ECRICOME PREPA 2022 - ECE - Economique

Mathématiques option économique Mathématiques

MATHILDE

Note de délibération : 18.23 / 20

Prénom (s) MATHILDE

18.23 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques option Économique Sujet ☐ 1 ou ☒ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction. Feuille 01 / 05

Numéro de table 016

Exercice 1: Soit F l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de la forme $\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ où a et b sont des réels quelconques.

Soit G l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = M$

Partie 1.

1) $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b & b \\ b & 0 & b \\ b & b & 0 \end{pmatrix} \middle| \ a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \right\}$

$= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \middle| (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

donc $F = \text{Vect}\left(I_3, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$. F est le sous espace vectoriel engendré par I_3 et la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Les 2 matrices appartiennent à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. F est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ est génératrice du sous espace vectoriel F. De plus, les 2 matrices ne sont pas colinéaires donc la famille de 2 matrices est libre.

On en déduit donc que $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ est une base de F.

et $\dim(F) = 2$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.23 / 20

2)

3) Soit $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

a) on montre que $A \in F \cap G$.

Tout d'abord, on voit que $A \in F$ car A est de la forme de F avec $a = \frac{2}{3}$ et $b = -\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3} \in \mathbb{R}$ et $-\frac{1}{3} \in \mathbb{R}$.

De plus,

$$A^2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

et $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

donc $A^2 = A$, ce qui prouve que $A \in G$.

On a montré que $A \in F$ et $A \in G$ donc $\underline{A \in F \cap G}$

b) On a montré que $A^2 = A$, ce qui prouve que

$A^2 - A = 0$. On a donc un polynôme annulateur.

$$\underline{X^2 - X = 0}$$

c) $X^2 - X = 0 \Leftrightarrow X(X-1) = 0 \Leftrightarrow X = 0$ ou $X = 1$

Les valeurs propres possibles de A sont 0 et 1.

On vérifie :

$\underline{\lambda = 0}$: $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow \frac{2}{3}L_2 + \frac{1}{3}L_1 \\ L_3 \leftarrow \frac{2}{3}L_3 + \frac{1}{3}L_1 \end{array}$

La matrice possède une ligne de zéro, elle n'est donc pas inversible. $\sim \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 + L_2$

<u>0 est bien une valeur propre de A</u>.

E_0 : on résout $AX = 0$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, ce qui nous donne le système suivant :

$$\begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \\ -x - y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1 \end{array} \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ 3y - 3z = 0 \\ -3y + 3z = 0 \end{cases}$$

L_2 et L_3 sont proportionnelles : $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ y = z \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - y = 0 \\ y = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2y \\ y = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ y = z \end{cases}$$

$$E_0 = \cancel{\text{Vect}} \; \cancel{\{} = \left\{ y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right) = \text{Vect}\left(\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \right)$$

~~E_0 est~~ La famille comporte un seul vecteur, donc est libre.

Elle est libre et generatrice, on peut en conclure que c'est une base du sous esp. propre associée à la v.p. 0. Et on a $\dim(E_0) = 1$.

$\lambda = 1$: $A - I = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ La matrice a ses 3 colonnes égales donc elle n'est pas inversible. $\lambda = 1$ est bien une valeur propre de A.

E_1 : On résout le système $(A-I)X = 0$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, ce qui nous donne le système suivant :

$$\{ -x - y - z = 0 \iff x = -y - z$$

$$E_1 = \left\{ y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid (y,z) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$ Ainsi, la famille $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

est génératrice et est composée de 2 vecteurs non colinéaires donc elle est libre. Cette famille est donc une base du sous espace propre associée à la valeur propre 1.
Et $\dim(E_1) = 2$

d) 0 étant valeur propre, A n'est pas inversible.
A a 2 valeurs propres distinctes et la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est

$\dim(E_0) + \dim(E_1) = 2 + 1 = 3$. Or A est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donc elle est diagonalisable.

18.23 / 20

Prénom (s) MATHILDE

Ecricome Épreuve : Mathématiques option Économique Sujet ☐ 1 ou ☒ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction. Feuille 02 / 05

Numéro de table 016

$\boxed{\text{Partie 2 :}}$ on a $M = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ de F avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

4) a) G est l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = M$.

Ainsi, $M \in G \iff$

$$\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+2b^2 & 2ab+b^2 & 2ab+b^2 \\ 2ab+b^2 & 2b^2+a^2 & 2b^2+2ab \\ 2ab+b^2 & 2ab+b^2 & 2b^2+a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} a^2+2b^2 = a \\ 2ba + b^2 = b \end{cases} \iff \begin{cases} a^2+2b^2 = a \\ 2ba + b^2 - b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2+2b^2 = a \\ b(2a+b-1) = 0 \end{cases}$$

4) b) * (voir verso)

question 5)

~~b)~~ $B = I_3 - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

On montre que la famille (A,B) est libre :

$$\begin{pmatrix} 2x+y & -x+y & -x+y \\ -x+y & 2x+y & -x+y \\ -x+y & 2x+y & -x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x+y = 0 \\ -x+y = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x+y = 0 \\ 3y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y = 0 \end{cases}$$ La famille (A,B) est libre.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.23 / 20

~~5) on note $B = I_3 - A$~~ question 4) b) *

6) a) $\alpha = \dfrac{4a-b}{3}$ $\quad \beta = \dfrac{a+2b}{3}$

on vérifie que $M = \alpha A + \beta B$

$$\alpha . A = \frac{4a-b}{9}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8a-2b & -4a+b & -4a+b \\ -4a+b & 8a-2b & -4a+b \\ -4a+b & -4a+b & 8a-2b \end{pmatrix}$$

$$\beta . B = \frac{a+2b}{9}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} a+2b & a+2b & a+2b \\ a+2b & a+2b & a+2b \\ a+2b & a+2b & a+2b \end{pmatrix}$$

donc $$\alpha . A + \beta B = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9a & 3(a+b) & 3(a+b) \\ 3(a+b) & 9a & 3(a+b) \\ 3(a+b) & 3(a+b) & 9a \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} a & a+b & a+b \\ a+b & a & a+b \\ a+b & a+b & a \end{pmatrix}$$

b)

$$AB = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_3$$

$$BA = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_3$$

donc A et B commutent et $\underline{AB = BA = O_3}$

c) On procède par récurrence :

on définit la proposition $P(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$:

« $M^n = \alpha^n A + \beta^n B$ »

Initialisation : $M^0 = I_3$

et $\alpha^0 A + \beta^0 B = A + B = I_3$

donc $P(0)$ est vraie

Hérédité : On suppose $P(n)$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé.

On veut montrer $P(n+1)$:

on a, $M^n = \alpha^n A + \beta^n B$

$\cancel{\Leftrightarrow M^n M = (\alpha^n A + \beta^n B).(\alpha A + \beta B)}$

$\cancel{\Leftrightarrow M^{n+1}} =$

$M^n . M = M^{n+1}$ et $(\alpha^n . A + \beta^n B)(\alpha A + \beta B)$

$= \alpha^n A^2 + \beta^{n+1} B^2$ (car $AB = BA = O_3$)

car $A^2 = A$ (d'après q° 1)b)) $= \alpha^{n+1} A + \beta^{n+1} B$

et $B^2 = B$ (d'après calcul)

donc $M^{n+1} = \alpha^{n+1} A + \beta^{n+1} B$.

$P(n+1)$ est vraie.

D'après le théorème de récurrence, $P(n)$ est vraie

soit, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\underline{M^n = \alpha^n A + \beta^n B}$.

7) a)

Prénom (s) MATHILDE

18.23 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques option Economique Sujet ☐ 1 ou ☒ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction. Feuille 03 / 05

Numéro de table 016

Partie 3 : Soient $T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

on considère la suite (X_n) de matrices colonnes définie par $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et la relation de récurrence :

$\forall n \in \mathbb{N}, \ X_{n+1} = TX_n + Y$

8) $I_3 - T = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ et on sait que $M = \alpha A + \beta M$.

donc $I_3 - T$ est la matrice M avec $a = -2$ et $b = 1$.

Donc $I_3 - T = \frac{-8-1}{3} A + 0B = -\frac{9}{3} A = \underline{-3A}$

9) $(I_3 - T)^{-1} = -\frac{1}{3} A = \underline{-\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}}$

10) On cherche $L = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que $L = TL + Y$, cad :

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3x + y + z \\ x + 3y + z \\ x + y + 3z \end{pmatrix}$ ce qui donne le système suivant :

$\begin{cases} 2y + y + z = -1 \\ x + 2y + z = 1 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + z = -1 \\ 3y + z = 3 \\ y + 3z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + z = -1 \\ 3y + z = 3 \\ 8z = 0 \end{cases}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.23 / 20

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 = -1 \\ 3y = 3 \Leftrightarrow y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -2 \Leftrightarrow x = -1 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$

On a donc une unique solution (système de Cramer) qui nous donne $L = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

11) on a $X_{n+1} = TX_n + Y$ et $L = TL + Y$

donc $X_{n+1} - L = TX_n + Y - (TL + Y)$

$= TX_n - TL = T(X_n - L)$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$(X_{n+1} - L)$ est une récurrence géométrique.

Ainsi, $X_n - L = T^n (X_0 - L)$

12)

Exercice 2 : $\forall x > 0,\ g(x) = e^{\left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x)}$

Partie 1 :

1) on cherche :

- $\lim\limits_{x \to 0^+} (g(x)) = +\infty$ car $2 - \frac{1}{x} \xrightarrow[x \to 0^+]{} -\infty$ et $\ln(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} -\infty$ donc $\left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ car $2 - \frac{1}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 2$ et $\ln(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ et $e^x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$

2) soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$\forall x > 0,\ h(x) = \ln(x) + 2x - 1$

a) on dérive h :

$\forall x > 0,\ h'(x) = \frac{1}{x} + 2 = \frac{1 + 2x}{x}$

$1 + 2x > 0 \iff 2x > -1 \iff x > -\frac{1}{2}$ donc strictement positif pour tout $x > 0$

x	0		α		$+\infty$
$h'(x)$	$\Vert$		$+$		
h	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$

donc h est strictement croissante sur $\mathbb{R}_{*+}$

b) Sur $]0, +\infty[$, h est continue et strictement croissante. Elle réalise une bijection continue strictement croissante de $]0, +\infty[$ sur $]\lim\limits_{x \to 0^+} (h(x)), \lim\limits_{+\infty} h(x)[=]-\infty, +\infty[$

$0 \in]-\infty, +\infty[$ ~~(car $\alpha > 0$)~~. Donc l'équation $h(x) = 0$

admet une unique solution notée α.

On calcule $h(\frac{1}{2})$ et $h(1)$:

$h(\frac{1}{2}) = \ln(\frac{1}{2}) + 2\times\frac{1}{2} - 1 = -\ln(2) < 0$

$h(1) = \ln(1) + 2 - 1 = 1 > 0$

donc $h(\frac{1}{2}) < h(\alpha) < h(1)$ et comme h est strictement croissante : $h(\frac{1}{2}) < h(\alpha) < h(1)$

$\iff \frac{1}{2} < \alpha < 1$

c) $\forall x > 0$, g est dérivable et

$g'(x) = \left(\ln(x)\times\frac{1}{x^2} + \left(2-\frac{1}{x}\right)\times\frac{1}{x}\right)e^{\ln(x)(2-\frac{1}{x})}$

$= \left(\frac{\ln(x)}{x^2} + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right)e^{(2-\frac{1}{x})\ln(x)}$

$= \frac{1}{x^2}\left(\ln(x) + 2x^2 - 1\right)e^{(2-\frac{1}{x})\ln(x)}$

$= \frac{1}{x^2}\,h(x)\,g(x)$

d)

x	0		α		$+\infty$
$1/x^2$	$\Vert$		$+$		
$h(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\Vert$		$+$		
g	$+\infty$	$\searrow$	$g(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

$\frac{1}{2} < \alpha < 1$

et $g(\alpha) = 1$ car et $g(\frac{1}{2}) = 1$

et $g(1) = 1$

3)

Prénom (s) MATHILDE

18.23 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques option Économique Sujet ☐ 1 ou ☒ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction. Feuille 04 / 05

Numéro de table 016

Partie 2 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 > 0$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$.

4) On procède par récurrence :
on définit la proposition $P(n)$: " u_n existe et $U_n > 0$ "
Initialisation : soit $u_0 > 0$, donc $g(u_0)$ existe donc $P(0)$ vraie
Hérédité : on suppose $P(n)$ vraie pour un $n\in\mathbb{N}$ fixé. On veut montrer $P(n+1)$ vraie.
u_n existe et $u_n > 0$ donc u_{n+1} existe car $u_{n+1} = g(u_n)$ et la fonction g est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
Et $g(x) > 0$ (voir tableau variations) et $u_n > 0$ donc $g(u_n) = u_{n+1} > 0$.
$P(n+1)$ est vraie.
D'après le théorème de récurrence, $P(n)$ est vraie, càd : u_n existe et $u_n > 0$, $\forall n\in\mathbb{N}$

5) Scilab :
~~u0 = 0~~
~~For i = 1 : n~~
~~do~~

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.23 / 20

```
~~y = function (x)~~ function y = Y( )
y = exp ( (2-(1/x))*log(x))
endfunction
u = 0
for i = 1:n
do function (u)
n = n+1
disp(u)
end.
```

6) a) on étudie le signe de $(x-1)\ln(x)$ pour $x>0$

$x-1>0 \Leftrightarrow x>1$

et $\ln(x)>0 \Leftrightarrow x>1$

$(x-1)\ln(x)$ est positive pour tout $x>1$ et négative pour $x \in]0,1]$.

b)

c) on a donc $\frac{g(x)}{x} \geqslant 1, \forall x>0$

Ce qui revient à dire que pour tout $x>0$,
$g(x) \geqslant x$

7) On étudie les variations de la suite :
On sait que pour tout $x>0$, $g(x) \geqslant x$.
Et on sait que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. donc :
$g(u_n) \geqslant u_n \Leftrightarrow u_{n+1} \geqslant u_n$.
La suite (u_n) est croissante.

8) $u_0 \in [\frac{1}{2}, 1]$

a) on procède par récurrence :
Soit la proposition $P(n)$: " $u_n \in [\frac{1}{2}, 1]$.
Initialisat : $P(0)$ est vraie car $u_0 \in [\frac{1}{2}, 1]$
Hérédité : on suppose $P(n)$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}$.
On veut montrer $P(n+1)$ vraie.
$\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1 \Rightarrow \cancel{g(\frac{1}{2}) \leqslant u_{n+1} \leqslant g(1)}$

~~par~~

b) Ainsi, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée (par 1).
Elle est donc convergente. On note l la limite de

u_n en $+\infty$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$. $u_{n+1} = g(u_n)$ et on sait que g est continue sur $\mathbb{R}_*^+$.
D' après le théorème de la limite monotone, on a :
$l = g(l) \iff l = 1$ (q° 6)a))

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n) = 1$

9) on suppose $u_0 > 1$.
a) Récurrence : P(n) : " $u_n > 1$ "
Initialisation : P(0) est vraie car $u_0 > 1$
Hérédité : on suppose P(n) vraie pour un $n \in \mathbb{N}$.
$u_n > 1 \iff g(u_n) > g(1)$ par stricte croissance
$\iff u_{n+1} > 1$ de g sur $[1, +\infty[$.
donc P(n+1) vraie.
On a montré par récurrence que u_n est vraie soit $u_n > 1$.

b) (u_n) est croissante mais pas majorée. On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$. Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

10)

Prénom (s) MATHILDE

18.23 / 20

Écricome Épreuve : Mathématiques (Éco) Sujet ☐ 1 ou ☒ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Feuille 05 / 05

Numéro de table 016

$\boxed{\text{Partie 3:}}$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}$,

$f(x,y) = x^{y-\frac{1}{x}} = e\left(\left(y-\frac{1}{x}\right)\ln(x)\right)$

11) $(x,y) \mapsto \ln(x)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $\mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}$

$(x,y) \mapsto \frac{1}{x}$ est une fonct° de classe $\mathcal{C}^2$

$(x,y) \mapsto y$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$

$(x,y) \mapsto e^x$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$

Donc $(x,y) \mapsto f(x,y)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $\mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}$ par composition, produit et somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$

12) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, $\begin{cases} \partial_1(f)(x,y) = \left(\frac{\ln(x)}{x^2} + \left(y-\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x}\right) f(x,y) \ (*) \\ \partial_2(f)(x,y) = \ln(x) f(x,y) \end{cases}$

$* = \frac{\ln(x) + yx - 1}{x^2} \cdot f(x,y)$

13)

(x,y) est un pt critique de f $\Leftrightarrow \begin{cases} \partial_1(f)(x,y) = 0 \\ \partial_2(f)(x,y) = 0 \end{cases}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.23 / 20

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ln(x) + xy - 1 = 0 \quad \text{ou } f(x,y) = 0 \\ \ln(x) = 0 \quad \text{ou } f(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

L'unique point critique de a est $\underline{(1,0)}$

14) $$\partial_{1,1}^2(f) = \frac{\left(x + \frac{y}{x^2}\right) - (2x\ln x + 2x^2y - 2x)}{x^4} \times f(x,y)$$

$$+ \quad \frac{\ln(x) + xy - 1}{x^2} \partial_1 f(x,y)$$

$$\partial_{1,2}^2(f) = \frac{1}{x} f(x,y) + \frac{\ln(x) + xy - 1}{x^2} \partial_2 f(x,y)$$

$\partial_{2,1}^2(f) = \partial_{1,2}^1(f)$ $\mapsto$ théorème de Schwarz car f est de classe C^2

$$\partial_{2,2}^2(f) = \ln(x) \partial_2 (f)(x,y)$$

$$\text{donc } H(1,0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

15) $(2-\lambda)(-\lambda) - 1 = 0 \Leftrightarrow -2\lambda + \lambda^2 - 1 = 0$

$\Delta = 4 - 4(-2)(-1) = -4 < 0$

pas de racines donc la fonction n'admet pas de valeurs propres. Elle n'a donc <u>pas d'extremum</u> ~~gl~~ <u>local</u>.

16) Comme f n'admet pas d'extremum local, elle ne peut pas admettre d'extremum global.

Exercice 3 :

Partie 1 : 1) soit $n \in \mathbb{N}^*$

a) $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{3})$ car la probabilité que le jeton soit disposé dans U_1 est de 1/3 et on place les n premiers jetons.

$Y_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{3})$ et $Z_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{3})$ car il y a équiprobabilité de placer les jetons entre les 3 urnes.

b) $P(X_n = 0) = \binom{n}{0} \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

$P(X_n = n) = \binom{n}{n} \left(\frac{1}{3}\right)^n \left(\frac{1}{3}\right)^0 = \left(\frac{1}{3}\right)^n$

c) si $[Y_n = 0] \cap [Z_n = 0]$, c'est que 2 des 3 urnes sont vides après avoir placés tous les n premiers jetons. Donc la dernière urne comptient les n jetons : donc $[Z_n = 0] \cap [Y_n = 0] = [X_n = n]$

d) V_n : " Après la répartition des n premiers jetons, au moins une urne reste vide ".

$$V_n = [Y_n = 0] \cup [Z_n = 0] \cup [X_n = 0] \cup \left([X_n = 0] \cap [Y_n = 0]\right) \cup \left([X_n = 0] \cap [Z_n = 0]\right) \cup \left([Y_n = 0] \cap [Z_n = 0]\right)$$

e)

2) $V = \bigcup_{n=1}^{+\infty} V_k$. indépendance des évènements

donc et linéarité des probabilités :

$$P(V) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(V_k) = 3\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^k - 3\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^k$$

$$= 3\,\frac{\frac{2}{3}-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}} - 3\,\frac{\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}$$

$$= 9\left(\frac{2}{3}-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) - \frac{9}{2}\left(\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

3) a) Scilab :
- while
-
- $t = n$

b)
```
for t = 1:10000
   do function t
x=mean (t)
disp (x)
```

4) $T(\Omega) = [\![3, n]\!]$

Partie 2 : 7) a) $P(X_2 = k, W_2 = i) =$

b) $P(W_2 = i) = \sum_{k=1}^{2} P(X_2 = k, W_2 = i)$

8) $W_n(\Omega) = \{0, 1, 2\}$