# Copie anonyme - n°anonymat : 966412



Exercice 3

1). Sur $]-\infty,1[\setminus\{0\}$, f est continue par composée et quotient des fonctions continues sur $]-\infty,1]\setminus\{0\}$ car la fonction logarithme est continue et $1-t>0 \Leftrightarrow -t>-1 \Leftrightarrow t<1$.

En 0 : $\lim\limits_{t\to 0} \frac{-\ln(1-t)}{t}$

J'admet que f est aussi continue en 0. Donc f est continue sur $]-\infty,1[$.

2)a) Soit $h : t \mapsto \frac{t}{1-t} + \ln(1-t)$ définie sur $]-\infty,1[$.

h est dérivable car continue, et :

$h'(t) = \frac{1-t+t}{(1-t)^2} - \frac{1}{1-t}$

$= \frac{1}{(1-t)^2} - \frac{1-t}{(1-t)^2} = \frac{1-1+t}{(1-t)^2} = \frac{t}{(1-t)^2} \quad \forall t<1$

| | $-\infty$ | | 0 | | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| signe de h' | | − | 0 | + | |
| variations de h | | ↘ | 0 | ↗ | ‖ |

$h(0) = 0$

h admet un minimum sur $]-\infty,1[$, ce minimum est 0, donc $\frac{t}{1-t} + \ln(1-t) \geq 0 \ \forall t \in ]-\infty,1[$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

2b). $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,1[$ par composée et quotients de fonctions $\mathcal{C}^1$ sur ces intervalles. On peut donc dériver $f$:

$$f'(t) = \frac{\frac{t}{1-t} + \ln(1-t)}{t^2}$$

$t \mapsto t^2 > 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$

on a vu que $\frac{t}{1-t} + \ln(1-t) \geq 0 \ \forall t \in ]-\infty,1[$.

2c). $f'(t)$ est donc positive pour tout $t \in ]-\infty,0[$ et $]0,1[$

Donc $f$ est croissante sur $]-\infty,0[$ et $]0,1[$, donc sur $]-\infty,1[$ (car ~~f(0)=1~~ $f$ est continue sur $]-\infty,1[$ donc en 0)

3a). Soit $p(t) = \ln(1-t)$. $p$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-\infty,1[$.

$p(0) = 0$

$p'(t) = \frac{-1}{1-t}$ $p'(0) = -1$

$p''(t) = \frac{-1}{(1-t)^2}$ $p''(0) = -1$

D'après la formule de Taylor-Young : $p(t) \underset{0}{=} p(0) + t p'(0) + \frac{t^2}{2} p''(0)$ donc:

$\ln(1-t) \underset{0}{=} -t - \frac{t^2}{2}$

3b) On regarde la limite du taux d'accroissement de $f$ en 0:

$$\frac{f(t) - f(0)}{t-0} = \frac{\frac{-\ln(1-t)}{t} - 1}{t} = \frac{-\ln(1-t) - t}{t^2} \underset{0}{\approx} \frac{t + \frac{t^2}{2} - t}{t^2}$$ d'après q. 3a).

$$\underset{0}{\approx} \frac{\frac{t^2}{2}}{t^2} \approx \frac{1}{2}$$

Donc $\frac{f(t) - f(0)}{t}$ admet une limite finie en 0, donc $f$ est dérivable en 0, et $f'(0) = \frac{1}{2}$

3c). $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,1[ \setminus \{0\}$ par composée et quotient de fonctions qui le sont.

De plus, on sait que $f'(0) = \frac{1}{2}$ ~~et que $f'(t) = \frac{\frac{t}{1-t} + \ln(1-t)}{t^2}$~~

donc $f'$ est continue sur $]-\infty,1[$,

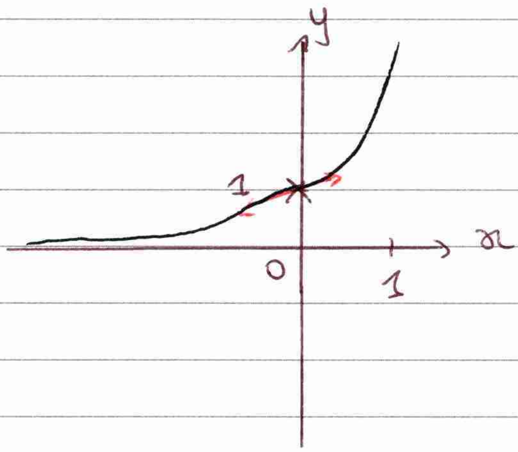
donc $f$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,1[$.

4) $\lim\limits_{t\to-\infty} f(t) = \lim\limits_{t\to-\infty} \dfrac{-\ln(1-t)}{t}$ Forme indéterminée.

$= 0$ par croissances comparées

$\lim\limits_{t\to 1^-} f(t) = \lim\limits_{t\to 1} \dfrac{-\ln(1-t)}{t} = \dfrac{-\ln(0^+)}{1^-} = +\infty$

5)




$f'(0) = \frac{1}{2}$

équation de la tangente en 0 :

$y = f(0) + \cancel{x}\, t f'(0)$

$= 1 + \frac{t}{2}$

B)

6) $t \mapsto f(t)$ est continue sur $]-\infty, 1[$, donc $L$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 1[$.

$L$ est la primitive de $f$ qui s'annule en 0

$L'(x) = f(x)$ $\forall x \in ]-\infty, 1[$.

7) a). $\displaystyle\int_A^B f(t)\,dt = \int_A^B \frac{-\ln(1-t)}{t}\,dt$. on fait le changement de variable $u = 1-t$.

$\displaystyle = \int_{1-A}^{1-B} \frac{-\ln(u)}{1-u}(-du)$

$\displaystyle = -\int_{1-A}^{1-B} \frac{-\ln(u)}{1-u}\,du = \int_{1-B}^{1-A} \frac{-\ln(u)}{1-u}\,du$

Donc $\int_A^B f(t)\,dt = \int_{1-B}^{1-A} -\frac{\ln(t)}{1-t}\,dt \quad \forall (A,B) \in ]0,1[^2$

7b). $\sum_{k=0}^{n} -t^k \ln(t) = -\ln(t) \sum_{k=0}^{n} t^k dt$ c'est une somme géométrique $(t \in ]0,1[)$

$= -\ln(t) \times \frac{1-t^{n+1}}{1-t}$

$= \frac{-\ln(t)(1-t^{n+1})}{1-t}$

$= -\frac{\ln(t)}{1-t} + \frac{\ln(t)t^{n+1}}{1-t}$

on a donc $\sum_{k=0}^{n} -t^k \ln(t) = -\frac{\ln(t)}{1-t} + \frac{\ln(t)t^{n+1}}{1-t}$

donc $-\frac{\ln(t)}{1-t} = \sum_{k=0}^{n} -t^k \ln(t) - \frac{t^{n+1}\ln(t)}{1-t} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall t \in ]0,1[$.

7c). $\int_0^1 -t^k \ln(t)\,dt$ Il y a un problème de convergence en 0. Soit $x > 0$:

on calcule $\int_x^1 -t^k \ln(t)\,dt$ avec une intégration par parties:

$u(t) = \ln(t) \quad v(t) = -\frac{t^{k+1}}{k+1}$

$u'(t) = \frac{1}{t} \quad v'(t) = -t^k$

$\int_x^1 -t^k \ln(t)\,dt = \left[-\frac{\ln(t)t^{k+1}}{k+1}\right]_x^1 + \int_x^1 \frac{t^{k+1}}{t(k+1)}\,dt$

$= \frac{\ln(x)x^{k+1}}{k+1} + \frac{1}{(k+1)} \int_x^1 t^k\,dt$

$= \frac{\ln(x)x^{k+1}}{k+1} + \frac{1}{(k+1)} \left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_x^1$

$= \frac{\ln(x)x^{k+1}}{k+1} + \frac{1}{(k+1)^2} - \frac{x^{k+1}}{(k+1)^2}$ $\quad \ln(x)x^{k+1} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ par croissances comparées

Quand $x \to 0$, $\int_x^1 -t^k \ln(t)\,dt = \frac{1}{(k+1)^2} \quad \forall k \in \mathbb{N}$

Donc $\int_0^1 -t^k \ln(t)\,dt = \frac{1}{(k+1)^2}$

Emplacement QR Code

**Code épreuve :** 296 **Nombre de pages :** 16 **Session :** 2022

**Épreuve de :** Maths Emlyon

**Consignes**
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

7d). $\lim_{t \to 0^+} \frac{-t\ln(t)}{1-t} = 0$ $\lim_{t \to 1^-} \frac{-t\ln(t)}{1-t} = \frac{0}{0^+} = 0 \times (+\infty) =$

J'admet le resultat

7e). $\int_0^1 \frac{-\ln(t)}{1-t} dt$

on sait que $\frac{-\ln(t)}{1-t} = \sum_{k=0}^{n} -t^k \ln(t) + \frac{-t^{n+1}\ln(t)}{1-t}$

on peut integrer cette egalite sur $[0,1]$ :

$\int_0^1 -\frac{\ln(t)}{1-t} dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} -t^k \ln(t) dt + \int_0^1 -\frac{t^{n+1}\ln(t)}{1-t} dt$ par linéarité

$= \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 -t^k \ln(t) dt + \int_0^1 -\frac{t^{n+1}\ln(t)}{1-t} dt$

$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} + \int_0^1 -\frac{t^{n+1}\ln(t)}{1-t} dt$

(cf. q7c).)

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Or, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{-t^{n+1}\ln(t)}{1-t}dt = 0$

~~donc~~ $\cancel{\int_0^1 \frac{t \ln(t)}{1-t} dt}$ ~~converge~~

Et $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} = \sum\limits_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2}$ (avec un changement de variable)

et $\sum\limits_{k\geq 1} \frac{1}{k^2}$ est une série de Riemann convergente $(2>1)$

donc $\int_0^1 -\frac{\ln(t)}{1-t} dt$ converge, et $\int_0^1 -\frac{\ln(t)}{1-t} = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$

f) $L'(x) = f(x)\ \forall x \in ]-\infty, 1[$

$L(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x -\frac{\ln(1-t)}{t}dt = \int_{1-x}^1 -\frac{\ln(t)}{1-t}dt$ d'après Q. 7a).

convergait et que

Avec $x=1$, donc pour $L(1)$, on a vu que $\int_0^1 -\frac{\ln(t)}{1-t}dt = \frac{\pi^2}{6}$

Donc $L(1)$ admet une limite finie, donc $L$ est prolongeable par continuité en 1, et on pose $L(1) = \frac{\pi^2}{6}$

8a). $x \mapsto L(x)$ est dérivable sur $]-1,0[$ et sur $]0,1[$

donc $x \mapsto L(-x)$ l'est aussi

et $x \mapsto L(x^2)$ aussi par composée

Soit $h: x \mapsto L(x) + L(-x) - \frac{1}{2}L(x^2)$

$h'(x) = L'(x) - L'(-x) - \frac{2x}{2}L'(x^2) = L'(x) - L'(-x) - xL'(x^2)$

$h'(x) = f(x) - f(-x) - xf(x^2)$

8b).

8c). $L(-1) = f'(-1) = \dfrac{-\frac{1}{2} + \ln(2)}{1} = -\frac{1}{2} + \ln(2)$

C] 9a) $\partial_1(\Phi)(x,y) = L'(x) + y\,L'(-xy)$
$= f(x) + y\,f(-xy) \quad \forall (x,y) \in ]-\infty,0[^2$

$\partial_2(\Phi)(x,y) = L'(y) + \cancel{y}\, x\, L'(-xy)$
$= f(y) + x f(-xy)$

9b)

$(x,y)$ est point critique de $\Phi \Leftrightarrow \begin{cases} \partial_1(\Phi)(x,y) = 0 \\ \partial_2(\Phi)(x,y) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) + y f(-xy) = 0 \\ f(y) + x f(-xy) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y f(-xy) = -f(x) \\ x f(-xy) = -f(y) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} f(-xy) = \dfrac{-f(x)}{y} & \text{car } y \neq 0 \\ f(-xy) = \dfrac{-f(y)}{x} & \text{car } x \neq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \left\{ \dfrac{-f(x)}{y} = \dfrac{-f(y)}{x} \right. \Leftrightarrow \{ -x f(x) = -y f(y) \Leftrightarrow \{ x f(x) = y f(y)$

$\Leftrightarrow x = -1$ et $y = -1$

Donc $\Phi$ admet $(-1,-1)$ comme unique point critique.

10)a) $$H=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$\partial_{1,1}(\phi)(x,y)=f'(x)-y^2f'(-xy)$

$\partial_{2,2}(\phi)(x,y)=f'(y)-x^2f'(-xy)$

$\partial_{1,2}(\phi)(x,y)=f(-xy)-yxf'(-xy)$

$\partial_{1,1}(\phi)(-1,-1)=f'(-1)-f'(-1)=0=\partial_{2,2}(\phi)(x,y)$

$\partial_{1,2}(\phi)(-1,-1)=f(-1)-f'(-1)=\ln(2)+\frac{1}{2}-\ln(2)=\frac{1}{2}=\partial_{2,1}(\phi)(x,y)$

10).b). $H-\lambda I=\begin{pmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\lambda \end{pmatrix}$

$H-\lambda I$ est non-inversible $\Leftrightarrow (-\lambda)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=0$

$\Leftrightarrow \lambda^2-\frac{1}{4}=0$

$\Leftrightarrow \lambda^2=\frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow \lambda=-\frac{1}{2}$ ou $\lambda=\frac{1}{2}$

Les valeurs propres de H sont donc $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$

11). Les valeurs propres de H, la matrice hessienne au point $(-1,-1)$ sont de signes contraires, donc $\phi$ n'admet pas de ~~de~~ extremum local au point $(-1,-1)$.

Or, $(-1,-1)$ est l'unique valeur propre de $\phi$, donc $\phi$ n'admet aucun extremum local sur $]-\infty,0[^2$.

# Copie anonyme - n°anonymat : 966412

| Code épreuve : 296 | Nombre de pages : 16 | Session : 2022 |
|---|---|---|

Épreuve de : Maths Emlyon

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

## Exercice 1

A) 1). $P(Y=k) = P(X+1=k) = P(X=k-1) = pq^{k-1}$

Donc $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$

2) $E(Y) = \frac{1}{p}$ $V(X) = \frac{q}{p^2}$ $Y = X+1$

$E(X) = E(Y) - 1$ par linéarité de l'espérance

$= \frac{1}{p} - 1 = \frac{1-p}{p} = \frac{q}{p}$ Donc $E(X) = \frac{q}{p}$

$V(X) = V(Y) = \frac{q}{p^2}$

3)
```
function X=simule_X(p)
    Y = ~~X=1~~ grand(1,n ;geom;p)
    while
        Y=Y+1
    end
    X=Y-1
endfunction
```

B) 4). for j=1:Z
S=

Z=Z+1

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

5a). $u_0 = P(Z_0=0) = 0$ car $Z_0 = 1$

$u_1 = P(Z_1=0) = P(X=0) = q^0 p = p$

5b). $\forall n \in \mathbb{N}$, $(Z_{n+1}=0) \subset (Z_n=0)$

Donc la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.

$u_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ car c'est une probabilité

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée, donc elle converge

6) $P(R)$ représente la probabilité que le joueur finisse par ne plus avoir de jetons, donc au bout d'une infinité de tirages.

Et $\ell$ représente le fait que le joueur n'ait plus de jetons après une infinité de tirages, donc $P(R) = \ell$

7a). $\forall k \in \mathbb{N}$, $P_{(Z_1=k)}(Z_2=0)$. $(Z_2=0)$ si, et seulement si, le joueur a aucun jeton à la deuxième activation. La machine ne reverse aucun jeton si le joueur n'introduit aucun jeton (si $k=0$)*, ou si $(X=0)$ pour les $k$ jetons insérés.

$P(X=0) = p$.

Alors, $P_{(Z_1=k)}(Z_2=0) = P(X=0)^k$

$= (u_1)^k$

* mais $(Z_1=k)$ donc ce n'est pas le cas.

7b). On sait que $\forall k \in \mathbb{N}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_{(Z_1=k)}(Z_{n+1}=0) = (u_n)^k$

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = P(Z_{n+1}=0) = \sum_{k=0}^{+\infty} P_{(Z_1=k)}(Z_{n+1}=0)\, P(Z_1=k)$ avec la formule des probabilités totales

Donc $u_{n+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_1=k)(u_n)^k$

$= \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k)(u_n)^k$

$= \sum_{k=0}^{+\infty} p(qu_n)^k = p \sum_{k=0}^{+\infty} (qu_n)^k$ $\quad (qu_n) \in ]-1,1[$ somme géométrique

$= p \times \frac{1}{1-qu_n} = \frac{p}{1-qu_n}$

Donc $u_{n+1} = \frac{p}{1-qu_n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

8a). On a donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{p}{1-qu_n}$

or, $\ell = \lim_{n \to +\infty} u_n$ donc $\lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = \ell$

on a donc $\ell = \frac{p}{1-q\ell}$ $\Leftrightarrow \ell(1-q\ell) = p$

$\Leftrightarrow \ell - q\ell^2 = p$

$\Leftrightarrow \ell - q\ell^2 - p = 0$

j'aurais du trouver $(\ell-1)(q\ell-p)=0$. j'admet ce résultat

8b). on suppose $p \geq \frac{1}{2}$. On a : $(\ell-1)(q\ell-p)=0$ $\Leftrightarrow \ell = 1$ ou $q\ell = p$

$\Leftrightarrow P(R) = 1$ ou $P(R) = \frac{p}{q}$

8c). on a vu que $\ell = 1$ ou $\ell = \frac{p}{q}$

$\ell = \lim_{n \to +\infty} u_n$, donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n \in [0, \frac{p}{q}]$

j'admet le résultat.

d). si $p \geq \frac{1}{2}$, $P(R) = 1$. si $p < \frac{1}{2}$, $P(R) < 1$

Donc le joueur finit forcément par ne plus avoir de jetons si $p \geq \frac{1}{2}$ ce qui n'est pas le cas si $p < \frac{1}{2}$

~~mais si le joueur aura toujours par ne plus avoir des jetons, le jeu ne sera pas rentable pour le casino donc le casino préfèrera choisir p dans l intervalle [1/2, 1]~~

~~mais si le joueur n'aura forcément plus de jetons après n activations de la machine, le jeu ne sera pas attractif, donc le casino préfèrera choisir $p \in [1/2, 1]$.~~

8)] Si $p < \frac{1}{2}$, le jeu ne serait pas rentable pour le casino car le joueur peut jouer indéfiniment. Il faut donc que le casino choisisse $p \in [1/2, 1]$.

c].

9). $u_n = P(Z_n = 0)$. $u_n$ représente la probabilité que le joueur ait aucun jeton après n activations.

$(T \leq n)$ représente le fait que le joueur n'ait plus de jetons pour la première fois au bout de n activations. Donc $u_n = P(T \leq n)$

$P(T_n \leq n) = u_n$.

et $P(T_n \leq n) = P(T_n = n) + P(T_n \leq n-1)$

donc $P(T_n = n) = P(T_n \leq n) - P(T_n \leq n-1)$

$= u_n - u_{n-1}$

$= 1 - v_n - 1 + v_{n-1}$

$= v_{n-1} - v_n$

donc $P(T_n = n) = v_{n-1} - v_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

10). $\sum_{n=1}^{N} nP(T=n) = \sum_{n=1}^{N} n(v_{n-1} - v_n)$

$= \sum_{n=1}^{N} nv_{n-1} - nv_n$

$= /$

11a). $u_n = P(T \leq n)$. J'admet que $u_n = \frac{n}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

b). T admet une espérance si, et seulement si, la série $\sum_{n \geq 1} nP(T=n)$ converge absolument.

$\sum_{n \geq 1} nP(T=n) = \sum_{n \geq 1} n(v_{n-1} - v_n)$

$= \sum_{n \geq 1} n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$

$= \sum_{n \geq 1} 1 - \frac{n}{n+1}$

$u_n = \frac{n}{n+1}$

donc $v_n = 1 - u_n = 1 - \frac{n}{n+1}$

$= \frac{n+1-n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$

et $v_{n-1} = \frac{1}{n}$

Copie anonyme - n°anonymat : 966412

Code épreuve : 296

Nombre de pages : 6

Session : 2022

Épreuve de : Maths Emlyon

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

$\boxed{\text{Exercice 2}}$

1a). Soit $M \in M_2(\mathbb{R})$, $N \in M_2(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

On montre que $tr : \begin{cases} M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ M \mapsto tr(M) \end{cases}$

est linéaire, donc que $tr(\lambda M + N) = \lambda tr(M) + tr(N)$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$tr(\lambda M+N) = tr(\lambda M+N) = \lambda(a+d) + a+d$
$= \lambda tr(M) + tr(N)$.

Donc l'application $tr : \begin{cases} M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ M \mapsto tr(M) \end{cases}$ est linéaire

1b). $M \in Ker(tr) \Leftrightarrow tr(M) = 0$
$\Leftrightarrow$

2). • f est une application allant de $M_2(\mathbb{R})$ dans $M_2(\mathbb{R})$ (si $M \in M_2(\mathbb{R})$, alors $f(M) \in M_2(\mathbb{R})$).

• On montre que f est linéaire : soit M une matrice de f, N une matrice de f, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$f(\lambda M+N) = \lambda M+N + tr(\lambda M+N)J$
$= \lambda M+N + \lambda tr(M)J + tr(N)J$ (car l'application tr est linéaire)
$= \lambda M + \lambda tr(M)J + N + tr(N)J$
$= \lambda(M+tr(M)J) + N + tr(N)J$
$= \lambda f(M) + f(N)$.

Donc f est linéaire.
Donc f est un endomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$.

3).a).

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f(E_1) & f(E_2) & f(E_3) & f(E_4) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \end{array}$$

$f(E_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$= E_1 + 2E_2 + E_3$

$f(E2)=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+0\times J=E2$

$f(E3)=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+0\times J=E3$

$f(E4)=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}+1\times J=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&2\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2\\1&1\end{pmatrix}=2E2+E3+E4$

3b).

$$A-I_4=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\2&0&0&2\\1&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$(A-I_4)^2=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\2&0&0&2\\1&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&0&0&0\\2&0&0&2\\1&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=0$$

Donc $(A-I_4)^2=0$

3c). $(A-I_4)^2=0$, donc le polynôme $(X-1)^2$ annule $A$.
Les valeurs propres possibles de $A$ sont donc les solutions de l'équation $(\lambda-1)^2=0 \iff \lambda=1$

1 est la seule valeur propre possible de $A$, et $(A-I_4)$ n'étant pas inversible (2 lignes nulles), 1 est bien une (la) valeur propre de $A$.
On voit que $\text{rang}(A-I_4)=1$ car 2 colonnes sont nulles et la dernière colonne et la première colonne sont égales.

Donc, d'après le théorème du rang, $\dim \text{Ker}(f-id)=3<4$
donc la dimension du sous-espace propre associé à 1 est $3(<4)$
Donc $A$ n'est pas diagonalisable.

3d). 0 n'est pas valeur propre de $A$, donc $A$ est inversible.
On utilise la méthode Gauss-Jordan pour déterminer $A^{-1}$ :

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&2\\1&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix} \qquad I=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&2\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \quad \begin{matrix}L_2\leftarrow L_2-2L_1\\ L_3\leftarrow L_3-L_1\end{matrix} \quad \begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&2 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \qquad \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ -2&1&0&0 \\ -1&0&1&-1 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_4 \qquad \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ -2&1&0&-2 \\ -1&0&1&-1 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ -2&1&0&-2 \\ -1&0&1&-1 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}$

4a).

4b). $f(J) = J + tr(J)J = (1+tr(J))J$, avec $J \neq 0$.
Donc $J$ est un vecteur propre de $f$ associé à la valeur propre $1+tr(J)$

4c). i) Si $tr(J) \neq 0$, alors $f$ admet deux valeurs propres distinctes $1$ et $1+tr(J)$.