Copie anonyme - n°anonymat : 849505

Code épreuve : 298	Nombre de pages : 38	Session : 2022

Épreuve de : MATHS E EDHEC BS

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice I

1) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soient $(M,N) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2$.

$$\varphi(\lambda M+N) = J(\lambda M+N) - (\lambda M+N)J$$
$$= \lambda(JM-MJ) + (JN-NJ)$$
$$\Leftrightarrow \varphi(\lambda M+N) = \lambda\varphi(M) + \varphi(N)$$

Donc : φ est linéaire (i)

De plus, $JM \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et MJ appartient à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ car on a un produit de matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Donc : si $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\varphi(M) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (ii)

(une somme de matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donne une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

D'après (i), (ii),

φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

2) a) $\varphi(K_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= -K_2 + K_3.$$

$$\varphi(k_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{-k_1 + k_4}}$$

$$\cancel{\varphi(k_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$\cancel{= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} & 0 \\ & 0 \end{pmatrix}}$$

$$\varphi(k_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{k_1 - k_4}}$$

$$\varphi(k_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{k_2 - k_3}}.$$

b) Dans la matrice, on écrit la base à droite puis on la met dans φ chacun leur tour, en exprimant $\varphi(k_1)$ par rapport à k_1, k_2, k_3, k_4...

En l'occurrence,

$$A = \begin{array}{cccc} \varphi(k_1) & \varphi(k_2) & \varphi(k_3) & \varphi(k_4) \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

c) On remarque que ${}^tA = A$, donc A est symétrique

Comme A est la matrice d'un endomorphisme ~~de~~ φ dans une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on déduit d'après le cours que :

$$\boxed{\varphi \text{ est diagonalisable}}$$

3)a) $\operatorname{Im} A = \operatorname{vect}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{C_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{C_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{C_3}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{C_4}\right)$

$= \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ car $C_2 = -C_3$
$C_1 = -C_4$.

Ces deux vecteurs, C_1 et C_2, ne sont pas colinéaires donc forment une famille libre de Im(A), et donc une base (car c'est une famille génératrice ~~aus~~ de Im(A) aussi).

Donc, comme Card $(C_1, C_2) = 2$,

$\boxed{\dim \operatorname{Im}(A) = \operatorname{Rg}(A) = 2}$. On a donc : $\operatorname{Rg} \varphi = 2$

Une base de ~~Im(f)~~ Im φ est :

$$\big((-k_2 + k_3), (-k_1 + k_4)\big)$$

b) D'après le théorème de rang, comme φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ avec $\dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = 4$, on a :

$$\dim \ker \varphi + \operatorname{rg} \varphi = 4$$

donc $\dim \ker \varphi = 2$ d'après 3)a)

De plus, on remarque que $\varphi(I) = JI - IJ = 0$ (car I et J commutent...)

et $\varphi(J) = J^2 - J^2 = 0$.

Donc $(J, I) \in (\ker \varphi)^2$ (i)

De plus, soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\lambda_1 I + \lambda_2 J = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$ immédiatement

Donc (I, J) est une famille libre de $\ker \varphi$ (ii)

Copie anonyme - n°anonymat : 849505

Code épreuve : 298
Nombre de pages : 38
Session : 2022
Épreuve de : MATHS E EDHEC BS

Enfin, Card $(I, J) = 2 = \dim \ker \varphi$. (iii)

D'après (i), (ii), (iii),

(I, J) forme une base de $\ker \varphi$

4)a) $$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc : $A^3 - 4A = 0$

4)b) $P(X) = X^3 - 4X$ est un polynôme annulateur de A.

Les racines d'un tel polynômes sont 0, 2 et -2.

Donc, d'après le cours,

$Sp(A) \subset \{0, 2, -2\}$

Les valeurs propres possibles de A sont 0, 2 et -2

5) Scilab indique ici le rang des matrices $A - 2I$ et $A + 2I$.

$rg(A + 2I) = rg(A - 2I) = 3$ en l'occurrence

D'après le théorème du rang, on a :

$\dim \ker(A + 2I) = \dim \ker(A - 2I) = 1$.

Or, $\dim \ker(A + 2I) = \dim E_{-2}(A)$

$\dim \ker(A - 2I) = \dim E_2(A)$

On conjecture donc que 2 et -2 sont bien valeurs propres de A, et que leur sous espaces propres associés à respectivement les valeurs 2 et -2 sont tous deux de dimension 1.

6) a) $AX = 2X \Leftrightarrow AX - 2X = 0$

$\Leftrightarrow (A - 2I)(X) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x - y + z = 0 \\ -x - 2y + t = 0 \\ x - 2z - t = 0 \\ y - z - 2t = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x - y + z = 0 \\ 3y + z - 2t = 0 & L_1 - 2L_2 \to L_2 \\ -y - 3z - 2t = 0 & L_1 + 2L_3 \to L_3 \\ y - z - 2t = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x - y + z = 0 \\ 3y + z - 2t = 0 \\ -8z - 8t = 0 & 3L_3 + L_2 \to L_3 \\ -4z - 4t = 0 & 3L_4 - L_2 \to L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x - y + z = 0 \\ 3y + 3z = 0 \\ z = -t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = -z \\ z = -t \end{cases}$$

Donc : $S = \{ z, -z, z, -z \}$

Er : $AX = -2X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ -x + 2y + t = 0 \\ x + 2z - t = 0 \\ y - z + 2t = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ 3y + z + 2t = 0 & 2L_2 + L_1 \to L_2 \\ y + 3z - 2t = 0 & 2L_3 - L_1 \to L_3 \\ y - z + 2t = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ 3y + z + 2t = 0 \\ 4y + 4z = 0 & L_3 + L_2 \to L_3 \\ -2y - 2z = 0 & L_4 - L_2 \to L_4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ -z = t \\ y = -z \end{cases}$$

Donc : $\boxed{S = \{ -z, -z, z, -z \}}$

Copie anonyme - n°anonymat : 849505

Code épreuve : 298 | Nombre de pages : 38 | Session : 2022

Épreuve de : MATHS E EDHEC BS

Emplacement QR Code

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

6)b)

Donc : $Sp(\varphi) = \{0, -2, 2\}$.

et : $E_0(\varphi) = \ker \varphi$

$E_{-2}(\varphi) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$, (cette famille est libre dans $E_{-2}(\varphi)$ car c'est un vecteur non nul. (qui engendre ce sous espace propre...)

Et : $E_2(\varphi) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ (de même, cette famille est libre car ce vecteur est non nul...) (qui engendre ce sous espace propre)

Exercice III

1) f_n est dérivable sur $[0;1]$ comme quotient de telle fonctions dérivable sur $[0;1]$ (avec $x+n \neq$ car $\forall x \in [0;1], \forall n \geq 1, x \neq -n$)

$$\forall x \in [0;1], \; f_n'(x) = \frac{x+n-x}{(x+n)^2}$$

$$= \frac{n}{(x+n)^2} > 0 \quad \forall x \in [0;1].$$

Donc : f_n est strictement croissante sur $[0;1]$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

x	0		1
signe f_n'		$+$	
variation de f_n	0	$\nearrow$	$\frac{1}{n+1}$

2) $\forall x \in [0;1]$, $\frac{x}{n(x+n)} \geq 0$.

Donc, comme $x \mapsto \frac{x}{n(x+n)}$ est continue sur $[0;1]$ et que $1 > 0$, on a :

$$\boxed{\int_0^1 \frac{x}{n(x+n)}\,dx \geq 0} \quad (i)$$

De plus, d'après 1), et comme $n > 0$, on a :

$\forall x \in [0;1]$, $\frac{1}{n(n+1)} \geq \frac{1}{n} f_n(x)$ car $\forall x \in [0;1]$, $f_n(x) \leq f_n(1)$

$\Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{n(n+1)}\,dx \geq \int_0^1 \frac{f_n(x)}{n}\,dx$ car $1 > 0$ et par continuité de ces fonctions sur $[0;1]$.

$\Rightarrow \frac{1}{n(n+1)} \geq u_n$ (ii).

D'après (i), (ii),

$\forall n \geq 1, \forall x \in [0;1],$

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{n(n+1)}$$

3) $\frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}$. (i)

$\forall n \geq 1,\ \frac{1}{n(n+1)} \geq 0$ et $1/n^2 \geq 0$. (ii)

$\sum_{n \geq 1} 1/n^2$ Converge (série de Riemann de paramètre 2). (iii)

D'après (i), (ii), (iii), et le théorème de comparaison des séries,

$\sum_{n \geq 1} 1/n(n+1)$ Converge

Donc, avec l'encadrement de 2), comme $\forall n \geq 1$ on a $u_n \geq 0$;

On obtient directement que :

$\sum_{n \geq 1} u_n$ Converge

4)a) D'après 2),

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{n(n+1)} \qquad (2)$$

$$\Rightarrow 0 \leq \sum_{k=1}^{n} u_k \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

En fait, il suffit de reprendre la réponse de 3) : le fait que la série de terme général u_n converge implique que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, puisque $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la somme des u_k de 1 à n

Donc : $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ~~bien~~ convergente.

b) $\forall n \geq 1, \quad \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{n+1-n}{n(n+1)}$

$$= \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\boxed{\text{Donc : } \forall n \geq 1, \quad \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}}$$

$\cancel{\forall n \geq 1, \quad 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n(n+1)} \leq} 1.$

D'après 3), comme on a la convergence de la série, on a de la question 2) que :

$$0 \leq \sum_{k=1}^{+\infty} u_k \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \sum_{k=1}^{+\infty} u_k \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 849505

Code épreuve : 298	Nombre de pages : 38	Session : 2022

Épreuve de : MATHS E EDHEC BS

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$\Rightarrow 0 \leq \sum_{k=1}^{+\infty} U_k \leq 1$ par télescopage

Donc, comme $Y = \sum_{k=1}^{+\infty} U_k$, On déduit que :

$$\boxed{0 \leq Y \leq 1}$$

c) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_{n+1} - S_n = \sum_{k=1}^{n+1} U_k - \sum_{k=1}^{n} U_k$

$= U_{n+1}$ télescopage !

Or, d'après 2), $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_{n+1} \geq 0$.

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_{n+1} - S_n \geq 0$

$\Rightarrow S_{n+1} \geq S_n$.

$$\boxed{\text{Donc : } (S_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est croissante}}$$

5)a) $\forall x \in [0;1]$, $\dfrac{a}{k} - \dfrac{b}{x+k} = \dfrac{ax + ak - bk}{k(x+k)}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$= \dfrac{ax + k(a-b)}{k \, x(x+k)}$

On a donc $a = 1$, et $a - b = 0 \Leftrightarrow b = 1$. (pour résoudre l'équation...)

Donc : $\forall x \in [0;1]$, $\dfrac{x}{k(x+k)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{x+k}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_k = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{k(x+k)} \, dx$

$\Leftrightarrow \quad U_k = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{k} - \frac{1}{x+k} \, dx$

$\Leftrightarrow \quad U_k = \dfrac{1}{k} [x]_0^1 - [\ln(x+k)]_0^1$

$\Leftrightarrow \quad U_k = \dfrac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln(k)$

b) On somme et :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} U_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) + \sum_{k=1}^{n} \ln(k)$

$= \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \ln(k) + \sum_{k=1}^{n} \ln(k)$

$= \sum_{k=1}^{n} 1/k - \ln(n+1)$ télescopage, et car $\ln(1)=0$.

$$\boxed{\text{Donc: } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k - \ln(n+1)}$$

6)a) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)}$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}$

$= 1+0$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+1/n = 1$ donc par composition, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(1+1/n)}{\ln(n)} = 0$

$= 1,$ (et par quotient..)

On déduit que,

$\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n+1)$

6)a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n - T_n = -\ln(n+1) + \ln(n)$

$= -\ln(n(1+1/n)) + \ln(n)$

$= -\ln(n) - \ln(1+1/n) + \ln(n)$

Car $\forall n \geq 1$, $1+1/n > 0$ et $n > 0$

$= -\ln(1+1/n)$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(1+1/n) = 0$ par composition, donc

$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n - T_n = 0$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \gamma$ donc on déduit immédiatement que :

$\boxed{(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ Converge et a pour limite } \gamma}$

b) $\forall n \geq 1$, $x \mapsto \ln(x)$ est continue et dérivable sur $[n\,;n+1]$

donc d'après l'Inégalité des Accroissements finis, en notant $h(x) = \ln(x)$, on a :

$\forall n \geq 1$,

$$h'(n+1) \leq \frac{h(n+1) - h(n)}{n+1-n} \leq h'(n)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$$

Donc :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \quad T_{n+1} - T_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln(n)$$

$$= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \leq 0 \text{ d'après}$$

l'encadrement ci-dessus.

Donc : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $T_{n+1} - T_n \leq 0$, donc

$(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante

Copie anonyme - n°anonymat : 849505

Code épreuve : 298	Nombre de pages : 38	Session : 2022

Épreuve de : MATHS E EDHEC BS

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

6)c) $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et admet pour limite γ

$(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et admet γ pour limite.

Donc $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont des suites adjacentes.

Donc : $\forall n\in\mathbb{N}^*$,

$$S_n \leq \gamma \leq T_n$$

7)a) On a : $\forall n\geq 1$, $0 \leq \gamma - S_n \leq T_n - S_n$.

Donc : lorsque $T_n - S_n \leq 10^{-3}$, on a :

$$0 \leq \gamma - S_n \leq 10^{-3}.$$

Donc : Si $T_n - S_n \leq 10^{-3}$, S_n approche γ à 10^{-3} près.

(C'est une valeur approchée de γ à 10^{-3} près...)

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

7(b)

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $T_n - S_n = \ln(1 + 1/n)$ d'après 6)a)

On a donc ce script :

```
n = 1
S = 1 - log(2)
while log (1+1/n) > 10^(-3)
  n = n+1
~~S = S - log ( n )~~ S = S + 1/(n+1) - log(n+2) + log(n+1)
end
disp (S)
```

Problème

1)a) $x \mapsto x^p$ et $x \mapsto (1-x)^q$ sont deux fonction continues sur $[0;1]$, car $(p,q) \in \mathbb{N}^2$.

Donc l'intégrande étant continue, par produit, sur $[0;1]$, on déduit que cette intégrale est bien définie.

b) $\forall (p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$,

$$I(p,q) = \int_0^1 x^p (1-x)^q \, dx$$

Posons $u = (1-x)^q$ $\quad v' = x^p$

$u' = -q(1-x)^{q-1}$ $\quad v = \frac{x^{p+1}}{p+1}$

u et v C^1 sur $[0;1]$

D'après l'intégration par partie :

$$\int_0^1 x^p (1-x)^q dx = \left[\frac{(1-x)^q x^{p+1}}{p+1} \right]_0^1 + \int_0^1 q \frac{(1-x)^{q-1} x^{p+1}}{p+1} dx$$

$$= \frac{q}{p+1} \int_0^1 x^{p+1} (1-x)^{q-1}$$

$$= \frac{q}{p+1} I(p+1, q-1)$$

$$\boxed{\text{Donc : } \forall (p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \ I(p,q) = \frac{q}{p+1} I(p+1, q-1)}$$

2) a) $I(p+q, 0) = \int_0^1 x^{p+q} \, dx$

$$= \left[\frac{x^{p+q+1}}{p+q+1} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{p+q+1}.$$

Donc : $\forall (p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, $I(p,q) = \frac{p! \, q!}{(p+q)!} \frac{1}{(p+q+1)}$

d'après l'énoncé

donc :

$$\boxed{\forall (p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N},\quad I(p,q)=\frac{p!\,q!}{(p+q+1)!}}$$

b) en posant $p=q$, on a :

$$\int_0^1 x^p(1-x)^p\,dx = I(p,p)$$

$$= \frac{p!\,p!}{(p+p+1)!} \quad \underline{2)a).}$$

$$= \frac{(p!)^2}{(2p+1)!} \quad \text{d'après } 2)a).$$

Donc :

$$\boxed{\forall p\in\mathbb{N},\ \int_0^1 x^p(1-x)^p\,dx = \frac{(p!)^2}{(2p+1)!}}$$

<u>Partie III</u> $\forall x\in[0;1],\ \forall n\in\mathbb{N},$

$a_n\geq 0,\quad x^n\geq 0$ et $(1-x)^n\geq 0.$

Donc : $\forall x\in[0;1]$ $b_n(x)\geq 0.$ (i)

$\forall x\notin[0;1],\ b_n(x)=0\geq 0.$ (ii) .

Copie anonyme - n°anonymat : 849505

Code épreuve : 298

Nombre de pages : 38

Session : 2022

Épreuve de : MATHS E EDHEC BS

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Donc : $\underbrace{\forall x \in \mathbb{R},\ b_n(x) \geq 0}_{\alpha}$ d'après ①. ii

$\forall n \in \mathbb{N}$,

$\int_{-\infty}^{0} b_n(x)\,dx$ et $\int_{1}^{+\infty} b_n(x)\,dx$ convergent et valent 0 iii

$$\int_0^1 b_n(x)\,dx = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \int_0^1 x^n (1-x)^n\,dx$$

$$= \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \times I(n,n)$$

$$= \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \times \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} \quad \text{d'après 2)}$$

$\int_0^1 b_n(x)\,dx = 1$ iv

Donc : $\int_{-\infty}^{+\infty} b_n(x)$ converge et vaut $\int_{-\infty}^{0} b_n(x)\,dx + \int_0^1 b_n(x)\,dx + \int_1^{+\infty} b_n(x)\,dx$,

et donc $\int_{-\infty}^{+\infty} b_n(x)\,dx$ converge et vaut 1 d'après iii et iv.

β

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Enfin, $x \mapsto b_n(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et en 1. (C) (d'après la question 1..)

D'après (α), (β), (C),

b_n est une densité

4) $b_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0;1] \\ 0 & \text{si } x \notin [0;1] \end{cases}$.

On reconnaît la densité d'une loi uniforme continue sur $[0;1]$.

$\boxed{\text{Donc } X_0 \sim \mathcal{U}([0;1])}$

5) a) $\forall n \geq 1$, $E(X_n)$ existe si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} x b_n(x)\, dx$ converge. (absolument)

$\int_{-\infty}^{0} x b_n(x)\, dx$ et $\int_{1}^{+\infty} x b_n(x)\, dx$ convergent et valent 0.

$\forall x \in [0;1[$,

$$\int_0^1 x b_n(x)\, dx = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \int_0^1 x^{n+1}(1-x)^n\, dx$$

$$= \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} I(n+1, n)$$

$$= \frac{(n+1)!\, n!}{(2n+2)!} \times \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \quad \text{d'après } 2)$$

$$= \frac{n+1}{2n+2}$$

$$= \frac{n+1}{2(n+1)}$$

$$= 1/2.$$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} x b_n(x)dx$ Converge et vaut

$$\int_{-\infty}^{0} b_n(x)\, x\, dx + \int_0^1 x b_n(x)\, dx + \int_1^{+\infty} x b_n(x)\, dx$$

$$= 1/2.$$

Donc :

$\forall n \geq 0$,

$E(X_n)$ existe et $\boxed{E(X_n) = 1/2}$

b) $E(X_n^2)$ existe si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 b_n(x)\, dx$ converge.

$\int_{-\infty}^{0} x^2 b_n(x)\, dx$ et $\int_1^{+\infty} x^2 b_n(x)\, dx$ convergent et valent 0.

$$\int_0^1 x^2 b_n(x)\, dx = \int_0^1 \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} x^{n+2}(1-x)^n\, dx$$

$$= \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} I(n+2, n)$$

$= \dfrac{(2n+1)!}{(n!)^2} \quad \dfrac{(n+2)!\, n!}{(2n+3)!}$ d'après 2)

$= \dfrac{(n+1)(n+2)}{(2n+2)(2n+3)}$

$= \dfrac{1}{2} \quad \dfrac{(n+2)}{2n+3}.$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, b_n(x)\, dx$ Converge et vaut $\dfrac{n+2}{2(2n+3)}$

Donc
$\forall n \in \mathbb{N}$, $V(X_n)$ existe et vaut, d'après la formule de Koenig,

$V(X_n) = E(X_n^2) - (E(X_n))^2$

$$\boxed{V(X_n) = \frac{n+2}{2(2n+3)} - \frac{1}{4}.}$$ d'après a)

c) Comme $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une variance, On a d'après l'inégalité de Bienaymé - Tchebychev,
$\forall \varepsilon > 0$,
$P(|X_n - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{V(X_n)}{\varepsilon^2}.$

Or, $\dfrac{n+2}{2(2n+3)} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{n}{2 \times 2n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{4}.$

Copie anonyme - n°anonymat : 849505

Code épreuve : 298 | Nombre de pages : 38 | Session : 2022

Épreuve de : MATHS E EDHEC BS

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+2}{2(2n+3)} = \frac{1}{4}$, donc

$\lim\limits_{n\to+\infty} V(X_n) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0.$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{V(X_n)}{\varepsilon^2} = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$ (i)

Comme $E(X_n) = 1/2$, et qu'une probabilité est toujours positive, on déduit de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev que

$\forall \varepsilon > 0,$

$$0 \leq P(|X_n - 1/2| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X_n)}{\varepsilon^2} \quad \text{(ii)}$$

D'après le théorème des gendarmes, et (i), (ii), on obtient que : $\forall \varepsilon > 0,$

$$\lim_{n\to+\infty} P(|X_n - 1/2| \geq \varepsilon) = 0$$

Partie III

6) $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f_0(x) = \int_0^x dt$$

$$= [\,t\,]_0^x$$

$$= x.$$

$\forall x \in \mathbb{R},\ f_0(x) = x$

7)a) $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(1) = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \int_0^1 t^n (1-t)^n dt$$

$$= \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$$

Car $\forall n \in \mathbb{N}$, $I(n,n)$ vaut $\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$

$$= 1.$$

$\forall n \in \mathbb{N},\ f_n(1) = 1$

7) b) En posant $u = 1-t$, changement C^1 sur $[0;x]$ $\forall x \in \mathbb{R}$, on a :
(avec, si $\varphi(t) = 1-t$, $\varphi'(t) = -1$)

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = -\alpha_n \int_1^{1-x} (1-t)^n t^n \, dt$$

$$= \alpha_n \int_{1-x}^{1} t^n (1-t)^n \, dt$$ (en changeant l'ordre des bornes..)

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f_n(1-x) + f_n(x) = \alpha_n \left(\int_{1-x}^{1} t^n (1-t)^n dt + \int_0^{1-x} t^n (1-t)^n dt \right)$$

$$= \alpha_n \left(\int_0^1 t^n (1-t)^n dt \right)$$

d'après la relation de Chasles

$$= \int_0^1 \alpha_n t^n (1-t)^n dt$$

$$= \int_0^1 b_n(t) dt$$

$= 1$ d'après 3).

$$\boxed{\text{Donc : } \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) + f_n(1-x) = 1}$$

c) $\cancel{f_n(1/2)}$

En posant $x = 1/2$, on a d'après 7) b),

$$f_n(1/2) + f_n(1/2) = 1.$$

donc $2 f_n(1/2) = 1$

donc $f_n(1/2) = \frac{1}{2}$.

Donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ f_n(1/2) = \frac{1}{2}}$

8) a)

~~$\forall x \in \mathbb{R}$,~~

Comme $t \to t^n(1-t)^n$ est continue sur $[0;x]$ $\forall x \in \mathbb{R}$, on déduit que f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f_n'(x) = \alpha_n \left(F(x) - F(0) \right)' \qquad \text{avec } F \text{ une primitive de l'intégrande}$$

$$= \alpha_n \left(F'(x) \right)$$

$$f_n'(x) = \alpha_n x^n (1-x)^n$$

~~b) $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f_n'(x) \geq 0$ par produit de termes positifs.~~

~~Si $x \in \mathbb{R}^-$~~

~~- Si n est pair, alors $\forall x \in \mathbb{R}^-$, $f_n'(x) \geq 0$ (car même~~

b) Si n est pair, alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $\alpha_n x^n (1-x)^n \geq 0$ car même si $x < 0$ ou $1-x < 0$, la puissance paire en fait un nombre positif. Donc si n pair, alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n'(x) \geq 0$

Par contre, si n est impair, alors la puissance de n ne change pas le signe de x et de $1-x$.

Copie anonyme - n°anonymat : 849505

Code épreuve : 298	Nombre de pages : 38	Session : 2022

Épreuve de : MATHS E EDHEC BS

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Donc : Si n est impair, f_n prend le signe de $x(1-x)$:

Donc : Si n est impair,

$\forall x \in]-\infty ; 0] \cup [1;+\infty[, f_n(x) \leq 0$

$\forall x \in [0;1], f_n(x) \geq 0$

Bilan :

Si n pair, $\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) \geq 0$

Sinon, $\forall x \in [0;1], f_n(x) \geq 0$, et $\forall x \in \mathbb{R}^- \cup [1;+\infty[, f_n(x) \leq 0$

~~9)a) $\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \alpha_n \int_0^x t^n (1-t)^n \, dt$~~

~~$= \alpha_n \int_0^x$~~

~~9)b) D'après 8), $f_n(x) = \alpha_n x^n (1-x)^n \; \forall x \in \mathbb{R}$.~~

~~$= \alpha_n (x(1-x))^n$~~

~~$= \alpha_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x-x^2+1)^k$~~

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

9)a) En utilisant la dérivée de f_n, on a :
$\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n'(x) = \alpha_n \; x^n (1-x)^n$

$= \alpha_n \left(x(1-x)\right)^n$

$= \alpha_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x - x^2 - 1)^k \, 1^{n-k}$ d'après le binôme de Newton

$= \alpha_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x - x^2 - 1)^k$

En développant chaque terme, on obtiendrait une fonction polynomiale.

Donc : f_n' est une fonction polynomiale. Or, une primitive d'une fonction polynomiale est aussi une fonction polynomiale.

Donc : $\boxed{f_n \text{ est une fonction polynomiale}}$

~~b)~~ Comme la limite en $+\infty$ ou $-\infty$ d'une fonction polynomiale dépend du signe du terme du plus haut degré, on a :

$\boxed{\text{Si } n \text{ pair, } \lim_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \to -\infty} f_n(x) = -\infty}$

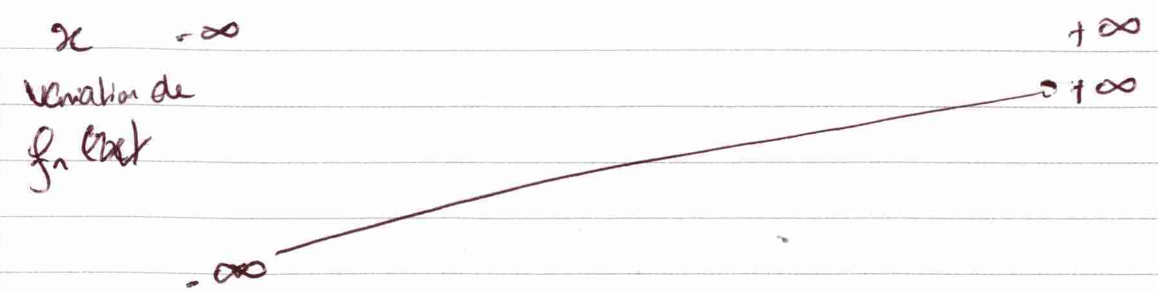
$\boxed{\text{Si } n \text{ impair, } \lim_{x \to +\infty} f_n(x) = \cancel{+\infty} \text{ et } \lim_{x \to -\infty} f_n(x) = +\infty}$

$\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = -\infty.$

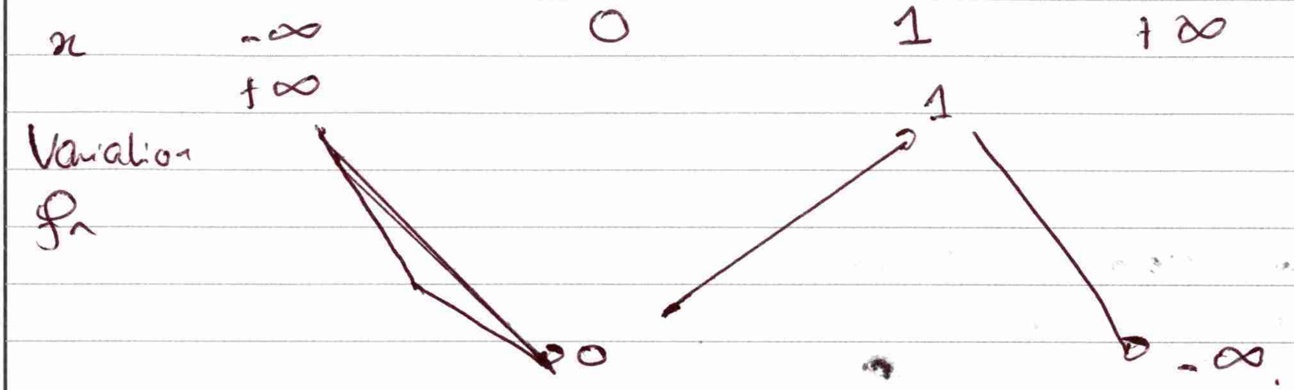
(car si n tend vers $-\infty$, il faut renverser l'ordre des bornes donc un moins apparaît...)

30/40

9)b) On a le tableau suivant : <u>Si n pair</u>



<u>Si n impair</u>



10) a)

f_n est derivable deux fois sur IR car f_n' est derivable sur IR et.
$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f_n''(x) = \alpha_n \left(n (1-2x)(x-x^2)^{n-1} \right.$$

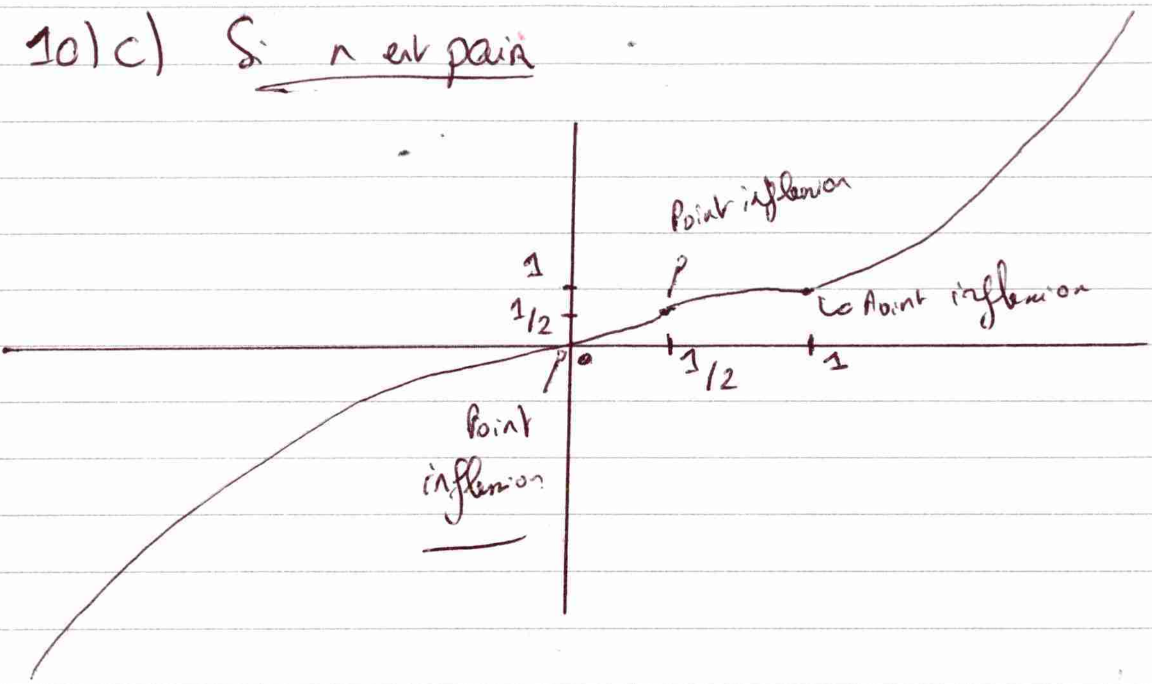
b) Si n est pair, alors n-1 est impair. Alors, le signe de f_n'' dépend du signe de $(1-2x)(x-x^2)$, qui change trois fois de signe : en 0, en 1 et en 1/2.

Donc : Si n est pair, (C_n) possède trois points d'inflexion.

Si n est impair, alors n-1 est pair. alors le signe de f_n'' ne dépend que du signe de $1-2x$, puisque $\forall x \in \mathbb{R}$, $(x-x^2)^{n-1} \geq 0$.

Donc : Si n est impair, (C_n) possède un point d'inflexion, le point où $1-\cancel{2x}$ change de signe (en 1/2).

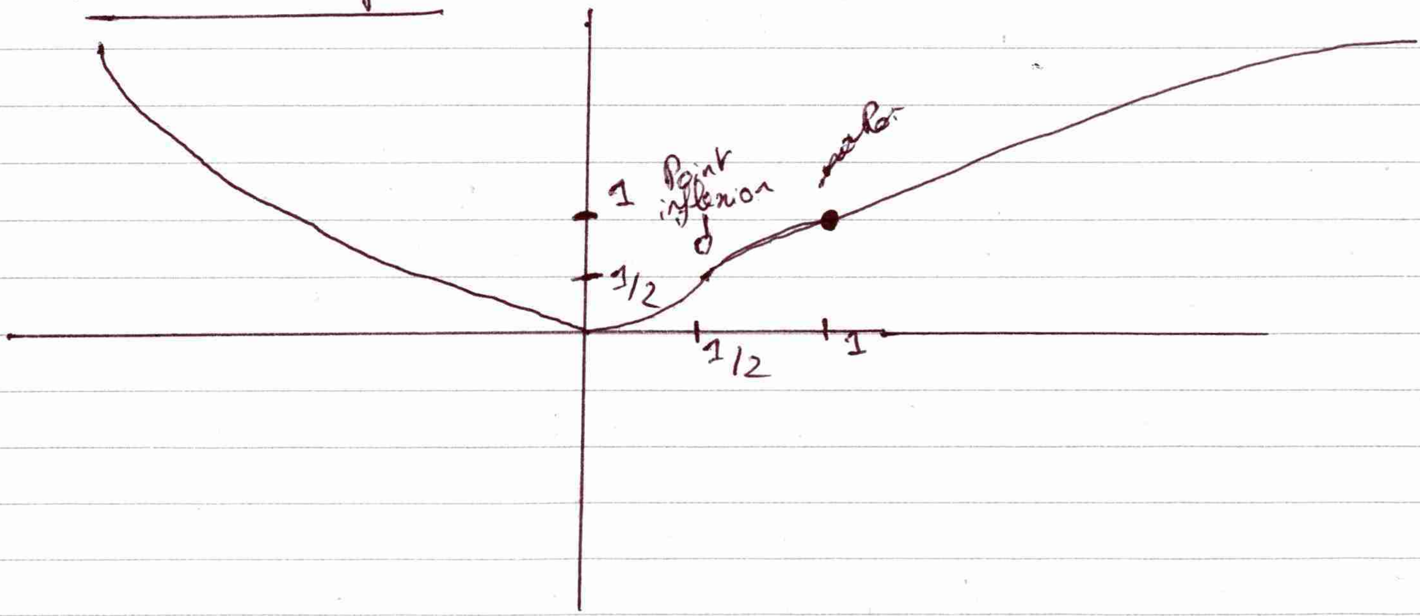
10) c) Si n est pair



Avec, pour n s'aide, le tableau de signe de f_n''

x	$-\infty$		0		$1/2$		1		$+\infty$
$1-2x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$1-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
x		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
f_n''		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Si n est impair.



Avec $f_n''(x) \geq 0 \iff x \leq 1/2$.

Copie anonyme - n°anonymat : 849505

Code épreuve : 298 | Nombre de pages : 38 | Session : 2022

Épreuve de : MATHS E EDHEC BS

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

Exercice II

1)
```
X = 0
while X < n & rand () <= p
    X = x + 1
```

2)a) Le joueur qui perd dès le premier niveau fait prendre à X_n la valeur 0.

Ensuite, le joueur peut gagner entre 1 et n fois (dans ce cas là, X_n prend une valeur entre 1 et n.

Alors si le joueur gagne n fois, le jeu s'arrête et X_n prend la valeur n.

$\boxed{\text{Donc : } X_n(\Omega) = [\![0;n]\!]}$

2)c) $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(X_n = n) = P\left(\bigcap_{k=1}^{n} R_k\right)$

$= \prod_{k=1}^{n} P(R_k)$ par indépendance

$= \prod_{k=1}^{n} p$

$= p^n.$

(question b) au dos de cette feuille.)

$\boxed{\text{Donc : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X_n = n) = p^n}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

d)

~~$\forall k \in$~~

2) b) (J'ai oublié de faire cette question sur la page précédente.)

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; P(X_n=0) = P(\overline{R_1})$

$= 1-p$

$\boxed{\text{Donc : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \; P(X_n=0) = 1-p}$

2) d) $\forall k \in [\![1 ; n-1]\!]$,

$\cancel{P(X_n} \; (X_n = k) = \bigcap_{j=1}^{k} R_j \cap \overline{R_{k+1}}$

(le joueur réussit k niveaux et échoue au (k+1)ème niveau.

Donc : $\forall k \in [\![1 ; n-1]\!], \; P(X_n=k) = P\left(\bigcap_{j=1}^{k} R_j \cap \overline{R_{k+1}}\right)$

$= \prod_{j=1}^{k} (P(R_j)) \times P(\overline{R_{k+1}})$ par indépendance

$= p^k (1-p)$

Car $\forall j \in [\![1 ; k]\!], \; P(R_j) = p$ et $P(\overline{R_{k+1}}) = 1-p$.

$\boxed{\text{Donc : } \forall k \in [\![1 ; n-1]\!], \; P(X_n=k) = p^k (1-p)}$

On remarque que $p^0(1-p) = 1-p = P(X_n=0)$, donc

l'expression reste vraie pour $k=0$

~~3) $\forall k \in [\![0;n]\!]$, $\sum_{k=0}^{n} P(X_n=k) = \sum_{k=0}^{n} p^k (1-p)$~~

~~$= (1-p)\left(\frac{1-p^{n+1}}{1-p}\right.$~~

3) $\forall k \in [\![0;n]\!]$, $\sum_{k=0}^{n} P(X_n=k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X_n=k) + P(X_n=n)$

(d'après l'équation 2)) $= \sum_{k=0}^{n-1} p^k (1-p) + p^n$

~~$= p^k$~~

$= (1-p) \dfrac{1-p^n}{1-p} + p^n$

$= 1-p^n + p^n$

$= 1.$

Don $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n} P(X_n=k) = 1}$

4) a) $X_n(\Omega) = [\![0;n]\!]$, donc le support de X_n est fini donc

$E(X_n)$ existe

Et : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $E(X_n) = \sum_{k=0}^{n} k P(X_n=k)$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} k P(X_n = k) + nP(X_n = n)$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} k p^k (1-p) + np^n$$ (car le terme en k=0 vaut 0 ici)

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, ~~$P(X_n =$~~ $E(X_n) = \sum_{k=1}^{n-1} k p^k (1-p) + np^n$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*, E(X_n) = (1-p)\, p \sum_{k=1}^{n-1} k p^{k-1} + np^n$

On reconnaît une série géométrique dérivée 1ère de paramètre $p \in]-1;1[$, donc cette série converge et :

$$\lim_{n\to+\infty} E(X_n) = (1-p)p \sum_{k=1}^{+\infty} k p^{k-1} + np^n$$

$$= p(1-p) \frac{1}{(1-p)^2} + \lim_{n\to+\infty} np^n$$

$$= \frac{p}{1-p}$$ par croissance comparée.

$$\boxed{\text{Donc : } \lim_{n\to+\infty} E(X_n) = \frac{p}{1-p}}$$

5) a) L'énoncé indique que $0 \leq k$ et que $n \geq k+1$, donc $k \leq n-1$. On retrouve le cadre de la question 2) d), donc :

$\forall k \in \mathbb{N}$ avec $n \geq k+1$, $P(X_n = k) = p^k(1-p)$ d'après 2) d).

$$\boxed{P(X_n = k) = p^k q}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 849505

Code épreuve : 298	Nombre de pages : 38	Session : 2022

Épreuve de : MATHS E EDHEC BS

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

~~Donc $\forall$~~

5)b) On remarque que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est discrète et que l'expression de $P(X_n = k)$ ne dépend pas de n, et que $\forall k \in \mathbb{N}$ il existe un rang de n tel que $n \geq k+1$.

Donc : $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ avec :

$\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X=k) = \lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = k)$

$P(X=k) = p^k q$ (avec $X(\Omega) = \mathbb{N}$)

5)c) $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$, et

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(Y=k) = P(X+1=k)$
$= P(X = k-1)$
$= p^{k-1} q$

~~Donc $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$~~

Donc : $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(q)$

Donc $E(X) = E(Y) - 1$ linéarité

$$= \frac{1}{q} - 1$$

$$= \frac{1-q}{q}$$

$$= \frac{p}{1-p}.$$

$$E(X) = \frac{p}{1-p}$$

On remarque que : $\lim\limits_{n \to +\infty} E(X_n) = E(X)$

IMPRIMERIE NATIONALE – 2020-12-PF 018 751