Code épreuve : 296 | Nombre de pages : 28 | Session : 2022

Épreuve de : Maths EML

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 1

Partie A

1. • $Y(\Omega) = (X+1)(\Omega) = \mathbb{N}^*$ car $X(\Omega) = \mathbb{N}$.

• $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(Y=k) = P(X+1=k)$

$= P(X=k-1)$

$= q^{k-1}p$

d'où on reconnaît que :

$$\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p)}$$

2. On a donc :

$E(Y) = \dfrac{1}{p}$ et $V(Y) = \dfrac{1-p}{p^2}$

d'où : $E(X)$ et $V(X)$ existent avec :

• $E(X) = E(Y-1)$ d'où par linéarité de l'espérance :

$= E(Y) - 1$

$= \dfrac{1}{p} - 1 = \dfrac{1-p}{p}$ d'où $\boxed{E(X) = \dfrac{1-p}{p}}$

• $V(X) = V(Y-1) = V(Y)$ par propriété de la variance

d'où $\boxed{V(X) = \frac{1-p}{p^2}}$

3

```
function X = simule_X(p)
    Y = ~~grand(1,1,'geo',p)~~
    while Y <
        Y = Y+1
    end
    X = Y-1
endfunction
```

Partie B

5 a • $u_0 = P(Z_0 = 0) = 0$ car $Z_0 = 1$.

• $u_1 = P(Z_1 = 0)$

$= P(X = 0)$ car Z_1 suit la même loi que X.

$= (1-p)^0 p$

$= p$.

d'où $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = p \end{cases}$

5 b $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $[Z_n = 0]$ signifie : après n activations de la machine, le joueur n'a plus de jetons et donc après $n+1$ non plus. OR :
$\forall n \in \mathbb{N}$, on a $[Z_{n+1} = 0]$ signifie : après $n+1$ activations de la machine, le joueur n'a plus de jetons.

d'où :

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad [Z_n = 0] \subset [Z_{n+1} = 0]$

Ainsi par croissance de la probabilité :

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(Z_n = 0) \leq P(Z_{n+1} = 0) \leq 1$

d'où $\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(Z_{n+1} = 0) - P(Z_n = 0) \geq 0$

d'où $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n \geq 0}$

d'où u est croissante et comme par définition des probabilités :

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq P(Z_n = 0) \leq 1$

ie. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n \leq 1$

d'où u est majorée par 1.

d'où par le théorème de la limite monotone, u converge.

⑥ $[Z_n = 0]$: le joueur n'a plus de jeton après n activations

R : le joueur finit par ne plus avoir de jeton

et $\lim\limits_{n \to +\infty} [Z_n = 0]$: après une infinité d'activations, le joueur n'a plus de jeton.

d'où on a bien : $P(R) = \lim\limits_{n \to +\infty} P(Z_n = 0) = \ell$

⑦ ⓐ $P_{[Z_1 = k]}(Z_2 = 0)$ est la probabilité que le joueur n'ait plus de jetons après la 2e activation, sachant qu'il a introduit k jetons.

Pour cela, il faudrait que, pour chaque jeton introduit, la machine ne donne aucun jeton et donc que pour chaque jeton, $[X = 0]$ d'où :

$$\forall k, \quad P_{[Z_1 = k]}(Z_2 = 0) = \left(P(X = 0)\right)^k$$
$$= \left(P(Z_1 = 0)\right)^k$$
$$= (u_1)^k$$

⑦ ⓑ Avec le système complet d'événements $([Z_1 = k])_{k \geq 0}$, on applique la formule des probabilités totales :

$\forall n \in \mathbb{N}$,
$$u_{n+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} P([Z_1 = k] \cap [Z_{n+1} = 0])$$
$$= \sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_1 = k) \times P_{[Z_1 = k]}([Z_{n+1} = 0])$$

d'où d'après q. ⑦ⓐ :

$\forall n \in \mathbb{N}$,
$$u_{n+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_1 = k) \, u_n^{\,k}$$

et comme Z_1 suit la même loi que X :

Code épreuve : 296	Nombre de pages : 28	Session : 2022

Épreuve de : Maths EML

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} q^k p \times u_n^k$$
$$= p \sum_{k=0}^{+\infty} (q u_n)^k$$

comme $|q| < 1$ et $|u_n| < 1$, on a bien $|q u_n| < 1$ d'où en reconnaissant une série géométrique de paramètre $q u_n$:

$$= p \times \frac{1}{1 - q . u_n}$$

d'où $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{p}{1 - q u_n}}$

8) a) Par unicité de la limite, on a :

$$\ell = \frac{p}{1 - q\ell} \quad \text{d'où} \quad \ell(1 - q\ell) = p$$

d'où $\ell - q\ell^2 - p = 0$

et comme $(\ell - 1)(q\ell - p) = q\ell^2 - \ell p - q\ell + p$
$= q\ell^2 - \ell + p$

d'où on a bien ℓ vérifie $(\ell - 1)(q\ell - p) = 0$.

8 b Soit $p \geq \frac{1}{2}$.

$$q\ell - p = (1-p)\ell - p$$
$$= \ell - \ell p - p$$
$$= -p(\ell+1) + \ell$$

et $q\ell - p = 0 \iff -p(\ell+1) + \ell = 0$

$$\iff p(\ell+1) = \ell$$
$$\iff p = \frac{\ell}{\ell+1} \quad (*)$$

or $p \geq \frac{1}{2}$ d'où $\frac{\ell}{\ell+1} \geq \frac{1}{2}$

d'où $2\ell \geq \ell + 1$
d'où $\ell - 1 \geq 0$
d'où $\underline{\ell \geq 1}$

or ℓ est la limite d'une probabilité d'où
on a nécessairement $0 \leq \ell \leq 1$
d'où on a donc $\underline{\ell = 1}$

d'où $\boxed{\text{si } p \geq \frac{1}{2}, \quad P(R) = 1}$

8 c en reprenant $(*)$:

$q\ell - p = 0 \iff p = \frac{\ell}{\ell+1}$

or $p < \frac{1}{2}$ d'où $\frac{\ell}{\ell+1} < \frac{1}{2}$

$$\iff \ell + 1 > 2\ell$$
$$\iff \ell < 1.$$

d'où $\boxed{P(R) = \ell < 1}$.

⑧ ⓓ Le casino préfèrera choisir $p \in [\frac{1}{2}, 1]$ car alors, on est quasi-certain que le joueur finit par ne plus avoir de jeton ($P(R) = 1$) ce qui rend la machine la plus rentable possible.

Partie C

⑨ $\forall n \in \mathbb{N}$, $[Z_n = 0]$: après n activations, le joueur n'a plus de jeton.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $(T \leq n)$: le joueur n'a plus de jeton pour la première fois après au maximum n activations.

Ces deux propositions sont équivalentes puisque même si $T \neq n$, si après k activations ($k \in [\![0, n]\!]$), le joueur n'a plus de jeton, il n'aura plus non plus après n activations puisqu'il n'insère aucun jeton dans la machine.

d'où $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n = P(T \leq n)}$

De plus : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$P(T = n) = P(T > n-1) - P(T > n)$$
$$= \left(1 - P(T \leq n-1)\right) - \left(1 - P(T \leq n)\right)$$
$$= (1 - u_{n-1}) - (1 - u_n)$$

d'où :

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, P(T = n) = v_{n-1} - v_n}$

(10) On a :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{n=1}^{N} n \cdot P(T=n)$$

$$= \sum_{n=1}^{N} n \cdot (v_{n-1} - v_n)$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \left[(n-1) v_{n-1} - n v_n + v_{n-1} \right]$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \left((n-1) v_{n-1} - n v_n \right) + \sum_{n=1}^{N} v_{n-1}$$

en reconnaissant dans la première somme une somme télescopique :

$$= -N v_N + \sum_{\substack{n=0 \\ (n'=n-1)}}^{N-1} v_n$$

d'où $\boxed{\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{n=1}^{N} n \cdot P(T=n) = \sum_{n=0}^{N-1} v_n - N v_N}$

(11) $p = \frac{1}{2}$.

(11) (a) Avec q. (7) (b) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{p}{1-q u_n} = \frac{1/2}{1-(1/2)u_n} = \frac{1}{2-u_n}$$

d'où $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} =$

Code épreuve : 296 | Nombre de pages : 28 | Session : 2022

Épreuve de : Maths EML

Emplacement QR Code

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

(11) (b) comme $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$,

$E(T)$ existe $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} n.\,P(T=n)$ converge absolument

$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ et $(N v_N)_N$ convergent.

Or :

$$\sum_{n=0}^{N-1} v_n = \sum_{n=0}^{N-1} \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n+1}$$

avec $N \to +\infty$, on reconnait la série harmonique qui diverge selon Riemann ($\alpha = 1 < 2$)

D'où $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ diverge d'où $E(T)$ n'existe pas.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

/

Code épreuve : 296	Nombre de pages : 28	Session : 2022

Épreuve de : Maths EML

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

Exercice 2

1 a • Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $M, N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$$tr(\lambda M+N) = \sum_{i=1}^{2} (\lambda m + n)_{i,i}$$

$$= \sum_{i=1}^{2} (\lambda m_{i,i} + n_{i,i})$$

$$= \lambda \cdot m_{1,1} + n_{1,1} + \lambda m_{2,2} + n_{2,2}$$

$$= \lambda (m_{1,1} + m_{2,2}) + n_{1,1} + n_{2,2}$$

$$= \lambda \; tr(M) + tr(N)$$

d'où tr est linéaire

1 b Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$M \in Ker(tr) \iff \exists M \neq 0, tr(M) = 0$

$\iff \exists M \neq 0, a + d = 0$

$\iff \exists M \neq 0, a = -d$

$\iff M = \begin{pmatrix} -d & b \\ c & d \end{pmatrix}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$\Leftrightarrow \quad M = a.\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

d'où $\ker(tr) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$

Et comme, avec $a, b, c \in \mathbb{R}$:

$a\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -a & b \\ c & a \end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow -a = a = b = c = 0$

$\Leftrightarrow a = b = c = 0$.

d'où c'est une famille libre.

D'où $\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\ker(tr)$.

Ainsi, $\boxed{\dim(\ker(tr)) = 3}$.

② Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $M, N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$f(\lambda M + N) = \lambda M + N + tr(\lambda M + N) J$

par linéarité de tr :

$= \lambda M + N + (\lambda\, tr(M) + tr(N)) J$

11 /

$$= \lambda M + N + \lambda \, tr(M) \times J + tr(N) \times J$$

$$= \lambda (M + tr(M) J) + (N + tr(N) J)$$

$$= \lambda f(M) + f(N)$$

d'où $\boxed{f \text{ est linéaire}}$.

• de plus, $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $J \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $tr(M) \in \mathbb{R}$.

d'où par somme, on a bien $M + tr(M) J \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

i.e. $\boxed{f(M) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$.

d'où $\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$.

③

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

③ ⓐ Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ avec $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$\forall M, f(M) = M + tr(M) J$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (a+d) \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2a+2d \\ a+d & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & 2a+b+2d \\ a+c+d & d \end{pmatrix}$$

$$= a . \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c . \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d . \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où, en notant :

$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

et $E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$:

$$\cancel{f(M) = a.E_{1,1} + (2a+b+2d).E_{1,2} + (a+c+d)E_{2,1} + d.E_{2,2}}$$

~~d'où :~~

$$\cancel{mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{cc} f(E_{1,1})\ f(E_{1,2}) & \\ \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ & \\ & \\ & \end{pmatrix} & \begin{array}{c} E_{1,1} \\ E_{1,2} \\ E_{2,1} \\ E_{2,2} \end{array} \end{array}}$$

d'où :

$$mat_{\mathcal{B}}(f) = A = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} f(E_{1,1}) & f(E_{1,2}) & f(E_{2,1}) & f(E_{2,2}) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} E_{1,1} \\ E_{1,2} \\ E_{2,1} \\ E_{2,2} \end{array} \end{array}$$

avec $f(E_{1,1})$ pour $a = 1$ et $b = c = d = 0$
$f(E_{1,2})$ pour $b = 1$ et $a = c = d = 0$
$f(E_{2,1})$ pour $c = 1$ et $a = b = d = 0$
$f(E_{2,2})$ pour $d = 1$ et $a = b = c = 0$.

3 b $(A - I_4)^2$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

d'où $\boxed{(A - I_4)^2 = 0.}$

3 c On a $P(X) = (X-1)^2$ est un polynôme annulateur de A d'où, avec

$$P(X) = 0 \Leftrightarrow (X-1)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow X = 1,$$

$Sp(A) \subset \{1\}$.

$\underline{\lambda = 1}$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

1 est la seule valeur propre possible de A.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$.

$AX = X$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 2x + 2t = 0 \\ x + t = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = -t$

$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} -t \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$

i.e : $\mathrm{Ker}(A - I_4) = \mathrm{Vect}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{V_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{V_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{V_3} \right)$

Comme V_1, V_2 et V_3 sont combinaisons linéaires de différents vecteurs de la base canonique de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, on a bien (V_1, V_2, V_3) libre.

d'où c'est une base de $\mathrm{Ker}(A - I_4)$.

d'où $\dim(\mathrm{Ker}(A - I_4)) = 3$

or A est de taille $4 \neq 3$.

D'où A n'est pas diagonalisable.

15/

③ ⓐ A est inversible

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ est inversible}$$

$$\begin{array}{c} \Leftrightarrow \\ L_1 \leftrightarrow L_4 \\ L_2 \leftrightarrow L_3 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in GL_4(\mathbb{R})$$

$$\begin{array}{c} \Leftrightarrow \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \end{array} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{B} \in GL_4(\mathbb{R})$$

Comme B a ses coefficients diagonaux tous non nuls, on a A inversible.

De plus ; on a : $(A - I_4)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow A^2 - 2A + I_4 = 0$$

$$\Leftrightarrow I_4 = 2A - A^2$$

$$\Leftrightarrow I_4 = A(2I_4 - A)$$

d'où $\boxed{A^{-1} \text{ existe et } A^{-1} = 2I_4 - A}$

④ $J \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $J \neq 0$.

④ ⓐ $1 \in Sp(f)$

$\Leftrightarrow f(M) = M$

$\Leftrightarrow f(M) - M = 0$

$\Leftrightarrow M + tr(M)\, J - M = 0$

$\Leftrightarrow tr(M)\, J = 0$

$\Leftrightarrow tr(M) = 0$ car $J \neq 0$

$\Leftrightarrow a + d = 0$

$\Leftrightarrow a = -d$

d'où $\ker(f - id) = \ker(tr)$ d'où q. ① ⓑ $\boxed{\dim(\ker(f-id)) = \dim(\ker(tr)) = 3}$.

~~d'où d'après q. ①ⓑ~~

$\cancel{\ker(f - id) = Vect\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)}$

~~et donc dim~~

④ ⓑ $J \in \ker(f - \lambda id)$

$\Leftrightarrow f(J) = \lambda J$

$\Leftrightarrow J + tr(J)\, J - \lambda J = 0$

$\Leftrightarrow (1 + tr(J) - \lambda)\, J = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{\lambda = 1 + tr(J)}$ car $J \neq 0$

Code épreuve : 296	Nombre de pages : 28	Session : 2022

Épreuve de : Maths EML

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

d'où par équivalence, J est un vecteur propre de f associé à la valeur propre $1 + tr(J)$.

4 c i $\underline{tr(J) \neq 0}$

Par propriété, on a :

$$\dim E_\lambda(f) \leq \underset{=4}{\dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$$

or : cf. q. 4 a, $\dim E_1(f) = \dim(\ker(f - id)) = 3$.

d'où on a nécessairement

$$\dim E_{1+tr(J)}(f) = 0 \text{ ou } 1.$$

$M \in E_{1+tr(J)}(f)$

$\Leftrightarrow$ $\exists M \neq 0$, $f(M) = (1 + tr(J))M$

$\Leftrightarrow$ $\exists M \neq 0$, $M + tr(M)J - M - tr(J)M = 0$

$\Leftrightarrow$ $\exists M \neq 0$, $tr(M)J = tr(J)M$

$\Leftrightarrow$ $M = J$ car $J \neq 0$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Ainsi, J est une base de $E_{1+tr(J)}(f)$

d'où $\dim E_{1+tr(J)}(f) = 1$.

d'où $\dim E_1(f) + \dim E_{1+tr(J)}(f) = 4$

d'où $\boxed{f \text{ est diagonalisable}}$

Avec : • $Sp(f) = \{1, 1+tr(J)\}$

et • $\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ une base de $E_1(f)$

et J une base de $E_{1+tr(J)}(f)$.

4 c ii $tr(J) = 0$. $\lambda \neq 1$.

On suppose $\lambda \in Sp(f)$ avec $E_\lambda(f) = Vect(M)$.

d'où $f(M) = \lambda M$

$\Leftrightarrow M + tr(M) J = \lambda M$

$\Leftrightarrow M(1-\lambda) + tr(M).J = 0$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}(1-\lambda) + (a+d)\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (1-\lambda)a + (a+d)e = 0 \\ (1-\lambda)b + (a+d)f = 0 \\ (1-\lambda)c + (a+d)g = 0 \\ (1-\lambda)d + (a+d)h = 0 \end{cases}$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_4}{\Leftrightarrow} \begin{cases} (1-\lambda)(a-d) + (a+d)(e-h) = 0 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{cases}$$

or $tr(J) = 0$ d'où $e - h = 0$ d'où :

$$(1-\lambda)(a-d) = 0$$

et comme $1 \neq \lambda$: $a - d = 0$ d'où $tr(M) = 0$

or cela signifie : $f(M) = \lambda M$

$\Leftrightarrow M + tr(M).J = \lambda M$

et comme $tr(M)=0$: $\Leftrightarrow M = \lambda M$

$\Leftrightarrow \lambda = 1$ ou $M = 0$.

or $\lambda \neq 1$ et $M \neq 0$ car c'est une base d'un sous-espace propre.

Il y a contradiction.

4 c iii f diagonalisable

$\Leftrightarrow \sum_{\lambda \in Sp(f)} \dim E_\lambda(f) = 4$

$\Leftrightarrow \dim E_{1+tr(J)}(f) = 1$ car $\dim E_1(f) = 3$

$\Leftrightarrow 1 + tr(J) \neq 1$

$\Leftrightarrow \boxed{tr(J) \neq 0}$.

Code épreuve : 296 | Nombre de pages : 28 | Session : 2022

Épreuve de : Maths EML

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

Exercice 3.

(1) • ~~f est continue sur $]-\infty, 1[\setminus \{0\}$ comme composée de ln et produit de fonctions continues sur cet intervalle.~~

• f est continue sur $I =]-\infty, 1[\setminus \{0\}$ car : sur I, $t \mapsto 1-t$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et par composée, $t \mapsto -\ln(1-t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $t \mapsto \frac{1}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ ($I \subset \mathbb{R}^*$) d'où f est continue sur I.

• en 0 : $-\dfrac{\ln(1-t)}{t} \underset{t\to 0}{\sim} -\left(\dfrac{-t}{t}\right) = 1$

d'où $\lim\limits_{t\to 0}\left(-\dfrac{\ln(1-t)}{t}\right) = 1 = f(0)$

d'où f est continue en 0.

• Ainsi, f est continue sur $]-\infty, 1[$.

(2) (a) Avec $g : \begin{array}{|l}]-\infty,1[\to g(]-\infty,1[) \\ t \mapsto \dfrac{t}{1-t} + \ln(1-t). \end{array}$

g est dérivable sur $]-\infty, 1[$ en tant que somme, produit et composée de fonctions dérivables sur $]-\infty, 1[$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$\forall\ t<1,\quad g'(t) = \dfrac{1-t-t(-1)}{(1-t)^2} + \dfrac{(-1)}{1-t}$

$= \dfrac{1-t+t}{(1-t)^2} - \dfrac{1}{1-t}$

$= \dfrac{1-(1-t)}{(1-t)^2}$

$= \dfrac{t}{(1-t)^2}$

d'où $\quad g'(t) \geq 0 \iff 0 \leq t < 1$

et $\quad g'(t) < 0 \iff t < 0$

d'où g est strictement croissante sur $[0,1[$
et strictement décroissante sur $]-\infty,0[$

avec : $g(0) = 0$.

d'où $\forall\ t<1,\ g(t) \geq g(0)$
≥ 0

d'où : $\boxed{\forall t \in]-\infty,1[,\quad \dfrac{t}{1-t} + \ln(1-t) \geq 0}$

(2) (b) • sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,1[$, f est de classe $\mathcal{C}^1$ en tant que composée et produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur ces intervalles.

• $\forall\ t \in]-\infty,0[\cup]0,1[$,

$f'(t) = -\left(\dfrac{\frac{-1}{1-t}\times t - \ln(1-t)}{t^2}\right)$

$= \dfrac{\frac{t}{1-t} + \ln(1-t)}{t^2} = \dfrac{g(t)}{t^2} \geq 0$ d'après q.(2)(a)

22/

② ⓒ Comme d'après ② ⓐ, $t \mapsto \frac{g(t)}{t^2} \geq 0$,

on a donc f croissante strictement sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,1[$.

③ ⓐ $\ln(1+t) \underset{0}{=} 1 - t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)$

d'où $\ln(1-t) \underset{0}{=} 1-(-t) + \frac{(-t)^2}{2} + o((-t)^2)$

i.e. $\ln(1-t) \underset{0}{=} 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)$

③ ⓑ $\frac{f(t)-f(0)}{t-0} = \frac{f(t)-1}{t} = \frac{-\frac{\ln(1-t)}{t} - 1}{t}$

$$= -\frac{\ln(1-t)+t}{t^2}$$

$$\underset{t\to 0}{=} -\frac{1+t+\frac{t^2}{2}+o(t^2)+t}{t^2}$$

$$\underset{t\to 0}{=} -\frac{1+2t+\frac{t^2}{2}+o(t^2)}{t^2}$$

$$\underset{t\to 0}{\sim} -1$$

④ • en $-\infty$:

$$\lim_{-\infty} f = \lim_{t\to-\infty} \frac{-\ln(1-t)}{t}$$

$$= \lim_{t\to-\infty} \frac{1}{\frac{-t}{\ln(1-t)}}$$

OR : $\lim_{t\to-\infty} \frac{-t}{\ln(1-t)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln(1+x)}$
$(x=-t)$

et $\frac{x}{\ln(1+x)} = \frac{1+x}{\ln(1+x)} - \frac{1}{\ln(1+x)}$

et $\lim_{x\to+\infty} \frac{1+x}{\ln(1+x)} = +\infty$ par croissances comparées

et $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln(1+x)} = 0$ par quotient.

d'où $\lim_{-\infty} f = \lim_{t\to-\infty} \frac{1}{\frac{-t}{\ln(1-t)}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{x}{\ln(1+x)}}$

$$= \lim_{X\to+\infty} \frac{1}{X} = 0 \text{ par quotient.}$$

d'où $\boxed{\lim_{-\infty} f = 0.}$

• en 1 :

$$\lim_{1} f = \lim_{t\to 1} \left(-\frac{\ln(1-t)}{t}\right)$$

$\lim_{t\to1} \ln(1-t) = \lim_{0^+} \ln = -\infty$

d'où $\lim_{1} f = +\infty$ par produit.

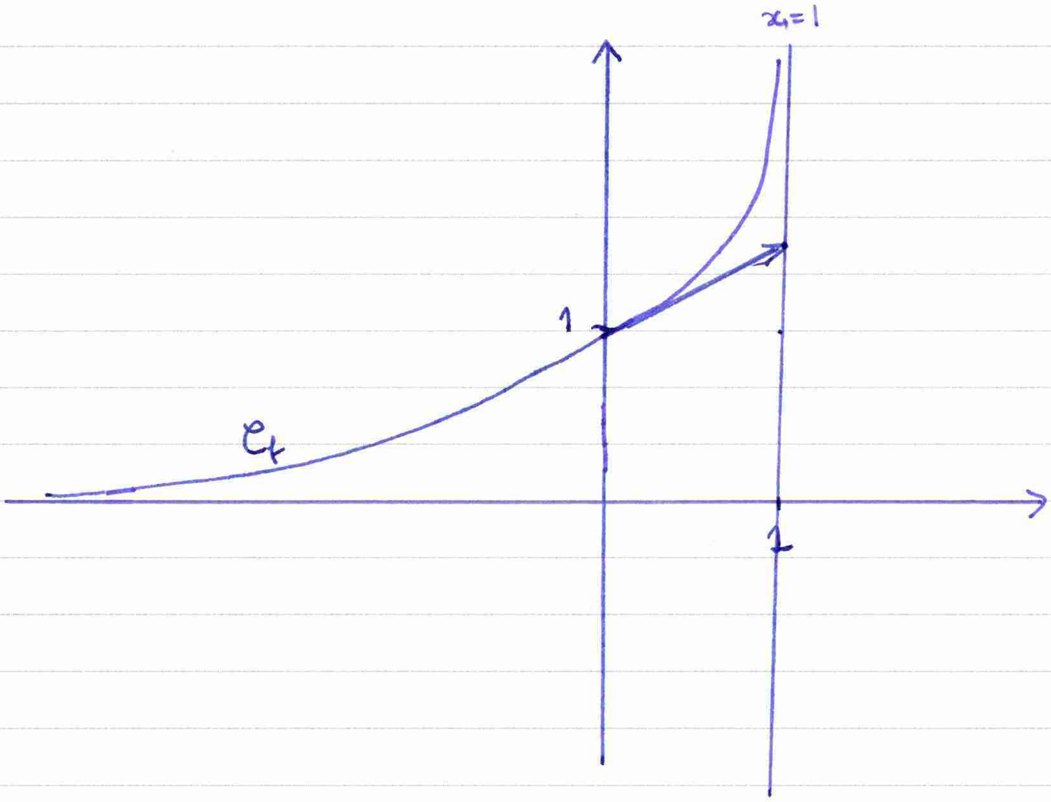
Code épreuve : 296	Nombre de pages : 28	Session : 2022

Épreuve de : Maths GMC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

5



~~Partie C.~~

~~9 a $\forall (x,y) \in]-\infty, 0[^2$,~~

~~$\partial_1(\phi)(x,y) =$~~

Partie B.

6 L est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 1[$ car f l'est sur $]-\infty, 1[$.

$\forall\, x < 1,\quad L'(x) = F'(x) = f(x)$.

7 a $\forall\, (A,B) \in]0,1[^2$,

$\int_A^B \cancel{f(t)\,dt}$ avec le changement de variable affine donc licite $u = 1-t$:

$$\begin{cases} u = 1-t \\ t = 1-u \\ dt = -\,du \\ t = A : u = 1-A \\ t = B : u = 1-B \end{cases}$$ d'où :

$$\int_A^B f(t)\,dt = \int_A^B \frac{-\ln(1-t)}{t}\,dt$$

$$= \int_{1-A}^{1-B} \frac{-\ln(u)}{1-u}\,(-du)$$

$$= \int_{1-B}^{1-A} \frac{-\ln(u)}{1-u}\, du$$

$$= \int_{1-B}^{1-A} \frac{-\ln t}{1-t}\, dt.$$

7 b $\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall t \in]0,1[,$

$$\sum_{k=0}^{n} \left(-t^k \ln(t)\right) + \frac{-t^{n+1}\ln(t)}{1-t}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k(1-t)\ln t}{(1-t)} -$$

7 c En posant :

$$\begin{cases} u(t) = \ln(t) \\ v'(t) = -t^k \end{cases} \qquad ; u'(t) = \frac{1}{t} \quad ; v(t) = -\frac{t^{k+1}}{k+1}$$

Comme u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha, 1]$ $(\alpha \in]0,1])$ on peut donc intégrer par parties uv' sur $[\alpha, 1]$:

$$\int_\alpha^1 -t^k \ln(t)\, dt = -\left[\ln(t)\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_\alpha^1 + \int_\alpha^1 \frac{t^{k+1}}{k+1} \times \frac{1}{t}\, dt$$

$$= \ln(\alpha)\frac{\alpha^{k+1}}{k+1} + \int_\alpha^1 \frac{t^k}{k+1}\, dt$$

or $\lim\limits_{\alpha \to 0} \alpha^{k+1}\ln(\alpha) = 0$ par croissances comparées $(k+1>0)$

d'où : $\int_0^1 -t^k \ln(t)\, dt$ converge et vaut :

$$\frac{1}{k+1}\int_0^1 t^k \, dt = \frac{1}{k+1}\left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^1$$

$$\boxed{\int_0^1 -t^k \ln(t)\,dt = \frac{1}{(k+1)^2}}.$$