ECRICOME PREPA 2022 - ECE - Economique

Mathématiques option économique Mathématiques

BENJAMIN

Note de délibération : 18.61 / 20

Prénom (s) BENJAMIN

18.61 / 20

écricome Épreuve : Mathématiques option Economique

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 01 / 07

Numéro de table 009

Exercice 1 :

Partie I :

$$1)\ F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$= \left\{ a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$= \mathrm{Vect}(I, N) \quad \text{avec } I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi: $F = \mathrm{Vect}(I, N)$. Or $F \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

Donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

18.61 / 20

De plus, la famille (I, N) est génératrice de F. On vérifie que cette famille est libre. Pour cela, on pose $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\lambda_1 I + \lambda_2 N = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \lambda_2 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & 0 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$ Ainsi la famille (I, N) est libre

Finalement, la famille est génératrice de F et libre donc la famille (I, N) est une base de F.

Or elle est constituée de 2 éléments, donc $\cancel{\dim(E) = 2}$ $\dim(F) = 2$

2) $$I^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc $I^2 = I$

or $I \in M_3(\mathbb{R})$ donc $I \in G$.

On

$$(2I)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$(2I)^2 = 4I \neq 2I$

donc $(2I)^2 \neq 2I$

donc $2I \notin G$ donc G n'est pas stable par produit donc finalement G n'est pas un sous espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$

3) $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

donc $A \in F$ car $A \in M_3(\mathbb{R})$ et peut s'écrire sous la forme $\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ avec

$a = \frac{2}{3}$ et $b = -\frac{1}{3}$

de plus $A^2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \times \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{9} \times \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= A.$$

donc $A^2 = A$ donc $A \in G$. (car $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$)

Finalement, on a donc bien $\underline{A \in F \cap G}$

5) Par ce qui précède, on a démontré que

$A^2 = A$

donc $A^2 - A = 0$

On pose P le polynome annulateur de A tel que :

$$\underline{P(x) = x^2 - x}$$

c) $P(x) = 0 \iff x^2 - x = 0$

$\iff x(x-1) = 0$

$\iff x = 0$ ou $x = 1$.

Ainsi puisque P est le polynome annulateur de A, les valeurs propres de A sont dans les racines de P, c'est à dire

$$Sp(A) \subset \{0, 1\}.$$

On vérifie donc que 0 et 1 sont valeurs propres de A.

Prénom (s) BENJAMIN

18.61 / 20

Écricome Épreuve : Mathématiques option Economique

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 02 / 07

Numéro de table 009

Pour cela on pose $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ avec $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$AX = 0 \iff \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z = 0 \\ -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z = 0 \\ -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z = 0 \end{cases}$$

en multipliant chaque ligne par 3

$$\iff \begin{cases} 2x - y - z = 0 & (L_1) \\ -x + 2y - z = 0 & (L_2) \\ -x - y + 2z = 0 & (L_3) \end{cases}$$

$$\underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\iff} \begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \\ -x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.61 / 20

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ 3y - 3z = 0 \\ -3y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ y = z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ y = z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ y = z \end{cases}$$

Ainsi il existe une infinité de solution pour $AX = 0$ donc 0 est bien valeur propre de A.

On pose $E_0(A)$ le sous espace propre de A associé à la valeur propre 0.

$$E_0(A) = \left\{ \begin{pmatrix} y \\ y \\ y \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

donc $E_0(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

on fait de même pour 1 :

$$AX = 1X \iff \begin{cases} \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z = x \\ -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z = y \\ -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z = z \end{cases}$$

en multipliant par 3 chaque ligne

$$\iff \begin{cases} 2x - y - z = 3x \\ -x + 2y - z = 3y \\ -x - y + 2z = 3z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -x - y - z = 0 \\ -x - y - z = 0 \\ -x - y - z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \left\{ -x - y - z = 0 \right.$$

$$\iff \left\{ -x = y + z \right.$$

$$\iff \left\{ x = -y - z. \right.$$

Il existe donc une infinité de solution pour $AX = 1X$ donc 1 est une valeur propre de A d'où $\underline{Sp(A) = \{0; 1\}}$

On pose $E_1(A)$ le sous espace propre de A associé à 1.

$$E_1(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid (y,z) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

On a donc $Sp(A) = \{0, 1\}$

$E_0(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ donc la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $E_0(A)$

(famille constituée d'un unique vecteur non nul donc elle est libre)

donc $\dim(E_0(A)) = 1$

de même,

$E_1(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ ~~donc la famille~~ $\cancel{\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)}$

donc la famille $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $E_1(A)$ car constituée de deux vecteurs non-colinéaires.

donc $\dim(E_1(A)) = 2$

Prénom (s) BENJAMIN

18.61 / 20

Écricome Épreuve : Mathématiques option Économique

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 03 / 07

Numéro de table 009

d) On a démontré que 0 était valeur propre de A donc A n'est pas inversible

de plus par ce qui précède (I c)),

$\dim(E_0(A)) + \dim(E_1(A)) = 1 + 2 = 3$

or $A \in M_3(\mathbb{R})$

Donc A est diagonalisable.

Partie II

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$,

$$M^2 = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^2+2b^2 & 2ab+b^2 & 2ab+b^2 \\ 2ab+b^2 & a^2+2b^2 & 2ab+b^2 \\ 2ab+b^2 & 2ab+b^2 & a^2+2b^2 \end{pmatrix}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.61 / 20

donc $M \in G$

$\Leftrightarrow M^2 = M$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^2+2b^2 & 2ab+b^2 & 2ab+b^2 \\ 2ab+b^2 & a^2+2b^2 & 2ab+b^2 \\ 2ab+b^2 & 2aB+b^2 & a^2+2b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+2b^2 = a \\ 2ab+b^2 = b \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+2b^2 = a \\ 2ab+b^2-b = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+2b^2 = a \\ b(b+2a-1) = 0 \end{cases}$

On a donc bien

$M \in G \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+2b^2 = a \\ b(b+2a-1) = 0 \end{cases}$

5) $B = I_3 - A$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On rappelle que $A \in F$ (Partie I 3a))

De plus $B = \frac{1}{3} I + \frac{1}{3} N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Or (I, N) est une base de F (par Partie I 1).

donc la famille (A, B) est génératrice de F

On vérifie que la famille est libre. On pose $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ ~~telle que~~ tels que :

$$\lambda_1 A + \lambda_2 B = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\left(\begin{pmatrix} 2\lambda_1 & -\lambda_1 & -\lambda_1 \\ -\lambda_1 & 2\lambda_1 & -\lambda_1 \\ -\lambda_1 & -\lambda_1 & 2\lambda_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_2 & \lambda_2 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_2 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_2 & \lambda_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\begin{pmatrix} 2\lambda_1+\lambda_2 & -\lambda_1+\lambda_2 & -\lambda_1+\lambda_2 \\ -\lambda_1+\lambda_2 & 2\lambda_1+\lambda_2 & -\lambda_1+\lambda_2 \\ -\lambda_1+\lambda_2 & -\lambda_1+\lambda_2 & 2\lambda_1+\lambda_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \right.$$

Ainsi la famille (A, B) est libre et génératrice de F donc <u>c'est une base de F</u>

6 b) $$AB = \frac{1}{9}\left(\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{9} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= O_3$$

$$BA = \frac{1}{9}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{9}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$= O_3$$

Prénom (s) BENJAMIN

18.61 / 20

ecricome Épreuve : Mathématiques option Économique

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 04 / 07

Numéro de table 009

Donc $AB = BA = 0_3$

c) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$: "$M^n = \alpha^n A + \beta^n B$"

Initialisation : Soit $n = 0$

$M^0 = I_3$

et $\alpha^0 A + \beta^0 B = A + B = A + I_3 - A = I_3$

donc $M^0 = \alpha^0 A + \beta^0 B$

d'où $P(0)$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $P(n)$ et on montre $P(n+1)$

$M^n = \alpha^n A + \beta^n B$ par H.R

donc $M^{n+1} = (\alpha^n A + \beta^n B) \times M$

donc $M^{n+1} = (\alpha^n A + \beta^n B) \times (\alpha A + \beta B)$ par 6a)

donc $M^{n+1} = \alpha^{n+1} A + \alpha^n \beta AB + \beta^n \alpha BA + \beta^{n+1} B$

$= \alpha^{n+1} A + \beta^{n+1} B$ car $AB = BA = 0_3$

donc $M^{n+1} = \alpha^{n+1} A + \beta^{n+1} B$

d'où $P(n+1)$

Finalement, par le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $M^n = \alpha^n A + \beta^n B$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.61 / 20

Partie III.

8) $$I_3 - T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\cancel{= \alpha A + \beta B}$$

~~on cherche donc $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que~~

$$\cancel{\alpha A + \beta B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}}$$

donc $I_3 - T = -3A - 6B$.

9) $(I_3 - T) \in F$

de plus $I_3 - T = -3A - 6B$

donc $$(I_3 - T)^{-1} = -3^{-1} A - 6^{-1} B \text{ par 7 b).}$$

Exercice 2.

Soit $x > 0$

$$g(x) = \exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right)$$

$$= \exp\left(2\ln(x) - \frac{\ln(x)}{x}\right)$$

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} \exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right)$$

or $2 - \dfrac{1}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} -\infty$

et $\ln(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} -\infty$

donc $\left(2 - \dfrac{1}{x}\right)\ln(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$

ore $\exp(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$

donc $\displaystyle\lim_{x \to 0} \exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right) = +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \cancel{\exp} \lim_{x \to +\infty} \exp\left(\cancel{2\ln(x)} - \cancel{\frac{\ln(x)}{x}}\right)$$

$$=$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \exp\left(2\ln(x) - \frac{\ln(x)}{x}\right)$$

$= +\infty$ car $\dfrac{\ln(x)}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ par croissance comparée

~~donc $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$~~ et $2\ln(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

et $\exp(2\ln(x)) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

donc $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

de plus $\lim_{x\to 0^+} \exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right)$

$= +\infty$

car $\ln(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\infty$

et $\left(2 - \frac{1}{x}\right) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} -\infty$

donc $\ln(x)\left(2 - \frac{1}{x}\right) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$

or $\exp(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

donc $\lim_{x\to 0^+} \exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right) = +\infty$

donc $\lim_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$

2 a) ~~Soit $x>0$, $h($~~

· h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ (ln et polynomiale).
Ainsi on a $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$h'(x) = \frac{1}{x} + 2$$

Donc $\forall x > 0$, $h'(x) > 0$ donc h est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

Prénom (s) BENJAMIN

18.61 / 20

Ecricome Épreuve : Maths option Economique

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 05 / 07

Numéro de table 009

$\cancel{\lim_{x \to 0^+} h(x) = -\infty}$ car $\cancel{\ln(x) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} -\infty}$

et $\cancel{2x - 1 \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} -1}$

· $h\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2) + 1 - 1$

$= -\ln(2)$ or $\ln(2) > 0$

donc $h\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

· $h(1) = \ln(1) + 2 - 1$
$= 1 > 0$

donc $h(1) > 0$

$\lim_{x \to 0^+} h(x) = \lim_{x \to 0^-} \ln(x) + 2x - 1 = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$

donc $0 \in \left] \lim_{x \to 0} h(x), \lim_{x \to +\infty} h(x) \right[$

Or h est continue (car dérivable) sur $\mathbb{R}_+^*$ et strictement croissante (par a) donc par le théorème de la bijection, il existe un unique réel $\alpha > 0$ tel que $h(\alpha) = 0$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.61 / 20

on on a montré que
$h(\frac{1}{2}) < 0$
et $h(1) > 0$

donc $h(\frac{1}{2}) < h(\alpha) < h(1)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} < \alpha < 1$ par croissance de h.

on a donc bien $\alpha > 0$ tel que $h(\alpha) = 0$
avec $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

c) g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ (polynomiale, $\ln$, exp).

Ainsi soit $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$g'(x) = \left(\frac{1}{x^2}\ln(x) + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right)\exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right)$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(\ln(x) + 2x - 1\right)g(x)$$

$$= \frac{1}{x^2}h(x)g(x).$$

on a donc bien $\forall x > 0$,

$$g'(x) = \frac{1}{x^2} h(x)\, g(x)$$

d) On sait donc que $\forall x > 0$, $g'(x) = \frac{1}{x^2} h(x)\, g(x)$

On $\frac{1}{x^2} > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$

et $g(x) \geqslant 0$ $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ car la exp est toujours positive.

et $h(\alpha) = 0$,

On $h(x) < 0$ pour tout $x < \alpha$

donc on a ↗ par croissance de h.

x	0		α		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	↘	$g(\alpha)$	↗	$+\infty$

3).

Partie II

4)

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$: " $U_n > 0$ "

Initialisation : Soit $n = 0$ U_0 existe et

$U_0 > 0$

d'où $P(0)$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $P(n)$ et on montre $P(n+1)$

$U_{n+1} = g(U_n)$ donc U_{n+1} existe

car $U_n > 0$ par H-R

de plus $g(U_n) > 0$ par définition de l'exp

donc $U_{n+1} > 0$

d'où $P(n+1)$

Finalement par le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$,

U_n existe et $U_n > 0$.

5)

```
function y = f(U0, n)

X = zeros(1, n)
  for i = 0:n
  U0 = exp((2-(1/U0))* log(U0))
  X(1, i) = U0
  end
y = X
endfunction.
```

Prénom (s) BENJAMIN

18.61 / 20

Ecricome Épreuve : Maths option éco

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 06 / 07

Numéro de table 009

~~6) on pose $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (x-1)\ln(x)$~~
~~f est dérivable comme produit de fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (ln et polynomiale).~~
~~Ainsi, soit $x \in \mathbb{R}_+^*$,~~

~~$f'(x) = \ln(x) + \frac{x-1}{x}$~~

~~· si $x < 1$ $(x>0)$~~

Soit $0 < x < 1$

$\ln(x) < 0$ et $(x-1) < 0$
donc $(x-1)\ln(x) > 0$

Soit $x = 1$
alors
$(x-1)\ln(x) = 0$

Soit $x > 1$ alors
$(x-1) > 0$ et $\ln(x) > 0$ donc $(x-1)\ln(x) > 0$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.61 / 20

Finalement, $\forall x > 0, \quad (x-1)\ln(x) \geqslant 0$.

6)) ~~soit~~ ~~$x > 0$~~

~~$\dfrac{g(x)}{x}$~~

6 c) par ce qui précède. pour tout $x>0$,

$$\frac{g(x)}{x} \geqslant 1$$

donc $g(x) \geqslant x$ car $x > 0$.

Or, on a montré par tableau de variation que $\alpha < 1$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ donc g est strictement croissante et continue sur $]\alpha, +\infty[$ donc par le théorème de la bijection, l'équation $g(x) = x$ admet une unique solution

$$\begin{aligned} g(1) &= \exp((2-1)\ln(1)) \\ &= \exp(0) \\ &= 1 \end{aligned}$$

d'où $g(1) = 1$ ce qui prouve que 1 est l'unique solution.

7) $u_{n+1} - u_n = g(u_n) - u_n$ ~~On a a montré que $\forall x > 0$ $g(x) \geq x$ or $u_n > 0$ par~~

donc $g(u_n) \geq u_n$ car $u_n > 0$
et $\forall x > 0$ $g(x) \geq x$.

donc $g(u_n) \geq u_n$
donc $u_{n+1} \geq u_n$ donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante

8)
a) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$,
$P(n)$: " $u_n \in [\frac{1}{2}, 1]$ "

Initialisation : $u_0 \in [\frac{1}{2}, 1]$ d'où $P(0)$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $P(n)$ et on montre $P(n+1)$

$\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$ par H-R

donc $g(\frac{1}{2}) \leq g(u_n) \leq g(1)$

donc $0 \leq u_{n+1} \leq 1$

donc $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 1$.

d'où $P(n+1)$
Finalement, par le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$u_n \in [\frac{1}{2}, 1]$

b) On sait que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 1 donc par le théorème de la limite monotone, $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge

On note ℓ sa limite
donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \ell$
donc par unicité de la limite
$\lim\limits_{n\to+\infty} U_{n+1} = \ell$

or $U_{n+1} = g(U_n)$ donc par passage à la limite

$$g(\ell) = \ell$$
$$\Rightarrow \ell = 1 \quad \text{par } 6\,c).$$

donc $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et sa limite vaut 1.

9 a) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$: « $U_n > 1$ »

Initialisation : $U_0 > 1$ d'où $P(0)$

Hérédité : $U_n > 1$ par H-R
donc $g(U_n) > g(1)$ par croissance de g sur $[1, +\infty[$
donc $U_{n+1} > 1$
d'où $P(n+1)$

Finalement par le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$,
$U_n > 1$

Prénom (s) BENJAMIN

18.61 / 20

Ecricome Épreuve : Maths option Économique

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 07 / 07

Numéro de table 009

b) $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et n'est pas majorée donc par le théorème de la limite monotone elle tend vers $+\infty$.

Partie III.

11) . $\ln$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$
$(x,y)\mapsto (y-\frac{1}{x})$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$ (polynomiale)
donc $(x,y)\mapsto (y-\frac{1}{x})\ln(x)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$ par produit
finalement f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$ par composition de fonctions qui le sont (avec exp)

12) f est de classe C^2 donc dérivable sur $[\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}]$
Soit $(x,y)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$.

$$\partial_1(f)(x,y) = \left(\frac{1}{x^2}\times\ln(x)+\frac{1}{x}\left(y-\frac{1}{x}\right)\right)\exp\left(\left(y-\frac{1}{x}\right)\ln(x)\right)$$

$$= \frac{\ln(x)+xy-x}{x^2}f(x,y)$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.61 / 20

$$\partial_2(f)(x,y) = \ln(x)\exp\left(\left(y-\frac{1}{x}\right)\ln(x)\right)$$
$$= \ln(x)\, f(x,y)$$

On a donc bien

$$\forall (x,y)\in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}, \quad \begin{cases} \partial_1(f)(x,y) = \dfrac{\ln(x) + xy - 1}{x^2} f(x,y) \\ \partial_2(f)(x,y) = \ln(x) f(x,y) \end{cases}$$

13) (x,y) est un point critique de f ssi

$$\begin{cases} \partial_1(f)(x,y) = 0 \\ \partial_2(f)(x,y) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\ln(x) + xy - 1}{x^2} f(x,y) = 0 \\ \ln(x) f(x,y) = 0 \end{cases}$$

14)

15) on calcule les valeurs propres de la matrice hessienne de f au point a. qu'on nomme A

λ est valeur propre de A $\iff$
$A - \lambda I$ n'est pas inversible.

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2-\lambda & \cancel{1} \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

donc $A - \lambda I$ n'est pas inversible
$\iff (2-\lambda)(-\lambda) - 1 = 0$
$\iff -2\lambda + \lambda^2 - 1 = 0$
$\iff \lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$

on pose Δ le discriminant de $\lambda \mapsto \lambda^2 - 2\lambda - 1$
$\Delta = 4 - 4 \times 1 \times (-1)$
$= 4 + 4$
$= 8$
donc ~~A~~ A admet 2 valeurs propres
$x_1 = \frac{2-\sqrt{8}}{2}$ $\quad x_2 = \frac{2+\sqrt{8}}{2}$

or $x_1 < 0$ car $-2 < \sqrt{8}$
et $x_2 > 0$ car $2+\sqrt{8} > 0$
donc la matrice hessienne de f au point a admet 2 valeurs propres de signes opposés
donc f n'admet pas d'extremum local en a

1b) f ne peut admettre d'extremum global qu'en ses points critiques. Or l'unique point critique de f est a et f n'admet pas de d'extremum local en a donc f n'admet pas d'extremum global sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

Exercice 3

1a)
Les expériences sont constituées de n répétitions d'épreuves identiques et indépendantes (choisir une urne) dont la probabilité du succès (choisir l'urne correspondante à X_n, Y_n ou Z_n) est $\frac{1}{3}$ car équiprobabilité. de plus X_n, Z_n et Y_n comptent toutes trois le nombre de succès obtenus, d'où

$$X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \tfrac{1}{3})$$

$$Y_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \tfrac{1}{3})$$

$$Z_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \tfrac{1}{3}).$$

1b) $P(X_n=0)$ signifie que l'on a jamais selectionné l'urne 1 (donc 0 jetons d'intérieur) et $P(X_n=n)$ signifie qu'on n fois choisi cette urne (et il y a donc n jetons).