\![1, r]\!]^2 \quad i \neq j$

$$\langle ui \,,\, uj \rangle = \left\langle \frac{1}{\|f(\varepsilon_i)\|} f(\varepsilon_i) \,,\, \frac{1}{\|f(\varepsilon_j)\|} f(\varepsilon_j) \right\rangle$$

$$= \frac{1}{\|f(\varepsilon_i)\|} \frac{1}{\|f(\varepsilon_j)\|} \langle f(\varepsilon_i), f(\varepsilon_j) \rangle.$$

or $\langle f(\varepsilon_i), f(\varepsilon_j) \rangle$ en posant $y = f(\varepsilon_j)$

$= \langle f(\varepsilon_i), y \rangle$

$= \langle \varepsilon_i, g(y) \rangle$

$= \langle \varepsilon_i, g(f)(\varepsilon_j) \rangle$

$= \langle \varepsilon_i, h(\varepsilon_j) \rangle \quad \varepsilon_j \in E_{\lambda_j}(h)$

$= \lambda_j \langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle$

$= 0$ car les vecteurs propres de h sont orthogonale pour des valeurs propres differentes.

Copie anonyme - n°anonymat : 604119

Bilan : $\forall i,j \in [\![1,r]\!]^2$

$$\langle u_i , u_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

donc $\forall i \in [\![1,r]\!]$ $\|u_i\| = 1$

donc $(u_1,\dots,u_r)$ est une famille orthonormée.

12) supposons que M est inversible

alors $M^{-1} = (Q\Delta {}^tP)^{-1}$

$= (Q\cdot \Delta {}^tP)^{-1}$

$= (\Delta {}^tP)^{-1} Q^{-1}$

$= {}^tP^{-1}\Delta^{-1}Q^{-1}$ or ${}^tP^{-1} = {}^{tt}P = P$ car ${}^tP = P^{-1}$ P une matrice orthogonale.

$= P\Delta^{-1}\,{}^tQ$ Q une matrice orthogonale.

or Δ est une matrice diagonale. et $\forall i \in [\![1,r]\!]$ $\sigma_i \neq 0$.

donc : $\Delta^{-1} = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sigma_1}, \dots, \frac{1}{\sigma_r}, 0, \dots, 0\right)$

donc si M^{-1} existe alors

$$M^{-1} = P\,\mathrm{diag}\left(\frac{1}{\sigma_1}, -, \frac{1}{\sigma_r}, 0, -, 0\right) {}^tQ$$

donc $\underline{M^{-1} = M^{+}}$

13) a) $MM^+ = Q\Delta \underbrace{{}^tP P}_{= I_n} \mathrm{diag}\left(\frac{1}{\sigma_1}, -, \frac{1}{\sigma_r}, 0, -, 0\right) {}^tQ$ car P est une matrice orthogonale

$$= Q\Delta\,\mathrm{diag}\left(\frac{1}{\sigma_1}, -, \frac{1}{\sigma_r}, 0, -, 0\right) {}^tQ.$$

$$= Q\,\mathrm{diag}(\underbrace{1, -, 1}_{r \text{ fois}}, 0, -, 0) {}^tQ$$

$$\underline{MM^+ = Q\,\mathrm{diag}(1, -, 1, 0, -, 0) {}^tQ}$$

13) b) on pose $p = f \circ f^+$

* M^+ est la matrice de f^+ dans la base B

* M est la matrice de f dans la base B.

$MM^+MM^+ = Q\,\mathrm{diag}(\underbrace{1,\dots,1}_{r \text{ fois}},0,\dots,0)\,{}^tQ\,Q\,\mathrm{diag}(\underbrace{1,\dots,1}_{r\text{ fois}},0,\dots,0)\,{}^tQ$

$= Q\,\mathrm{diag}(\underbrace{1,\dots,1}_{r\text{ fois}},0,\dots,0)\,{}^tQ$

donc $(f\circ f^+)\circ(f\circ f^+) = (f\circ f^+)$

donc $p\circ p = p$ et de plus $Q\,\mathrm{diag}(1,\dots,1,0,\dots,0)\,{}^tQ$ est orthogonale

car ${}^t(Q\,\mathrm{diag}(1,\dots,1,0,\dots,0)\,{}^tQ)$

$= {}^t({}^tQ)\,{}^t(Q\,\mathrm{diag}(1,\dots,1,0,\dots,0))$

$= Q\,\mathrm{diag}(1,\dots,1,0,\dots,0)\,{}^tQ$

<u>p est un projecteur orthogonal</u>

c) MM^+ est semblable à $\mathrm{diag}(\underbrace{1,\dots,1}_{r\text{ fois}},0,\dots,0)$

deux matrices semblables ont même rang

donc $rg(\mathrm{diag}(1,\dots,1,0,\dots,0)) = r$ nombre de colonne non nulle

donc <u>$rg(MM^+) = r$</u>

c) $rg(MM^+) = r$

donc $rg(f\circ f^+) = r$

donc $rg(P) = r$.

soit $y \in \mathrm{Im}\,P$

alors $\exists x \in E$ tel que $p(x) = y$

$f\circ f^+(x) = y$ donc $y \in \mathrm{Im}\,f$

donc $\operatorname{Im} p \subset \operatorname{Im} f$

or $rg(M) = r$ car M est semblable à une matrice diagonale du rang r

$$\Delta = diag(\lambda_1, -, \lambda_r, 0, -, 0)$$

$$rg(\Delta) = r$$

donc $rg(M) = rg(f) = r$

* $\operatorname{Im} p \subset \operatorname{Im} f$

* $\dim \operatorname{Im} P = \dim \operatorname{Im} f$

donc $\underline{\operatorname{Im} p = \operatorname{Im} f}$.

14) a) soit $y \in \mathbb{R}^n \setminus \operatorname{Im} f$.

soit $x \in \mathbb{R}^n$.

$$\| y - P(y) \|^2 = \|y\|^2 + \|P(y)\|^2 - 2 \langle P(y), y \rangle.$$

$$= \|y\| + \| f \circ f^+(y) \|^2 - 2 \langle f \circ f^+(y), y \rangle.$$

15) a). soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$AX = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} y+z \\ 0 \\ -x+z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 604119

Code épreuve : 295

Nombre de pages : 31

Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques Emlyon

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

on remarque bien que $y = (1,1,1)$ n'appartient pas a $\mathrm{Im}\, f_1$ puisque $\mathrm{Im}\, f_1 = \mathrm{Vect}\left((1,0,0),(0,0,-1)\right)$.

15) b) soit $x = (x_1, x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3$

$f_1(x) = (x_2+x_3, 0, -x_1+x_3)$

$$\| y - f_1(x)\|^2 = \| (1-x_2-x_3, 1, 1+x_1-x_3)\|^2$$

$$= (1-x_2-x_3)^2 + 1 + (1+x_1-x_3)^2$$

$$= (-1)^2(1-x_2-x_3)^2 + (x_1-x_3+1)^2 + 1$$

$$= (x_2+x_3-1)^2 + (x_1-x_3+1)^2 + 1.$$

Problème 2.

Partie A

1) $C_0 = \frac{1}{1}\binom{2\cdot 0}{0}$ $\qquad \binom{0}{0} = \frac{0!}{0!\,0!} = 1$

$= 1$

$C_1 = \frac{1}{2}\binom{2}{1}$ $\qquad \binom{2}{1} = \frac{2!}{1!\,1!} = 2$

$= 1$

$C_2 = \frac{1}{3}\binom{4}{2}.$ $\qquad \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\,2!} = \frac{3\times 4}{2} = 6.$

$= 2.$

Bilan : $C_0 = 1 \quad C_1 = 1 \quad C_2 = 2.$

2)a) montrons par récurrence que
$\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n) = « \; C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} \; »$.

soit $n = 0$

$C_0 = 1$ d'après 1).

$\binom{2\cdot 0}{0} - \binom{2\cdot 0}{1} = \binom{0}{0} - \underbrace{\binom{0}{1}}_{=0} = 1$

P(0) est vraie.

~~soit $n \in \mathbb{N}$~~

~~supposons que $P(n)$ est vraie, montrons que $P(n+1)$ l'est aussi~~

2) a)

soit $n \in \mathbb{N}$

$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{(2n)!}{n!\,n!} - \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!}$$

$$= \frac{(2n)!(n+1)}{n!\,(n+1)!} - \frac{(2n)!\,(n)}{n!\,(n+1)!}$$

$$= \frac{(2n)!}{n!\,(n+1)!}\,(n+1-n)$$

$$= \frac{1}{n+1}\left(\frac{(2n)!}{n!\,n!}\right)$$

$$= \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

$$= C_n$$

d'où $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$.

---

3) soit $n \in \mathbb{N}$ montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$P(n) = $ « $C_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2} C_n$ »

soit $n = 0$

$C_1 = 1 \qquad \frac{2(2\cdot 0+1)}{2} = 1 \qquad C_0 = 1$

$C_1 = 1 \cdot C_0 \qquad P(1)$ est vraie.

supposons que $P(n)$ vraie , montrons que $P(n)$ l'est
soît $n \in \mathbb{N}$
ainsi vraie.

$$C_{n+1} = \frac{1}{n+2}\binom{2n+2}{n+1}.$$

$$= \frac{1}{n+2}\left(\frac{(2n+2)!}{(n+1)!\,(n+1)!}\right)$$

$$= \frac{1}{n+2}\left(\frac{(2n+1)(2n+2)\,(2n)!}{(n+1)(n+1)\,n!\,n!}\right).$$

$$= \frac{1}{n+2}\left(\frac{(2n+1)2\cancel{(n+1)}}{(n+1)\cancel{(n+1)}}\binom{2n}{n}\right).$$

$$= \frac{1}{n+2}\left(2(2n+1)\right)\left(\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}\right)$$

$$= \frac{2(2n+1)}{n+2}\left(C_n\right)$$

$p(n+1)$ vraie

donc. $\forall n \in \mathbb{N} \quad C_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2} C_n$.

---

5) a) soit $n \in \mathbb{N}$

$$C_{n+1} - C_n = \frac{2(2n+1)}{n+2} C_n - C_n \qquad \text{d'après } 3.$$

$$= C_n\left(\frac{2(2n+1)}{n+2} - \frac{n+2}{n+2}\right).$$

$$= C_n\left(\frac{4n+2-n-2}{n+2}\right)$$

$$= C_n\left(\frac{3n}{n+2}\right) \quad \text{or } \forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{3n}{n+2} \geq 0 \text{ donc}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 604119

Code épreuve : 295	Nombre de pages : 31	Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques S emlyon

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

$\forall n \in \mathbb{N} \quad C_{n+1} - C_n \geq 0$

donc la suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

5) b) supposons que (C_n) converger vers ℓ

alors $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 \quad |C_n - \ell| \leq \varepsilon$

donc $\left| \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} - \ell \right| \leq \varepsilon$.

donc $\left| \binom{2n}{n} - \ell(n+1) \right| \leq \varepsilon(n+1)$.

donc $-\varepsilon(n+1) \leq \binom{2n}{n} - \ell(n+1) \leq \varepsilon(n+1)$

donc $(\ell-\varepsilon)(n+1) \leq \binom{2n}{n} \leq (\ell+\varepsilon)(n+1)$.

6) a) soit $k \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{C_{k+1}}{C_k} = \frac{1}{k+2}\binom{2k+2}{k+1} \frac{k+1}{\binom{2k}{k}}.$$

$$= \frac{1}{(k+2)} \frac{(2k+2)!}{(k+1)!\,(k+1)!} \frac{(k+1)\,k!\,k!}{(2k)!}$$

$$= \frac{(2k+2)!}{(k+2)!\cancel{(k+1)!}} \frac{\cancel{(k+1)!}\,k!}{(2k)!} = \frac{(2k+2)(2k+1)}{(k+1)(k+2)} = \frac{2(2k+1)}{k+2}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

* $4\left(\frac{k}{k+1}\right)^{3/2} - \frac{C_{k+1}}{C_k}$

$= \frac{4\,k\sqrt{k}}{(k+1)\sqrt{k+1}} - \frac{2(2k+1)}{k+2}.$

$= \frac{4\,k\sqrt{k}}{(k+1)\sqrt{k+1}} - \frac{4k+2}{k+2}.$

$= \frac{4k\sqrt{k}\,(k+2) - (4k+2)(k+1)\sqrt{k+1}}{(k+1)\sqrt{k+1}\,(k+2)}$

$= \frac{(4k^2+8k)\sqrt{k} - (4k^2+2k+4k+2)\sqrt{k+1}}{(k+1)\sqrt{k+1}\,(k+2)}$

$= \frac{(4k^2+8k)\sqrt{k} - (4k^2+6k+2)\sqrt{k+1}}{(k+1)\sqrt{k+1}(k+2)}.$

b) soit $n \in \mathbb{N}^*$

d'après 6) a)

$4\left(\frac{n+1}{n}\right)^{3/2} \leq \frac{C_n}{C_{n+1}} \leq 4\left(\frac{n}{n+1}\right)^{3/2}$

~~donc~~ les elements sont non nulles, passant par l'inverse.

$$\frac{1}{4}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{3/2} \leq \frac{C_{n+1}}{C_{n-1}} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{3/2}.$$

$$C_{n-1}\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right)^{3/2} \leq \frac{C_{n+1}}{C_n} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{3/2} C_{n-1}$$

7) a) soit $n \in \mathbb{N}$

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} k\, C_k C_{n-k}.$$

posons le changement d'indice
$i = n-k$.
$k = n-i$

$$= \sum_{i=n}^{0} (n-i) C_{n-i} C_i$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (n-i) C_{n-i} C_i$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (n-i) \frac{1}{n-i+1}\binom{2n-2i}{n-i} \left(\frac{1}{i+1}\right)\binom{2i}{i}.$$

$$= \sum_{i=0}^{n}.$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k} \frac{1}{n-k+1}\binom{2(n-k)}{n-k}$$

b). soit $n \in \mathbb{N}$

$$T_{n+1} + S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} k\, C_k C_{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n+1} C_k C_{n+1-k}.$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k\, C_k C_{n-}$$

Partie B)

9) a) soit $t \mapsto \cos(t)^2$ est continue sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
donc elle admet une primitive.

$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$

donc $\cos(2a) = \cos(a)^2 - \sin(a)^2$

$= \cos(a)^2 - (1 - \cos(a)^2)$

$= 2\cos(a)^2 - 1.$

donc $2\cos(a)^2 = \cos(2a) + 1.$

donc $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^2 dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(\cos(2t) + 1)\, dt$

$= \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(2t)}{2} + t\right)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(\pi)}{2} + \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\sin(-\pi)}{2} + \frac{\pi}{2}\right)\right)$

$= \frac{1}{4}(\sin(\pi) - \sin(-\pi) + 2\pi)$

$= \frac{1}{4}(-2\sin\pi + 2\pi).$

$= \frac{\pi}{2}.$ $\quad \sin(\pi) = 0$

donc $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t^2 dt = \frac{\pi}{2}$

Code épreuve : 295 | Nombre de pages : 31 | Session : 2022

Épreuve de : Maths Emlyon

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

9) b) soit $x \in [-2;2]$

$x \mapsto \frac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2}$ est continue sur $[-2,2]$

on pose le changement de variable $x = 2\sin(t)$.
$t \mapsto 2\sin t$ est C^1 sur $\mathbb{R}$ donc sur $[-2,2]$.
$dx = 2\cos(t)\,dt$

$$\int_{-2}^{2} \frac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2}\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2\pi}\sqrt{4-4\sin(t)^2}\;2\cos(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\sqrt{(1-\sin(t)^2)}\;2\cos(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos(t)^2\,dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^2\,dt$$

$$= 1$$

10) * $\forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi(x) \geq 0$

car $\begin{cases} x \mapsto \frac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2} \geq 0 & \text{pour } x \in [2,2] \\ x \mapsto 0 \geq 0 & \text{pour } x \notin [-2,2]. \end{cases}$

donc $\varphi(x)$ est positive.

* $x \mapsto \frac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2}$ est continue sur $[-2,2]$ comme somme et composée de deux fonction continue

* $x \mapsto 0$ est continue sur $\mathbb{R}$

donc φ est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement au point 2 et -2.

* d'après 9) b) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2}\,dx = 1$

donc on a $\int_{-\infty}^{-\frac{\pi}{2}} 0\,dx = 0$ et $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} 0\,dx = 0$

donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx = 1$

φ est bien une densité de variable aleatoire réelle.

11)

a) soit $n \in \mathbb{N}$. $\mathbb{E}(X^n)$ existe car $X(\Omega)$ est fini
donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $\int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x)dx$ converge.

on remarque que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$x \mapsto \frac{x^{2n+1}}{2\pi}\sqrt{4-x^2}$ est une fonction paire sur $[-2,2]$

* l'intervalle $[-2,2]$ est centré en 0.

donc $\int_{-2}^{2} \frac{x^{2n+1}}{2\pi}\sqrt{4-x^2}\,dx = 0$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $\mathbb{E}(X^{2n+1}) = 0$.

* soit $n \in \mathbb{N}$ $\mathbb{E}(X^{2n}) = \int_{-2}^{2} \frac{x^{2n}}{2\pi}\sqrt{4-x^2}\,dx$

$= 2\int_{0}^{2} \frac{x^{2n}}{2\pi}\sqrt{4-x^2}\,dx$

la fonction $x \mapsto \frac{x^{2n}}{2\pi}\sqrt{4-x^2}$ est impaire centré en 0

$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2} x^{2n}\sqrt{4-x^2}\,dx$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $\mathbb{E}(X^{2n}) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2} x^{2n}\sqrt{4-x^2}\,dx$

b) i) soit $n \in \mathbb{N}$
$\mu_0 = \mathbb{E}(X^0)$

$= \mathbb{E}(1)$

$= 1$

ii) soit $n \in \mathbb{N}$ $\quad$ $E(X^{2n+2})$ existe car X admet un moment de tout d'ordre.

$$u_{n+1} = E(X^{2(n+1)})$$
$$= E(X^{2n+2}).$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^2 x^{2n+2}\sqrt{4-x^2}\,dx.$$

on pose
$u(x) = x^{2n+1}$
$u'(x) = 2n+1(x)^{2n}$
$v'(x) = x\sqrt{4-x^2}$
$= (4x-x^3)^{\frac{1}{2}}.$

Partie C

14) soit $n \in \mathbb{N}$
$[T = 2n+1]$ signifie au $2n+1$ lancée on obtient pour la première fois le même nombre de pile que de face

or $2n+1$ est impaire, cela n'est pas possible pour cet évenement car $T(\Omega) = 2\mathbb{N}$ vu qu'on veut que le nombre de pile que de face soit egaux

d'où $\underline{P(T=2n+1) = 0}$.

15) b)
soit $p \in [0,1]$ $f: p \mapsto p(1-p)$ est continue et derivable sur $[0,1]$

$f'(p) = 1-2p$ $\quad$ $f'(p) = 0 \Leftrightarrow p = \frac{1}{2}.$

p	0		$1/2$		1
f'		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0

$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}.$

f admet un maximum en $1/2$ et vaut $1/4$

Copie anonyme - n°anonymat : 604119

Code épreuve : 295	Nombre de pages : 31	Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques Emlyon

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

d'où $\forall p \in]0,1[$. $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$

$]0,1[\subset [0,1]$

or $f(p)$ atteint son maximum en $\frac{1}{2}$

donc $p(1-p) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow p = \frac{1}{2}$

15) a) soit $x \in]-1,1[$.

$\forall k \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}(T=k) \leq 1$

donc $|x|^k \, \mathbb{P}(T=k) \leq |x|^k$.

donc $\sum_{k=0}^{N} |x^k \, \mathbb{P}(T=k)| \leq \sum_{k=0}^{N} |x|^k$.

or $\forall x \in]-1,1[\ \sum_{k \geq 0} x^k$ converge en tant que serie géométrique

donc par critère de comparaison des serie à terme positive. la serie de terme general $x^k \mathbb{P}(T=k)$ est absolument convergente

donc $\forall x \in]-1,1[\ \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(T=n) x^n$ converge.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

or pour $x = 1$ ou $x = -1$ $|x^k| \mathbb{P}(T=k) = \mathbb{P}(T=k)$.

$\sum_{k \geq 0} |x^k| \mathbb{P}(T=k)$ converge et vaut 1

donc $\forall x \in [-1, 1]$ $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(T=n) x^n$ converge

absolument donc $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(T=n) x^n$ converge.

---

c). soit $x \in [-1, 1]$

$g(p(1-p)x^2) := 1 - \sqrt{1 - 4(p(1-p)x^2)}$

$g(x) = 2x f(x)$

$g(p(1-p)x^2) = 2p(1-p)x^2 f(p(1-p)x^2)$.

$=$

8) c) soit $x \in [-\frac{1}{4} ; \frac{1}{4}]$

$g(x)^2 - 2g(x) + 4x = g(x) 2x f(x) - 2g(x) + 4x$.

$= 4x^2 f^2(x) - 4f(x)x + 4x$

$=$

d) $G_T(1) = 1$.

$G_T(1) = \mathbb{P}(T=0) + g(p(1-p))$.

$\mathbb{P}(T=0) = 1 - g(p(1-p))$.