Code épreuve : 298	**Nombre de pages :** 23	**Session :** 2022

Épreuve de : Mathématiques Edhec

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Exercice 1

1). • L'application φ va de $M_2(\mathbb{R})$ dans $M_2(\mathbb{R})$: pour tout $M \in M_2(\mathbb{R})$, $\varphi(M) \in M_2(\mathbb{R})$ car $\varphi(M)$ est un produit et une addition de avec $M \in M_2(\mathbb{R})$.

• On montre que φ est linéaire. $\varphi(M) = JM - MJ$
soit $M \in M_2(\mathbb{R})$.
soit $N \in M_2(\mathbb{R})$. On montre que $\varphi(\lambda M + N) = \lambda\varphi(M) + \varphi(N)$
soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda M + N) &= J(\lambda M + N) - (\lambda M + N)J \\ &= \lambda JM + JN - \lambda MJ - NJ \\ &= \lambda JM - \lambda MJ + JN - NJ \\ &= \lambda(JM - MJ) + JN - NJ \\ &= \lambda\varphi(M) + \varphi(N).\end{aligned}$$

Donc φ est linéaire, donc φ est un endomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$.

2a). • $\varphi(K_1) = JK_1 - K_1J = \begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix} = K_3 - K_2$$

$\varphi(K_1) = K_3 - K_2$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

• $\varphi(K_2) = JK_2 - K_2J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = K_4 - K_1$

• $\varphi(K_3) = JK_3 - K_3J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = K_1 - K_4$

• $\varphi(K_4) = JK_4 - K_4J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = K_2 - K_3$

2b) ~~les lignes de A~~
Les colonnes de A sont respectivement les expressions en fonction de K_1, K_2, K_3, K_4 de $\varphi(K_1)$, $\varphi(K_2)$, $\varphi(K_3)$, $\varphi(K_4)$:

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} \varphi(K_1) & \varphi(K_2) & \varphi(K_3) & \varphi(K_4) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \\ K_4 \end{matrix}$$

2c). A est symétrique car ${}^tA = A$
donc A est diagonalisable, donc φ est diagonalisable.

3a). on remarque que $C_1 = -C_4$ et que $C_2 = -C_3$
donc $\text{rang}(A) = 2$

$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(\varphi(K_1), \varphi(K_2), \varphi(K_3), \varphi(K_4))$
$= \mathrm{Vect}(\varphi(K_1), \varphi(K_2)) = \mathrm{Vect}((K_3 - K_2, K_4 - K_1))$

$\varphi(K_1)$ et $\varphi(K_2)$ ne sont pas proportionnelles, donc $(\varphi(K_1), \varphi(K_2))$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$. Donc $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$

3b). D'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = 2$

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} -y+z = 0 \\ x+t = 0 \\ x-t = 0 \\ y-z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = t \\ y = z \end{cases}$$

Donc $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & y \\ y & 0 \end{pmatrix}\right)$ avec $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$= \mathrm{Vect}\left(\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)\right)$

$= \mathrm{Vect}\left(\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)\right)$ en additionant les deux matrices.

$= \mathrm{Vect}(I, J)$

: I et J ne sont pas proportionnelles, donc (I,J) est libre.
(I,J) est génératrice de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.
Donc (I,J) est une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

4a). $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1+1 & 0 & 0 & -1-1 \\ 0 & 1+1 & -1-1 & 0 \\ 0 & -1-1 & 1+1 & 0 \\ -1-1 & 0 & 0 & 1+1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{A^3 - 4A} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \end{pmatrix} = \underline{0}$$

4b). $A^3 - 4A = 0$, donc le polynôme $X^3 - 4X$ annule A.
Les valeurs propres possibles de φ sont donc les solutions de l'équation $\lambda^3 - 4\lambda = 0$

$\iff \lambda(\lambda^2 - 4) = 0$

$\iff \lambda = 0$ ou $\lambda^2 = 4$

$\iff \lambda = -2$ ou $\lambda = 2$

Les <u>valeurs propres possibles de φ sont donc $-2, 0$ et 2</u>.

5) r_1 ~~renvoie le rang du sous-espace propre associé à la valeur propre 2. donc~~
r_1 renvoie le rang de la matrice $A - 2I$.
Donc d'après le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker}(A - 2I) = 4 - 3 = 1$.
Donc on peut conjecturer que <u>$\dim(E_2) = 1$</u> E_2 est le sous-espace propre associé à 2.
Et donc 2 est bien valeur propre de φ.

r_2 renvoie le rang de la matrice $A + 2I$.
Donc, d'après le théorème du rang, $\dim(\operatorname{Ker}(A + 2I)) = 1$
Donc <u>$\dim(E_{-2}) = 1$</u>, E_{-2} est le sous espace-propre associé à -2.
Et -2 est alors bien valeur propre de φ.

6a).

$$AX = 2X \iff \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \\ 2t \end{pmatrix}$$

Emplacement QR Code

Code épreuve : 298 | **Nombre de pages :** 23 | **Session :** 2022

Épreuve de : Maths Edhec

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -y+z = 2x \\ -x+t = 2y \\ x-t = 2z \\ y-z = 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x-y+z=0 \\ \cancel{-2y-x}\ -x-2y+t=0 \\ x-2z-t=0 \\ y-z-2t=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x-2y+t=0 \\ y-z-2t=0 \\ -2x-y+z=0 \\ x-2z-t=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x-2y+t=0 \\ y-z-2t=0 \\ 3y+z-2t=0 & L_3 \leftarrow L_3-2L_1 \\ -2y-2z=0 & L_4 \leftarrow L_4+L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x-2y+t=0 \\ y-z-2t=0 \\ 4z+4t=0 & L_3 \leftarrow L_3-3L_2 \\ -y-z=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x-2y+t=0 \\ y-z-2t=0 \\ z+t=0 & L_4 \leftarrow L_4+L_2 \\ -2z-2t=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-2y+t=-2t+t=-t \\ y=z+2t=-t+2t=t \\ z=-t \end{cases}$$

$$AX = 2X \iff \begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = -t \end{cases}$$

$$AX = -2X \iff \begin{cases} -y+z+\cancel{2x} = \cancel{x}-2x \\ -x+t = -2y \\ x-t = -2z \\ y-z = 2t \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x-y+z = 0 \\ -x+2y+t = 0 \\ x+2z-t = 0 \\ y-z+2t = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+2z-t = 0 \\ y-z+2t = 0 \\ 2x-y+z = 0 \\ -x+2y+t = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+2z-t = 0 \\ y-z+2t = 0 \\ -y-3z+2t = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ 2y+2z = 0 & L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+2z-t = 0 \\ y-z+2t = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ -4z+4t = 0 \\ y+z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+2z-t = 0 \\ y-z+2t = 0 \\ -z+t = 0 \\ 2z-2t = 0 & L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -2z+t = -2t+t = -t \\ y = z-2t = t-2t = -t \\ z = t \end{cases}$$

6b) $\mathrm{Spec}(\varphi) = \{-2, 0, 2\}$ car $\mathrm{Ker}(\varphi) \neq 0$
et car $AX = 2X$
et $AX = -2X$ admettent des solutions non nulles.

Et on a donc :

$$\boxed{\begin{array}{l} \bullet\ E_0 = \mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Vect}(I, J) \\ \bullet\ E_2 = \mathrm{Vect}((-1,1,-1,1)) \\ \bullet\ E_{-2} = \mathrm{Vect}((-1,-1,1,1)) \end{array}}$$

Problème

Partie I

1a). $I(p,q) = \int_0^1 x^p (1-x)^q \, dx$

$x \mapsto x^p (1-x)^q$ est continue sur $\mathbb{R}$, avec $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}$

Donc $I(p,q)$ est de classe $\mathcal{C}^1$, donc cette intégrale est bien définie.

1b). • On fait une intégration par parties :
soient : $u(x) = \frac{x^{p+1}}{p+1}$ $\quad v(x) = (1-x)^q$ $\quad$ Ces fonctions
$u'(x) = x^p$ $\quad v'(x) = -q(1-x)^{q-1}$ $\quad$ sont continues.

$$I(p,q) = \left[\frac{x^{p+1}}{p+1} (1-x)^q \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{q}{p+1} x^{p+1} (1-x)^{q-1} \, dx$$

$$= 0 - 0 + \frac{q}{p+1} \int_0^1 x^{p+1} (1-x)^{q-1} \, dx$$

donc $I(p,q) = \frac{q}{p+1} I(p+1, q-1)$, $\forall (p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

• On fait ~~une récurrence :~~
soit $P(p,q)$: "~~$I(p,q) = \frac{p!q!}{(p+q)!} I(p+q, 0)$" pour tout~~ $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}$.

Initialisation : on montre que $P(0,0)$ est vraie :

$P(0)$: $I(0,0) = \frac{0!0!}{1!} I(0+0,0)$:

$I(0,0) = 1 \times I(0,0) = I(0,0)$.

Donc $P(0,0)$ est vraie.

Hérédité : on suppose, pour $p \in \mathbb{N}$ fixé et $q \in \mathbb{N}$ fixé, que $P(p,q)$ est vraie, donc que $I(p,q) = \frac{p!q!}{(p+q)!} I(p+q,0)$

On montre que $P(p+1,q+1)$ est vraie.

2a). $I(p+q,0)$ ⊛

$$I(p,q) = \frac{p!q!}{(p+q)!} I(p+q,0) \quad \forall (p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$$

$$= \frac{p!q!}{(p+q)!} \times \frac{1}{p+q+1}$$

Donc $\underline{\underline{I(p,q) = \frac{p!q!}{(p+q)!(p+q+1)} \quad \forall (p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*}}$

2b). ⊛ $\underline{\underline{I(p+q,0)}} = \int_0^1 x^{p+q} \, dx = \left[\frac{x^{p+q+1}}{p+q+1} \right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{1}{p+q+1}}}$

$$\int_0^1 x^p (1-x)^p \, dx = I(p,p) = \frac{p!p!}{(2p)!(2p+1)}$$

$$= \frac{(p!)^2}{(2p+1)!} \quad (\text{car } n!(n+1) = (n+1)!)$$

Donc $\underline{\underline{\int_0^1 x^p (1-x)^p \, dx = \frac{(p!)^2}{(2p+1)!} \quad \forall p \in \mathbb{N}}}$

Code épreuve : 298	Nombre de pages : 23	Session : 2022

Emplacement QR Code

Épreuve de : maths Edhec

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Partie 2 Problème

$a_n = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2}$ $\quad b_n(x) = \begin{cases} d_n x^n (1-x)^n & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{si } x \notin [0,1] \end{cases}$

3) • $b_n \geq 0$ car $d_n \geq 0$ $\forall n \geq 0$ et car $(1-x)^n \in [0,1]$ $\forall x \in [0,1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$. Et $b_n = 0$ si $x \notin [0,1]$

• b_n continue sur $\mathbb{R} \setminus]0,1[$ en tant que fonction nulle. sur $]0,1[$, b_n est continue par composée et produit de fonctions qui le sont.
Donc b_n est continue sur $\mathbb{R}$, sauf peut-être en 0 et 1.

• $\int_{-\infty}^{+\infty} b_n(x)dx = \int_0^1 b_n(x)dx = \int_0^1 d_n x^n (1-x)^n dx$

$= \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \int_0^1 x^n (1-x)^n dx$

$= \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \times \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$ d'après Q. 2b).

$= 1$

Donc b_n est une densité.

4). X_0 admet b_0 comme densité. $b_0(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in [0,1] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

car $d_0 = 1$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Donc $X_0 \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$

5a).

X_n possède une espérance si, et seulement si, $\int_{-\infty}^{+\infty} t b_n(t) dt$ converge.

$\int_{-\infty}^{+\infty} t b_n(t) dt = \int_0^1 a_n t \times t^n (1-t)^n dt$ car $b_n(t)$ est nulle en dehors de $[0,1]$.

Donc Xn possède une espérance, et :

$E(X^n) = a_n \int_0^1 t^{n+1} (1-t)^n dt$

$= a_n I(n+1, n)$

$= \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \times \frac{(n+1)!\, n!}{(2n+1)!} I(2n+1, 0)$ d'après Q. 1b).

$= \frac{(n+1)!}{n!} I(2n+1, 0) = \frac{(n+1)!}{n!} \times \frac{1}{2n+2} = \frac{(n+1)!}{n!\,2(n+1)}$

$= \frac{\cancel{1} \times \cancel{2} \times \cdots \times \cancel{n} \times \cancel{(n+1)}}{\cancel{1} \times \cancel{2} \times \cdots \times \cancel{n} \times 2\cancel{(n+1)}}$

$= \frac{1}{2}$

on a donc $\boxed{E(X_n) = \frac{1}{2}}$

5b). Xn possède une variance si, et seulement si, Xn possède un moment d'ordre 2, donc si $a_n \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 b_n(t) dt$ converge.

$a_n \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 b_n(t) dt \overset{a_n}{=} \int_0^1 t^2 b_n(t) dt$, donc $V(X_n)$ existe, et :

$$\underline{\underline{v(x_n)}} = \int_0^1 \alpha_n t^{n+2} (1-t)^n \, dt$$

$$= \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} I(n+2, n)$$

$$= \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \times \frac{(n+2)!\,n!}{(2n+2)!} I(2n+2, 0)$$

$$= \frac{(2n+1)!\,(n+2)!}{n!\,(2n+2)!} \times \frac{1}{2n+3}$$

$$= \underline{\underline{\frac{(2n+1)!\,(n+2)!}{n!\,(2n+2)!\,(2n+3)}}}$$

c)

Partie 3 :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; f_n(x) = \alpha_n \int_0^x t^n (1-t)^n \, dt \quad \text{avec } \alpha_n = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2}$$

6). $\underline{\underline{f_0(x)}} = \alpha_0 \int_0^x dt = \int_0^x dt = \underline{\underline{x}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

7a). $\underline{f_n(1)} = \alpha_n \int_0^1 t^n (1-t)^n \, dt = \alpha_n I(n,n)$

$$= \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \times \frac{(n!)^2}{(2n)!} I(2n, 0)$$

$$= \frac{(2n+1)!}{(2n)!} \times \frac{1}{2n+1}$$

$$= \frac{(2n)!}{(2n)!} = \underline{1}$$

$\boxed{f_n(1) = 1}$

7b). $f_n(x) = \alpha_n \int_0^x t^n(1-t)^n dt = \alpha_n \int_1^{1-x} (1-u)^n u^n (-du) = -\alpha_n \int_1^{1-x} u^n(1-u)^n du$

avec le changement de variable $u = 1-t$ $\Leftrightarrow t = 1-u$

$= \alpha_n \int_{1-x}^1 u^n(1-u)^n du$

on a donc $\alpha_n \int_0^x t^n(1-t)^n dt = \alpha_n \int_{1-x}^1 u^n(1-u)^n du$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$f_n(1-x) = \alpha_n \int_0^{1-x} t^n(1-t)^n dt = \alpha_n \int_0^1 t^n(1-t)^n dt + \alpha_n \int_1^{1-x} t^n(1-t)^n dt$

donc $f_n(1-x) = f_n(1) \cancel{+} - f_n(x)$

donc $f_n(1-x) = 1 \cancel{+} - f_n(x)$ d'après Q. 7a).

donc $\boxed{f_n(1-x) + f_n(x) = 1}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

7c). $f_n(\frac{1}{2}) + f_n(1 - \frac{1}{2}) = 1$ d'après Q). 7b).

donc $2f_n(\frac{1}{2}) = 1 \Leftrightarrow f_n(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$

8a). f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ car ~~x~~ $t \mapsto t^n(1-t)^n$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Donc f_n est dérivable, et :

$f_n'(x) = \alpha_n x^n (1-x)^n$ (c'est la primitive de f_n qui s'annule en 0)

$= \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} x^n (1-x)^n$

$\forall x \in \mathbb{R}$

8b). Tout d'abord, $\alpha_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Le signe de f_n' dépend donc du signe de $x^n(1-x)^n$.

- si n est pair, x^n et $(1-x)^n$ sont positifs pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- si n est impair, x^n ~~et (1-x)^n~~ est positif si $x > 0$, négatif si $x < 0$.

et $(1-x)^n$ est positif si x est inférieur à 1, et négatif ~~sur~~ si x est supérieur à 1.

Emplacement QR Code

Code épreuve : 298 | **Nombre de pages :** 23 | **Session :** 2022

Épreuve de : Maths Edhec

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Alors, si n est pair, f_n' est positif pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Si n est impair, f_n' est positif sur $]0,1[$, et négatif sur $\mathbb{R} \setminus]0,1[$.

9a). $t^n(1-t)^n = (t(1-t))^n$
$= (t-t^2)^n$
$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k (-t^2)^{n-k}$ d'après la formule du binôme de newton.

donc $f_n(x) = \alpha_n \int_0^x \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k (-t^2)^{n-k} \, dt$
$= \alpha_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \int_0^x t^k (-t^2)^{n-k} \, dt$ j'admet que fn est une fonction polynomiale

. Si n est paire : $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = +\infty$ $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = -\infty$

. Si n est impaire : $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = -\infty$ $\lim_{n\to-\infty} f_n(x) = +\infty$

9b). Tableau de variations de fn si n est pair :

	$-\infty$		$+\infty$
f_n'		+	
f_n	$-\infty$	↗	$+\infty$

Tableau de variations de fn ~~est~~ n est impair :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f_n'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f_n	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

$f_n(0) = a_n \int_0^0 t^n (1-t)^n \, dt = 0$

10). $n \geq 1$

a). $f_n'(x) = \dfrac{(2n+1)!}{(n!)^2} x^n (1-x)^n \quad \forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$

$$f_n''(x) = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \left(n x^{n-1} (1-x)^n - n x^n (1-x)^{n-1} \right)$$

$$= \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \left(n x^n (1-x)^n \left(x^{-1} - (1-x)^{-1} \right) \right) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

10)b). $\dfrac{(2n+1)!}{(n!)^2} > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

· fn admet un point d'inflexion là où f_n'' s'annule.

Si n est paire : f_n'' s'annule en 0, en 1

Si n est impaire : f_n'' s'annule en

Exercice 2

1). $X = 0$
while
  $X = n+1$

2a). X_n représente le niveau du joueur. Il peut avoir le niveau 0 (s'il ne réussit pas le niveau 1) ou n (s'il les réussit tous). Mais le joueur peut aussi avoir n'importe quel niveau compris entre 0 et n s'il échoue au niveau $k \in [\![1, n-1]\!]$.

Donc $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$

2b). $P(X_n = 0)$ représente la probabilité que le joueur échoue au niveau 1.

$(X_n = 0) = \overline{R_1}$

Donc $P(X_n = 0) = 1 - p = q$

2c). $(X_n=n)=\bigcap_{k=1}^{n} R_k$

Donc $P(X_n=n)=\prod_{k=1}^{n} P(R_k)$ car les évènements R_k sont indépendants pour tous $k\in[\![1,n]\!]$

$P(X_n=n)=P(R_k)^n$ (n termes dans le produit)

$=p^n$

Donc $\boxed{P(X_n=n)=p^n}$

2d). $(X_n=k)=\left(\bigcap_{i=1}^{k} R_i\right)\cap \overline{R_{k+1}}$

Donc $P(X_n=k)=\left(\prod_{i=1}^{k} P(R_i)\right)\times P(\overline{R_{k+1}})$

$=p^k(1-p)=qp^k$ Donc $\boxed{P(X_n=k)=qp^k}$ $\forall k\in[\![1,n-1]\!]$

Avec $k=0$, $P(X_n=0)=qp^0=q$, comme nous l'avions trouvé.

3) $\sum_{k=0}^{n} P(X_n=k)=\sum_{k=0}^{n-1} P(X_n=k)+P(X_n=n)$

$=\sum_{k=0}^{n-1} qp^k+p^n$

$=q\sum_{k=0}^{n-1} p^k+p^n$

$=q\times\frac{1-p^n}{1-p}+p^n$ car c'est une somme géométrique

$=\frac{q(1-p^n)}{q}+p^n$

$=1-p^n+p^n=1$

on a bien $\sum_{k=0}^{n} P(X_n=k)=1$

4a). $X_n(\Omega)=[\![0,n]\!]$, X_n ~~admet~~ prend donc ses valeurs dans un ensemble fini, donc X_n admet une espérance, et :

$E(X_n)=\sum_{k=\cancel{0}\,1}^{n} kP(X_n=k)=\sum_{k=\cancel{0}\,1}^{n-1} kqp^k+nP(X_n=n)$

Code épreuve : 298 **Nombre de pages :** 23 **Session :** 2022

Emplacement QR Code

Épreuve de : Maths Edhec

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

$$E(X_n) = \sum_{k=1}^{n-1} kqp^k + np^n$$

b). $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X_n)$: • $\lim\limits_{n\to+\infty} np^n = 0$ par croissances comparées car $p \in]0,1[$.

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X_n) = \sum_{k=1}^{+\infty} kqp^k$

$= q \sum_{k=1}^{+\infty} k p^{k-1} \times p$ c'est une série géométrique d'ordre un, donc :

$p \neq 0$ $= \frac{q}{p} \times \frac{1}{(1-p)^2}$

$= \frac{q}{pq^2} = \frac{1}{pq}$

Donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} E(X_n) = \frac{1}{pq}}$

5a). on a montré que $P(X_n=k)$ pour tout $k \in [\![1,n-1]\!]$ et pour tout $n \geq 1$. Ici, on cherche $P(X_n=k)$ pour tout entier naturel k et pour tout $n \geq k+1$:

$P(X_n=k) = P(X_n=0) + \prod_{i=1}^{n-1} P(R_k) \times P(\overline{R_{k+1}}) + \ldots P(X_n=n)$

$= q + qp^k + p^n$, j'admet le résultat

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

5b). $\lim\limits_{k \to +\infty} P(X_n = k) = \lim\limits_{k \to +\infty} p^k q = 0.$ Ⅱ J'ai fait une erreur, j'admet le résultat.

5c). $Y = X+1$ $P(Y=k) = P(X+1=k) = P(X=k-1) =$

$E(X) = E(Y) - 1$ par linéarité.

Exercice 3

1). $f_n(x) = \dfrac{x}{x+n}$ $\forall x \in [0,1]$ et $\forall n \geq 1$

$f_n'(x) = \dfrac{x+n-x}{(x+n)^2} = \dfrac{n}{(x+n)^2} > 0$ $\forall x \in [0,1], \forall n \geq 1$

Donc f_n est strictement croissante sur $[0,1]$.

Tableau de variations de f_n:

	0	1
f_n'	+	
f_n	0 ↗	$\dfrac{1}{1+n}$

$f_n(1) = \dfrac{1}{1+n}$

$f_n(0) = 0$

2) $\forall n \geq 1$, $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{n(x+n)} \, dx$

• $x \mapsto \frac{x}{n(x+n)} \geq 0 \ \forall x \in [0,1], \forall n \geq 1$

donc $\int_0^1 \frac{x}{n(x+n)} dx \geq 0$ pour tout entier naturel non nul, donc $u_n \geq 0$.

. on montre que $u_n \leq \frac{1}{n(n+1)}$

Pour $x=1$: $u_n = \int_0^1 \frac{1}{n(n+1)} dx = \frac{1}{n(n+1)}$

or, $u_n = \int_0^1 \frac{1}{n} f_n(x)$ ~~vrai~~. Et $f_n(x)$ admet un maximum en $x=1$.

Donc $u_n \leq \frac{f_n(1)}{n}$

$\leq \frac{1}{n(n+1)} \ \forall n \geq 1$

on a donc ; $\boxed{0 \leq u_n \leq \frac{1}{n(n+1)}} \ \forall n \geq 1$.

3) on a : $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n(n+1)} \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Donc $\sum_{n \geq 1} u_n \leq \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$

$\leq \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2+n}$

$\leq \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ La série de terme général $\frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann d'exposant 2, donc elle converge $(2>1)$, donc, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série de terme général u_n est convergente.

4) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$

a). on a vu que $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge, donc $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

b) $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n+1}$ on a bien : $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$\lim_{n \to +\infty} S_n = \gamma$ on sait que : $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n(n+1)}$

donc $0 \leq S_n \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

$\leq \sum_{k=1} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ Par télescopage

$\leq 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$\leq 1 - \frac{1}{n+1}$

$\lim_{\to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

donc : $\boxed{0 \leq \gamma \leq 1}$

c) $S_{n+1} - S_n = \sum_{k=1}^{n+1} u_k - \sum_{k=1}^{n} u_k$

$= u_{n+1} \geq 0 \quad \forall n \geq 1.$

Donc $S_{n+1} - S_n \geq 0$ pour tout $n \geq 1$, donc $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

5a). $\frac{a}{k} - \frac{b}{x+k} = \frac{a(x+k) - bk}{k(x+k)}$

$= \frac{ax + ak - bk}{k(x+k)}$

$= \frac{ax + (a-b)k}{k(x+k)}$

on cherche deux réels a et b tels que $\frac{a}{k} - \frac{b}{k+1} = \frac{x}{k(x+k)}$, donc on a :

$\begin{cases} a = 1 \\ a - b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$

on a donc, pour tout $x \in [0,1]$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\boxed{\frac{x}{k(x+k)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{x+k}}$

$u_k = \int_0^1 \frac{x}{k(x+k)} dx$

Code épreuve : 298

Nombre de pages : 23

Session : 2022

Épreuve de : maths Edhec

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

$$u_k = \int_0^1 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x+k}\right)dx$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{k} - \int_0^1 \frac{dx}{x+k} \quad \text{par linéarité}$$

$$= \frac{1}{k} - [\ln(x+k)]_0^1$$

$$= \frac{1}{k} - \ln(1+k) + \ln(k)$$

on a donc $\boxed{u_k = \frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln(k)}$

b) $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln(k)\right)$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n} \ln(k) - \ln(k+1)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \left(\ln(1) - \cancel{\ln(2)} + \cancel{\ln(2)} - \ln(3) + \dots + \cancel{\ln(n)} - \ln(n+1)\right)$$

Par télescopage.

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + 0 - \ln(n+1)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$$

donc $\boxed{S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)}$ pour tout entier naturel n non nul

6). $\forall n \geq 1, T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

6a). $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$

$\Leftrightarrow T_n - \ln(n+1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) - \ln(n+1)$

$\Leftrightarrow T_n - \ln(n+1) = S_n - \ln(n)$

$\Leftrightarrow T_n = S_n + \ln(n+1) - \ln(n)$

$\Leftrightarrow T_n = S_n + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

$\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(\frac{n(1+\frac{1}{n})}{n}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ln(1) = 0$

Et on a vu que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergait,
Donc $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, et sa limite est γ.

6b) $\ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

- $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \Leftrightarrow 1+\frac{1}{n} \leq e^{1/n} \Leftrightarrow \frac{1}{n} \leq e^{\frac{1}{n}} - 1$.

J'admet le résultat.

$T_{n+1} - T_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln(n)$

$= \frac{1}{n+1} + \ln(n) - \ln(n+1)$

on sait que $\ln(n+1) - \ln(n) \geq \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \geq 1$

donc $\ln(n+1) - \ln(n) - \frac{1}{n+1} \geq 0$

donc $\ln(n) - \ln(n+1) + \frac{1}{n+1} \leq 0$

donc $T_{n+1} - T_n \leq 0 \quad \forall n \geq 1$

donc la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante

6c). $\gamma = \lim_{n\to+\infty} S_n$ on sait que $T_n = S_n + \ln(n+1) - \ln(n)$
Et que : $\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$

donc $\frac{1}{n+1} \leq T_n - S_n \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \geq 1$

$\Leftrightarrow$

7b). $T_n - S_n = \ln(1+\frac{1}{n})$ car on a vu que $T_n = S_n + \ln(1+\frac{1}{n})$

```
n=1
S=1-log(2)
while log(1+ 1/n)> 10^(-3)
    n=n+1
    S=S+1
end
disp (n)
```

IMPRIMERIE NATIONALE – 2020-12-PF 018 751