Copie anonyme - n°anonymat : 924308

V6-00195
924308
Maths E

Code épreuve : 298	Nombre de pages : 35	Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques EDHEC.

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 1 :

1) Soit φ l'application qui à toute matrice M de $M_2(\mathbb{R})$ associe $\varphi(M) = JM - MJ$.

- $M \in M_2(\mathbb{R})$
- MJ et JM appartiennent à $M_2(\mathbb{R})$ par stabilité du produit de de matrices appartenant à $M_2(\mathbb{R})$. Donc $\varphi \in M_2(\mathbb{R})$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, Soit $(M,N) \in (\varphi)^2$.

On a $\varphi(\lambda M + N) = J(\lambda M + N) - (\lambda M + N)J$

$= \lambda JM + JN - \lambda MJ - NJ$

$= \lambda(JM - MJ) + (JN - NJ)$

$= \lambda\varphi(M) + \varphi(N)$

Conclusion : φ est une application linéaire donc φ est un endomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$

2) a) $\varphi(K_1) = JK_1 - K_1J$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{-k_2 + k_3}$$

- $\varphi(k_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{-k_1 + k_4}.$$

- $\varphi(k_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{k_1 - k_4}$$

- $\varphi(k_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{k_2 - k_3}$$

b) Soit A la matrice de φ dans la base (k_1, k_2, k_3, k_4).

A est construite à partir du calcul de $\varphi(k_1)$, $\varphi(k_2)$, $\varphi(k_3)$ et $\varphi(k_4)$ et ces résultats donnent respectivement les colonnes de la matrice A où $A \in M_4(\mathbb{R})$.

ainsi, on peut poser A telle que $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

c) on remarque que A est symétrique réelle. Donc comme A est la matrice de φ dans la base (k_1, k_2, k_3, k_4) on en déduit que φ est diagonalisable.

3) a) Soit (C_1, C_2, C_3, C_4) les 4 colonnes de A.

par définition, on a : $rg(A) = rg(C_1, C_2, C_3, C_4)$.

or, on remarque que $C_1 = -C_4$ et que $C_2 = -C_3$

Ainsi, $rg(C_1, C_2, C_3, C_4) = rg(C_1, C_2)$

C_1 et C_2 sont non colinéaires donc (C_1, C_2) est une famille libre.

Ainsi, $rg(C_1, C_2) = 2$.

conclusion : $rg(A) = rg(C_1, C_2, C_3, C_4) = 2$.

Enfin, on a $Im(\varphi) = Vect(\varphi(k_1), \varphi(k_2), \varphi(k_3), \varphi(k_4))$

car $\begin{cases} \varphi(k_1) = -\varphi(k_4) \\ \varphi(k_2) = -\varphi(k_3) \end{cases}$ $\longrightarrow$ $= Vect(\varphi(k_1), \varphi(k_2))$

$= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right).$

$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont non colinéaires donc $\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ est libre. De plus, $\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ est génératrice de $\text{Im}(\varphi)$ donc $\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\text{Im}\,\varphi$ et on a $\dim \text{Im}\,\varphi = 2$

b) on sait que φ est un endomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$ où $M_2(\mathbb{R})$ est de dimension finie ($\dim M_2(\mathbb{R}) = 4$).

Donc d'après le théorème du rang, on a :

$$\dim \ker(\varphi) + \dim \text{Im}(\varphi) = \dim M_2(\mathbb{R})$$
$$\iff \dim \ker(\varphi) = 4 - 2$$
$$\iff \dim \ker(\varphi) = 2$$

Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ et $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

$$X \in \ker(\varphi) \iff \varphi(X) = 0$$
$$\iff A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0$$
$$\iff \begin{cases} -y + z = 0 \\ -x + t = 0 \\ x - t = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = z \\ x = t. \end{cases}$$

$$\text{Donc } \ker(\varphi) = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} \; (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$
$$= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

Copie anonyme - n°anonymat : 924308

Code épreuve : 298 | **Nombre de pages :** 35 | **Session :** 2022

Épreuve de : Mathématiques EDHEC

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

$= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\right)$ car $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$.

$= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\right)$ car $\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$

$= \text{Vect}(I, J)$.

Donc comme I et J sont non colinéaires, (I, J) est libre. De plus, (I, J) est génératrice de $\ker \varphi$ donc (I, J) est une base de $\ker\varphi$ et $\dim \ker \varphi = 2$

4) a) on a $A^2 = \begin{pmatrix}0&-1&1&0\\-1&0&0&1\\1&0&0&-1\\0&1&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&1&0\\-1&0&0&1\\1&0&0&-1\\0&1&-1&0\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}2&0&0&-2\\0&2&-2&0\\0&-2&2&0\\-2&0&0&2\end{pmatrix}$

et $A^3 = \begin{pmatrix}2&0&0&-2\\0&2&-2&0\\0&-2&2&0\\-2&0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&1&0\\-1&0&0&1\\1&0&0&-1\\0&1&-1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&-4&4&0\\-4&0&0&4\\4&0&0&-4\\0&4&-4&0\end{pmatrix}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Ainsi, avec $4A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & +4 \\ 4 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

on a $A^3 - 4A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & +4 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

conclusion : $A^3 - 4A = 0$.

b) on pose $P(x)$ le polynome annulateur de A tel que

$P(x) = x^3 - 4x$.

$P(x) = 0 \iff x^3 - 4x = 0$

$\iff x(x^2 - 4) = 0$

$\iff x = 0$ ou $x = -2$ ou $x = 2$

Ainsi, on sait par définition que les valeurs propres de A sont parmi les racines de son polynôme annulateur.

conclusion : 0, -2 et 2 sont les valeurs propres possibles de A. or comme A est la matrice de φ dans la base (k_1, k_2, k_3, k_4), on en déduit que les valeurs propres possibles de φ sont -2, 0 et 2.

5) on remarque que le script scilab renvoie :

$rg(A-2I) = 3$
$rg(A+2I) = 3$.

on peut donc conjecturer grâce au théorème du rang que

2 et -2 sont valeur propre de φ et que l'on a :

$$\begin{cases} \dim E_2(\varphi) = 1 \\ \dim E_{-2}(\varphi) = 1 \end{cases}$$

on note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$

6) a) $AX = 2X \iff (A-2I)X = 0$

$$\iff \begin{cases} -2x - y + z = 0 \\ -x - 2y + t = 0 \\ x - 2z - t = 0 \\ y - z - 2t = 0 \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1}}{\iff} \begin{cases} -2x - y + z = 0 \\ -3y - z + 2t = 0 \\ -y - 3z - 2t = 0 \\ y - z - 2t = 0 \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow 3L_3 - L_2 \\ L_4 \leftarrow 3L_4 + L_2}}{\iff} \begin{cases} -2x - y + z = 0 \\ -3y - z + 2t = 0 \\ -8z - 8t = 0 \\ -4z - 4t = 0 \end{cases}$$

$$\underset{L_3 = 2L_4}{\iff} \begin{cases} x = \frac{1}{3}t \\ y = \frac{1}{3}t \\ z = t \end{cases}$$

Conclusion : on a donc $AX = 2X \iff X = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

De même $AX = -2X \iff (A+2I)X = 0$

$$\iff \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ -x + 2y + t = 0 \\ x + 2z - t = 0 \\ y - z + 2t = 0 \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1}}{\iff} \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ 3y + z + 2t = 0 \\ y + 4z - t = 0 \\ y - z + 2t = 0 \end{cases} \underset{\substack{L_3 \leftarrow 3L_3 - L_2 \\ L_4 \leftarrow 3L_4 - L_2}}{\iff} \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ 3y + z + 2t = 0 \\ 11z - 5t = 0 \\ -4z + 4t = 0 \end{cases}$$

Non abouti, ~~on admet~~

b) On a montré que 0, 2 et −2 sont des valeurs propres possibles.

De plus, on note $E_\lambda(\varphi) = \{X \in M_{4,1}(\mathbb{R}),\ AX = \lambda X\}$ le sous espace propre associé à la valeur propre λ.

On en déduit donc que 2 est valeur propre et on a $E_2(\varphi) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ de dimension 1.

On admet que 2 est valeur propre (ce qui aurait dû être démontré grâce à la résolution du système..

De plus, on a montré que $\ker \varphi \neq 0_{M_2(\mathbb{R})}$ donc par définition, 0 est valeur propre de φ et on a $E_0(\varphi) = \ker \varphi = \mathrm{Vect}(I, J)$.

Ainsi, on a 0, 2 et −2 valeurs propres de φ.

De plus, on a $\varphi \in \mathcal{L}(M_2(\mathbb{R}))$ donc la dimension de ses sous espaces propres est d'au plus 4.
On a $\dim E_2(\varphi) + \dim E_{-2}(\varphi) + \dim E_0(\varphi) = 1 + 1 + 2 = 4$.

Conclusion : 0, 2 et −2 sont les seules valeurs propres de φ : $Sp(\varphi) = \{0, 2, -2\}$

Copie anonyme - n°anonymat : 924308

Emplacement QR Code	Code épreuve : 298	Nombre de pages : 35	Session : 2022
	Épreuve de : Mathématiques EDHEC		

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Exercice 2 :

1)
```
p = input ('entrez la valeur de p dans ]0;1[ :')
n = input ('entrez la valeur de n :')
X = 0
while X <> n & rand() <= p
    X = X+1
end
disp(X, 'le niveau du joueur est :')
```

2)a) X_n est une variable aléatoire donnant le niveau du joueur.

- X_n peut valoir 0 si le joueur échoue au 1^er niveau.
- X_n peut prendre la valeur n si le joueur réussit tous les niveaux, y compris le niveau n.
- Enfin, X_n peut prendre la valeur k ($k \in [\![1;n-1]\!]$) si le joueur réussit k niveau(x) mais échoue au niveau $k+1$.

Conclusion : on a donc $X_n(\Omega) = [\![0;n]\!]$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

b) $[X_n = 0]$ représente l'évènement "le joueur a échoué au niveau 1".

Or on sait par énoncé que la probabilité d'accéder au niveau 1 est égale à p ($p \in]0;1[$). Ainsi, la probabilité de ne pas accéder au niveau 1 est égale à $1-p$.

On en déduit ainsi que $P(X_n = 0) = 1-p$

c) $(X_n = n)$ signifie que le joueur à le niveau n, il a donc réussi tous les niveaux, y compris le niveau n.

Le joueur a donc successivement et sans jamais échouer réussi les n niveaux.

Ainsi : $(X_n = n) = (R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_{n-1} \cap R_n)$.

$$= \left(\bigcap_{i=1}^{n} R_i\right).$$

Ainsi, $P(X_n = n) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} R_i\right)$

probabilité de passer au niveau supérieure est constante égale à p.

$$= (P(X_n = 1))^n$$

$$= p^n.$$

Conclusion : $P(X_n = n) = p^n$

d) De même $\overset{\forall k \in [\![1;n-1]\!]}{(X_n = k)}$ signifie que le joueur a réussi k niveau(x) mais a échoué au niveau $(k+1)$.

Il y a donc eu une suite de succès du 1^{er} au $k^{ème}$ niveau et un échec au $(k+1)^e$ niveau.

Donc, $\forall k \in [\![1;n-1]\!]$,

$$(X_n = k) = (R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_{k-1} \cap R_k \cap \overline{R_{k+1}}).$$

Ainsi, de même qu'à la question 2)c),

on a $P(X_n = k) = P\left(\bigcap_{i=1}^{k} R_i \cap \overline{R_{k+1}}\right)$

probabilité de passer au niveau suivant constante égale à p.

$$= (P(X_1 = 1))^k (1 - P(X_n = 1))$$

$$= \underline{p^k q}.$$

conclusion : $\underline{\forall k \in [\![1;n-1]\!],\ P(X_n = k) = p^k q}.$

pour $k = 0$, on a montré que $P(X_n = 0) = 1 - p = q$.

$$p^0 q = 1 \times q = q = P(X_n = 0)$$

<u>L'expression reste valable pour k = 0</u>

3) on a : $\sum_{k=0}^{n} P(X_n = k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X_n = k) + P(X_n = n)$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} p^k q + p^n.$$

$\underline{p \neq 1} \rightarrow = \cancel{q} \dfrac{1-p^n}{\cancel{1-p}} + p^n.$

$$= 1 - p^n + p^n$$

$$= 1.$$

Conclusion : $\sum_{k=0}^{n} P(X_n = k) = 1.$

4/a) X_n admet une espérance car X_n est une variable aléatoire finie (support fini).

Ainsi, par définition de l'espérance, on a :

$$E(X_n) = \sum_{k=0}^{n} k P(X_n = k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} k P(X_n = k) + n P(X_n = n)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} k p^k q + n p^n.$$

Conclusion : $E(X_n)$ existe et $E(X_n) = \sum_{k=0}^{n-1} k p^k q + n p^n$

b) on a $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} k p^k q = \sum_{k=0}^{+\infty} k p^k q$

$$= 0 + \sum_{k=1}^{+\infty} k p^k q$$

$$= qp \sum_{k=1}^{+\infty} k p^{k-1} \quad \text{licite car } |p| < 1$$

$$= qp \frac{1}{(1-p)^2}$$

$$= \frac{p}{q}$$

De plus, on a $\lim_{n \to +\infty} n p^n = 0$ car $|p| < 1$

Copie anonyme - n°anonymat : 924308

Emplacement QR Code	**Code épreuve :** 298	**Nombre de pages :** 35	**Session :** 2022
	Épreuve de : Mathématiques EDHEC.		
	Consignes	• *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer* • *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir* • *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)* • *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)* • *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*	

Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} E(X_n) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} kp^k q + np^n$

$= \frac{p}{q}.$

conclusion : $\underline{\lim_{n\to+\infty} E(X_n) = \frac{p}{q}}$

5) a) Soit $k \in \mathbb{N}$,

Il existe donc un nombre infini de niveau mais la probabilité de passer d'un niveau à un autre est ~~tjours~~ constante égale à p.

De plus, $\forall k \in \mathbb{N}, \forall n \geq k+1$, on sait que $(X_n = k)$ signifie que le joueur a réussi successivement k niveau(x) et a échoué au niveau $(k+1)$

Ainsi, seul k varie (c'est à dire le nombre de succès).

Par conséquent, on en déduit comme en question 2)a) :

$\forall k \in \mathbb{N}, \forall n \geq k+1$, $\underline{P(X_n = k) = p^k q}$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

b) on a $\lim_{n\to+\infty} P(X_n = k) = \lim_{n\to+\infty} p^k q$

$= p^k q$

conclusion : $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire X tel que $\forall k\in\mathbb{N}$, $P(X=k) = p^k q$.

c) soit $Y = X+1$.

Comme $X(\Omega) = \mathbb{N}$, on en déduit que comme $Y = X+1$,

on a $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

Ainsi, $\forall k\in\mathbb{N}^*$, on a $P(Y=k) = P(X+1=k)$
$= P(X = k-1)$
$= p^{k-1} q$

Ainsi, on reconnait le support et le terme général d'une loi géométrique de paramètre q $(q\in]0;1[)$

Ainsi $Y \hookrightarrow G(q)$

Donc Y admet par définition une espérance et on a :

$E(Y) = \frac{1}{q}$

X admet une espérance car est fonction de Y qui en admet une.
De plus, comme on a $Y = X+1 \iff X = Y-1$, on en déduit par linéarité de l'espérance :

$$E(X) = E(Y-1)$$; linéarité de l'espérance

$$= E(Y) - 1$$

$$= \frac{1}{q} - 1$$

$$= \frac{p}{q}$$

on a donc $E(X) = \frac{p}{q}$.

on remarque que $\lim_{n \to +\infty} E(X_n) = E(X) = \frac{p}{q}$

Exercice 3 :

1) $\forall n \geq 1$, $\forall x \in [0;1]$, on pose $f_n(x) = \frac{x}{x+n}$

f est C^1 sur $[0;1]$ comme quotient dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0;1]$ de fonctions C^1 sur $[0;1]$.

Ainsi, $\forall n \geq 1$, $\forall x \in [0;1]$, $f_n'(x) = \frac{x+n-x}{(x+n)^2}$

$$\Leftrightarrow f_n'(x) = \frac{n}{(x+n)^2}$$

- $n \geq 1$
- $(x+n)^2 \geq 0$ $\forall x \in [0;1]$ et $\forall n \geq 1$

x	0 $\qquad$ 1
$(x+n)^2$	$+$
n	$+$
$f_n'(x)$	$+$
$f_n''(x)$	$\nearrow$

2) $\forall n \geq 1$, on pose $u_n = \int_0^1 \frac{x}{n(x+n)}$

$\forall x \in [0;1]$, on a $0 \leq x \leq 1$. $\downarrow n \geq 1$

$\Leftrightarrow n \leq x+n \leq n+1$

$\Leftrightarrow n^2 \leq (x+n)n \leq n(n+1)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{(x+n)n} \leq \frac{1}{n^2}$

$\underset{x \in [0;1]}{\Leftrightarrow} \frac{x}{n(n+1)} \leq \frac{x}{(x+n)n} \leq \frac{x}{n^2}$

Les fonctions en jeu sont continues sur $[0;1]$ et les bornes sont dans l'ordre croissant, donc par croissance de l'intégrale, on a :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x}{n(n+1)}\,dx \leq u_n \leq \int_0^1 \frac{x}{n^2}\,dx.$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n^2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \leq u_n \leq \frac{1}{2n^2}.$$

or $n(n+1) - 2n^2 = n - n^2$

$= -n(n+1) \leq 0 \quad \forall n \geq 1.$

donc $\forall n \geq 1$, $2n^2 \geq n(n+1)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2n^2} \leq \frac{1}{n(n+1)}$ ↓ décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ainsi, en élargissant l'encadrement, $\forall n \geq 1$, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n(n+1)}$

Copie anonyme - n°anonymat : 924308

Code épreuve : 298	Nombre de pages : 35	Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

3) on a $\forall n \geq 1$, $n(n+1) = n^2 + n$

or $n^2 + n \underset{+\infty}{\sim} n^2$ car $n \underset{+\infty}{=} o(n^2)$

De plus $\sum_{n\geq1} \frac{1}{n^2}$ converge en tant que série de Riemann de paramètre $2 > 1$.

Donc par critère d'équivalence et de majoration pour les séries à termes positifs, on en déduit que $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge

4)a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

Or comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est à termes positifs, on en déduit :

$\forall n \geq 1$, $\sum_{k=1}^{n} u_k \leq \sum_{k=1}^{+\infty} u_k$

or on a montré que $\sum_{k\geq1} u_k$ converge. Ainsi, par critère de majoration pour les séries à termes positifs, $\sum_{k=1}^{n} u_k$ converge.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)}$

$= \frac{1}{n(n+1)}$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

c) on a $\forall n \geq 1$, $S_{n+1} - S_n =$

Non abouti.

5) a) on note $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall x \in [0;1]$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$,

$\frac{x}{(x+k)k} = \frac{a}{k} - \frac{b}{x+k}$

$= \frac{a(x+k) - bk}{x(x+k)}$

$= \frac{ax + k(a-b)}{x(x+b)}$

on identifie :

$$\begin{cases} a = 1 \\ a - b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 1. \end{cases}$$

ainsi, en notant $a = 1$ et $b = 1$, on a $\forall x \in [0;1], \forall k \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{x}{x(x+k)} = \frac{a}{k} - \frac{b}{x+k}$$

Ainsi, $\forall k \geq 1$, $u_k = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{k(x+k)} \, dx$

$$= \int_0^1 \frac{1}{k} - \frac{1}{x+k} \, dx$$

licite car u_k converge

$$= \int_0^1 \frac{1}{k} \, dx - \int_0^1 \frac{1}{x+k} \, dx$$

$$= \frac{1}{k} \left[x \right]_0^1 - \left[\ln(k+x) \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln k$$

conclusion, $\forall k \geq 1$, $u_k = \frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln(k)$

b) on a $\forall n \geq 1$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln(k) \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \left(\ln(k+1) - \ln(k) \right)$$

$$\underset{\text{télescopage}}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \ln(1)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$$

conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\underline{S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)}$

6) a) on a $\forall n \geq 1$, $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$.

$$S_n - T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln n.$$

$$= \ln n - \ln(n+1)$$

$$= \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \leq 0 \quad \forall n \geq 1 \text{ par définition.}$$

Donc $S_n - T_n \leq 0 \iff \underline{S_n \leq T_n}$

Or on a montré que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente. Ainsi, on en déduit par critère de minoration que $\underline{(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ converge}}$

on a montré que $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et est minorée par $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

De plus $T_{n+1} - T_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln n.$

$$= \frac{1}{n+1} + \ln n - \ln(n+1)$$

Non abouti.

Copie anonyme - n°anonymat : 924308

Code épreuve : 298	Nombre de pages : 35	Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

b) $\forall x \in [0;1]$, $\forall n \geqslant 1$, on a :

$$0 \leqslant x \leqslant 1.$$

$$\Leftrightarrow n \leqslant x+n \leqslant n+1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{x+n} \leqslant \frac{1}{n}.$$

décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$.

Les fonctions en jeu sont continues sur $[0;1]$ et les bornes sont dans l'ordre croissant donc par croissance de l'intégrale, on a :

$$\int_0^1 \frac{1}{n+1}\,dx \leqslant \int_0^1 \frac{1}{x+n}\,dx \leqslant \int_0^1 \frac{1}{n}\,dx,$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n+1}\left[x\right]_0^1 \leqslant \left[\ln(x+n)\right]_0^1 \leqslant \frac{1}{n}\left[x\right]_0^1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln n \leqslant \frac{1}{n}.$$

conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln n \leqslant \frac{1}{n}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

on a montré sans aboutir que $\forall n \geq 1$, $T_{n+1} - T_n = \frac{1}{n+1} + \ln n - \ln(n+1)$

or on a montré que $\frac{1}{n+1} \leq \ln n+1 - \ln n$.

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n \leq 0.$$

Ainsi, $T_{n+1} - T_n \leq 0$. $\Leftrightarrow$ $T_{n+1} \leq T_n$.

Conclusion : $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante. Donc comme elle est decroissante et minorée, elle est convergente et converge vers γ ($\gamma \in \mathbb{R}$)

c) on sait que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et on a $\lim_{n \to +\infty} S_n = \gamma$

De plus, on sait que $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et on a $\lim_{n \to +\infty} T_n = \gamma$

Ainsi, on a : $S_n \leq \gamma \leq T_n$.

7) a) ϕ

b)

```
n = 1
s = 1 - log(2)
while
  n = n+1
  s = s +
end
disp
```

Problème

Partie 1 :

$\forall (p,q)$ d'entiers naturels, on pose $I(p,q) = \int_0^1 x^p (1-x)^q \, dx$.

1) a) $I(p,q)$ est bien définie sur $[0;1]$ car pour tout couple d'entiers naturels (p,q), $x \mapsto x^p(1-x)^q$ est continue sur $[0;1]$. Donc $I(p,q)$ est bien définie en tant qu'intégrale de fonctions continues et positives sur $[0;1]$.

b) on a montré donc que $I(p,q)$ est bien définie.

on peut donc poser :

$$\begin{cases} u'(x) = x^p \\ v(x) = (1-x)^q \end{cases} \qquad \begin{cases} u(x) = \dfrac{x^{p+1}}{p+1} \\ v'(x) = -q(1-x)^{q-1} \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont C^1 sur $[0;1]$ donc par intégration par parties, on a :

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \ I(p,q) = \left[\frac{x^{p+1}}{p+1} \times (-q)(1-x)^{q-1} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{x^{p+1}}{p+1} q(1-x)^{q-1} dx$$

$$= 0 - 0 + \frac{q}{p+1} \int_0^1 x^{p+1} (1-q)^{q-1} dx.$$

$$= \frac{q}{p+1} I(p+1, q-1)$$

conclusion, $\forall (p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, $I(p,q) = \frac{q}{p+1} I(p+1, q-1)$

2) a) $\forall (p,q) \in (\mathbb{N})^2$,

$$I(p+q,0) = \int_0^1 x^{p+q}\,dx.$$

$$= \left[\frac{x^{p+q+1}}{p+q+1} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{p+q+1} - 0$$

$$= \frac{1}{p+q+1}$$

conclusion: $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2$, $I(p+q,0) = \frac{1}{p+q+1}$

Ainsi, grâce au résultat admis dans l'énoncé, on a :

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N},\ I(p,q) = \frac{p!\,q!}{(p+q)!} \times \frac{1}{p+q+1}$$

$$= \frac{p!\,q!}{(p+q+1)!}$$

conclusion : $\forall (p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $I(p,q) = \frac{p!\,q!}{(p+q+1)!}$

b) $\forall p \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 x^p (1-x)^p\,dx = I(p,p)$

$$= \frac{p!\,p!}{(p+p+1)!} = \frac{(p!)^2}{(2p+1)!}$$

Conclusion : $\forall p \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 x^p (1-x)^p\,dx = \frac{(p!)^2}{(2p+1)!}$

Copie anonyme - n°anonymat : 924308

Code épreuve : 298	Nombre de pages : 35	Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques EDHEC

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Partie 2 :

3) Soit $b_n(x) = \begin{cases} \alpha_n x^n (1-x)^n & \text{si } x \in [0;1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

• $\forall x \in [0;1]$, $b_n(x) \geq 0$ en tant que produit de fonctions positives ou nulles sur $[0;1]$.

• $\forall x \notin [0;1]$, $b_n(x) \geq 0$ en tant que fonction nulle.

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$, $b_n \geq 0$

Ensuite, $\forall x \in]0;1[$, $b_n(x)$ est continue sur $]0;1[$ en tant que produit de fonctions continues sur $]0;1[$.

De plus, $b_n(x)$ continue sur $]-\infty;0[$ et sur $]1;+\infty[$ en tant que fonction nulle.

Ainsi, b_n est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et en 1.

Pour finir, b_n est une densité si $\int_{-\infty}^{+\infty} b_n(x)\,dx = 1$. et converge.

• On a $\int_{-\infty}^{0} b_n(x)\,dx$ et $\int_{1}^{+\infty} b_n(x)\,dx$ convergent et valent 0

car b_n nulle sur $]-\infty;0[$ et sur $]1;+\infty[$.

• $$\int_0^1 b_n(x)\,dx = \alpha_n\, I(n,n)$$

$$= \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \times \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$$

$$= 1.$$

↓ grâce à la question 2)b) partie 1.

Donc $\int_0^1 b_n(x)\,dx$ converge et vaut 1.

Donc, par relation de Chasles (licite car les intégrales convergent), $\int_{-\infty}^{+\infty} b_n(x)\,dx$ converge et vaut 1.

Conclusion : b_n est une densité

4) On a $b_0(x) = \begin{cases} \frac{(1!)}{(0!)^2} \times x^0 (1-x)^0 & \text{si } x \in [0;1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

$$= \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0;1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

on reconnait le terme général d'une densité d'une loi uniforme sur $[0;1]$.

Ainsi, X_0 suit une loi uniforme sur $[0;1]$.

5)a) X_n admet une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} x b_n(x)\,dx$ converge.

on a : $\int_{-\infty}^{0} x b_n(x)\,dx$ et $\int_{1}^{+\infty} x b_n(x)\,dx$ qui convergent et qui valent 0 (b_n nulle sur ces intervalles).

$$\cdot \int_0^1 x b_n(x)\,dx = \alpha_n \int_0^1 x^{n+1}(1-x)^n\,dx.$$

$$= \alpha_n\, I(n+1,n)$$

d'après la question 2)a) de la partie 1

$$= \frac{(2n+1)!}{(n!)^{\cancel{2}}} \times \frac{(n+1)!\,\cancel{n!}}{(n+1+n+1)!}$$

$$= \frac{(2n+1)!\,(n+1)}{(2n+2)!}$$

$$= \frac{(n+1)}{(2n+2)}$$

$$= \frac{\cancel{n+1}}{2(\cancel{n+1})}$$

$$= \frac{1}{2}$$

Donc $\int_0^1 x b_n(x)\,dx$ converge et vaut $\frac{1}{2}$.

Ainsi, par relation de Chasles (licite car les intégrales convergent), on en déduit que X_n admet une espérance et

$$E(X_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} x b_n(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} x b_n(x)\,dx + \int_0^1 x b_n(x)\,dx + \int_1^{+\infty} x b_n(x)\,dx$$

$$= 0 + \frac{1}{2} + 0$$

$$= \frac{1}{2}$$

b) X_n admet un moment d'ordre 2 si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 b_n(x)\,dx$ converge.

- $\int_{-\infty}^{0} x^2 b_n(x)\,dx$ et $\int_1^{+\infty} x^2 b_n(x)\,dx$ convergent et valent 0

car b_n est nulle sur $]-\infty ; 0[$ et sur $]1 ; +\infty[$.

- $\int_0^1 x^2 b_n(x)\,dx = \int_0^1 \alpha_n\, x^{n+2} (1-x)^n\,dx.$

$$= \alpha_n\, I(n+2, n)$$

grâce à la question 2)a) partie 1.

$$= \frac{(2n+1)!}{\cancel{(n!)^2}} \frac{(n+2)!\,\cancel{n!}}{(n+2+n+1)!}$$

$$= \frac{(2n+1)!(n+1)(n+2)}{(2n+3)!}$$

$$= \frac{\cancel{(n+1)}(n+2)}{2\cancel{(n+1)}(2n+3)}$$

$$= \frac{n+2}{2(2n+3)}$$

Donc $\int_0^1 x^2 \ln(x)\,dx$ converge et vaut $\frac{n+2}{2(2n+3)}$

Ainsi, par relation de Chasles (licite car les intégrales convergent), X_n admet un moment d'ordre 2 et on a

$$E(X_n^2) = \frac{n+2}{2(2n+3)}$$

Ainsi, comme X_n admet un moment d'ordre 2, elle admet par définition une variance donnée par la formule de Koenig-Huygens :

$$V(X_n) = E(X_n^2) - (E(X_n))^2$$

$$= \frac{n+2}{2(2n+3)} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{2(n+2) - (2n+3)}{4(2n+3)}$$

$$= \frac{\cancel{2n} + 4 - \cancel{2n} - 3}{4(2n+3)} = \frac{1}{4(2n+3)}$$

Conclusion : X_n admet une variance et $V(X_n) = \frac{1}{4(2n+3)}$

c) X_n est une variable aléatoire admettant une variance et une espérance. Donc, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev, on a :

$$\forall \varepsilon > 0,\ P(|X_n - E(X_n)| > \varepsilon) \leq \frac{V(X_n)}{\varepsilon^2}$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ P(|X_n - \frac{1}{2}| > \varepsilon) \leq \frac{1}{4\varepsilon^2(2n+3)}$$

or, $\forall \varepsilon > 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{4\varepsilon^2(2n+3)} = 0$

Donc par critère de majoration, on en déduit que :

$\forall \varepsilon > 0, \lim\limits_{n \to +\infty} P(|X_n - \frac{1}{2}| > \varepsilon) = 0$

Partie 3 :

6) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \alpha_n \int_0^x t^n (1-t)^n \, dt$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f_0(x) = \alpha_0 \int_0^x t^0 (1-t)^0 \, dt$.

$$= 1 \int_0^x 1 \, dt$$

$$= [t]_0^x = x.$$

30/35

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_0(x) = x$

7) a) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(1) = \alpha_n \int_0^1 t^n (1-t)^n dt.$

$= \alpha_n \, I(n,n)$ d'après la question 2)b) de la partie 1

$= \dfrac{(2n+1)!}{(n!)^2} \times \dfrac{(n!)^2}{(2n+1)!}$

$= 1.$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(1) = 1.$

b) $\forall x \in \mathbb{R}$, on pose $u = 1 - x = \varphi(x)$.

φ est C^1 sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de fonctions C^1 sur $\mathbb{R}$.

on a $\varphi(0) = 1$ et $\varphi(x) = 1 - x$

De plus, $du = \varphi'(x) dx = -dx$.

Ainsi, on a $f_n(x) = \alpha_n \int_0^x t^n (1-t)^n dt.$

$= -\alpha_n \int_0^x t^n (1-t)^n \, -dt.$

$=$

Non abouti.

c) on a montré que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) + f_n(1-x) = 1$.

avec $x = \frac{1}{2}$.

on a : $f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$.

$\Leftrightarrow 2f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$

$\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

Ainsi, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

8) a) f_n est continue sur $[0;x]$ en tant qu'intégrale de fonctions positives et continues sur $[0;x]$.

Donc f_n admet des primitives sur $[0;x]$, soit G_n l'une d'entres elles.

on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = G_n(x) - G_n(0)$.

x est C^1 sur $\mathbb{R}$, 0 est C^1 sur $\mathbb{R}$ et n est C^1 sur $\mathbb{R}$ en tant que primitive de f_n fonction continue sur $[0;x]$ où $x \in \mathbb{R}$.

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$, f_n est C^1 et on a :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n'(x) = G_n'(x) - G_n(0)$
$= 1 g_n(x)$.
$= \alpha_n x^n (1-x)^n$.

conclusion : f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n'(x) = \alpha_n x^n (1-x)^n$.

Copie anonyme - n°anonymat : 924308

Code épreuve : 298	Nombre de pages : 35	Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques EDHEC.

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

b) • Si n est pair :

on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n'(x) = \alpha_n x^n (1-x)^n$

avec n pair, $x^n \geq 0$ et $(1-x)^n \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

et $\alpha_n \geq 0$

Donc si n est pair, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n'(x)$ est positive ou nulle.

• Si n est impair :

si n impair, $\begin{cases} x^n \geq 0 \text{ si } x \in [0;+\infty[\\ x^n \leq 0 \text{ si } x \in]-\infty;0[. \end{cases}$

De même, si n est impair, $\begin{cases} (1-x)^n \geq 0 \text{ si } x \in]-\infty;1]. \\ (1-x)^n \leq 0 \text{ si } x \in]1;+\infty[. \end{cases}$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n \geq 0$.

Ainsi, on a :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$(1-x)^n$		$+$		$+$	0	$-$	
x^n		$-$	0	$+$		$+$	
α_n^*		$+$		$+$		$+$	
$f'_n(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi, si n est impair, $f'_n(x)$ est supérieure ou égale à 0 sur $[0;1]$ et inférieure à 0 sur $]-\infty;0[$ et sur $]1;+\infty[$

9)a) $\emptyset$

b) ~~on~~ si n est pair :

on a montré que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n'(x) \geq 0$ si n est pair.

Donc on a :

x	$-\infty$		$+\infty$
f_n'		$+$	
f_n		$\nearrow$	

ϕ

10) Soit $n \geq 1$.

a)

on a montré $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n'(x) = \alpha_n x^n (1-x)^n$.

f est C^2 sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale.

on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_n''(x) = -n\alpha_n x^n + n\alpha_n x^{n-1}(1-x)^n.$$

$$= n\alpha_n \left(x^{n-1}(1-x)^n - x^n\right).$$

$$= n\alpha_n x^{n-1}\left((1-x)^n - x\right).$$

conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \geq 1$, $f_n''(x) = n\alpha_n x^{n-1}\left((1-x)^n - x\right)$