Copie anonyme - n°anonymat : 860649

Code épreuve : 297 | **Nombre de pages :** 21 | **Session :** 2022

Épreuve de : Mathématiques 5

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 1

1. f est strictement positive donc F strictement croissante sur $\mathbb{R}$
donc $\forall a \in \mathbb{R}$ $F(a) > 0$ donc $F(a) \neq 0$
donc $\forall a \in \mathbb{R}$ $\boxed{g \text{ est définie sur }]-\infty, a]}$

de plus f est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $]-\infty, a]$
donc g continue sur $]-\infty, a]$ et $]a, +\infty[$
($F(a)$ est une constante)
donc $\boxed{g \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ sauf en un nombre finis de points}}$

également f strictement positive sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$ $F(x) > 0$
donc $\boxed{g \text{ (strictement) positive sur } \mathbb{R}}$

enfin, f est une densité et F est sa primitive sur $\mathbb{R}$

$\forall (A,B) \in \mathbb{R}^2$ donc $\displaystyle\int_A^B g(t)dt = \frac{1}{F(a)} \int_A^a f(t)dt + \int_a^B 0 dt$

$= \dfrac{1}{F(a)} \left[F(t)\right]_A^a = 1 - F(A)$

or $\lim\limits_{A \to -\infty} F(A) = 0$ car F fonction de répartition

donc $\lim\limits_{\substack{A \to -\infty \\ B \to +\infty}} \displaystyle\int_A^B g(t)dt = \boxed{1 = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt}$

donc $\boxed{g \text{ peut être considérée comme une densité de } Y}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

2.a) $\forall x \in \mathbb{R} \quad G(x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)dt$

$\forall a \in \mathbb{R}$

donc $\forall x \in]-\infty, a] \quad G(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(t)}{F(a)} dt$

$$= \left[\frac{F(t)}{F(a)} \right]_{A \to -\infty}^{x}$$

$$= \lim_{A \to -\infty} \frac{1}{F(a)} \left(F(x) - F(A) \right)$$

$$= \frac{F(x)}{F(a)}$$

et $\forall x \in]a, +\infty[\quad G(x) = 1$ car $Y(\Omega) \subset]-\infty, a]$

donc $\boxed{\begin{array}{l} \forall a \in \mathbb{R} \\ \forall x \in \mathbb{R} \quad G(x) = \begin{cases} \frac{F(x)}{F(a)} & \text{si } x \leq a \\ 1 & \text{si } x > a \end{cases} \end{array}}$

2.b) $\forall x \in \mathbb{R} \quad P_{(X \leq a)}(X \leq x) = \frac{P([X \leq a] \cap [X \leq x])}{P(X \leq a)}$

or $P(X \leq a) = F(a)$

et $\forall x \in]-\infty, a] \quad [X \leq a] \cap [X \leq x] = [X \leq x]$

donc $P_{(X \leq a)}(X \leq x) = \frac{P(X \leq x)}{P(X \leq a)} = \frac{F(x)}{F(a)}$

et $\forall x \in]a, +\infty[\quad [X \leq a] \cap [X \leq x] = [X \leq a]$

donc $P_{(X \leq a)}(X \leq x) = \frac{P(X \leq a)}{P(X \leq a)} = 1$

donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad P_{(X \leq a)}(X \leq x) = \begin{cases} \frac{F(x)}{F(a)} & \text{si } x \leq a \\ 1 & \text{si } x > a \end{cases}$

donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad G(x) = P_{(X \leq a)}(X \leq x)}$

3\. a) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} \quad G_n(x) = P(M_n \leq x)$

$$= P\left(\bigcap_{i=1}^{n} [Y_i \leq x]\right)$$

or $(Y_1, \dots, Y_n)$ mutuellement indépendants

donc $G_n(x) = \prod_{i=1}^{n} P(Y_i \leq x)$

et $\forall i \in [\![1, n]\!]$ X_i suis la loi de Y

donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad G_n(x) = \begin{cases} \left(\frac{F(x)}{F(a)}\right)^n & \text{si } x \leq a \\ 1 & \text{si } x > a \end{cases}}$

3\. b) or $\forall x \in]-\infty, a[$ $\quad F(x) < F(a)$ car F strictement croissante

donc $\frac{F(x)}{F(a)} < 1$

donc $\forall x \in]-\infty, a[\quad \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{F(x)}{F(a)}\right)^n = 0$

et pour $x = a$ $\quad \frac{F(x)}{F(a)} = 1$

donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad \lim\limits_{n \to +\infty} G_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ 1 & \text{si } x \geq a \end{cases}$

donc $\boxed{\text{$M_n$ converge en loi vers une variable certaine égale à a}}$

4\. a) $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad H_n(x) = P(Z_n \leq x)$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$= P(n(a - M_n) \leq x)$$

$$= P\left(a - M_n \leq \frac{x}{n}\right), \quad n \neq 0$$

$$= P\left(-M_n \leq \frac{x}{n} - a\right)$$

$$= P\left(M_n \geq a - \frac{x}{n}\right) = 1 - P\left(M_n \leq a - \frac{x}{n}\right)$$

donc $H_n(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{F(a - \frac{x}{n})}{F(a)}\right)^n & \text{si } a - \frac{x}{n} \leq a \\ 1 - 1 & \text{si } a - \frac{x}{n} > a \end{cases}$

or $a - \frac{x}{n} \leq a \iff -\frac{x}{n} \leq 0 \iff x \geq 0$

donc $\boxed{\forall x\in\mathbb{R}\ H_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1-\left[\dfrac{F(a-\frac{x}{n})}{F(a)}\right]^n & \text{si } x \geq 0 \end{cases}}$

4.b)

Copie anonyme - n°anonymat : 860649

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 21

Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques S

Emplacement QR Code

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 2

1. pour $k=0$ F est l'ensemble des endomorphismes f de $\mathbb{R}^3$ tq $\forall x \in \mathbb{R}^3 \; \|f(x)\| \leq 0$

or $\forall x \in \mathbb{R}^3 \; \|x\| \geq 0$ donc $\|f(x)\| = 0$

donc $\forall x \in \mathbb{R}^3 \; f(x) = 0 \Rightarrow f = \vec{0}$

donc $\boxed{\text{F est l'ensemble des endomorphismes nuls}}$

2.a) $A^2 = \dfrac{81}{27^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc $\boxed{A^2 = \frac{1}{9} Id}$

donc $A^2 - \frac{1}{9} Id = \vec{0}$

donc $X^2 - \frac{1}{9}$ est un polynome annulateur de A

or $X^2 - \frac{1}{9} = 0 \Leftrightarrow (X - \frac{1}{3})(X + \frac{1}{3}) = 0$

donc $-\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{3}$ sont les racines du polynôme annulateur

donc $\boxed{-\frac{1}{3} \text{ et } \frac{1}{3} \text{ sont les seuls valeurs propres possibles}}$

on pose $\lambda = \frac{1}{3}$ et $\mu = -\frac{1}{3}$

2.b) $\boxed{\text{A est symétrique à coeficient réels donc A est diagonalisable}}$

de plus $A\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{27}\times(-9)\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} \neq 0$

donc $-\frac{1}{3}$ est bien valeur propre de A

et $A\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{27}\times 9\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} \neq 0$

donc $\frac{1}{3}$ est bien valer propre de A

donc $\boxed{-\frac{1}{3} \text{ et } \frac{1}{3} \text{ sont bien valeur propres de } A}$

2.c) A est diagonalisable et $\mathbb{R}^3$ est un espace euclidiens

donc $\boxed{\text{les sous espaces propres de } f \text{ sont supplémentaires orthogonaux dans } \mathbb{R}^3}$

2.d) donc $\forall x \in \mathbb{R}^3 \quad \exists (y,z) \in \ker(f - \frac{1}{3}Id) \times \ker(f + \frac{1}{3}Id)$

tq $x = y + z$

$\|f(y)\|^2 = \|\frac{1}{3}y\|^2 = \frac{1}{9}\|y\|^2$, $\|f(z)\|^2 = \frac{1}{9}\|z\|^2$

donc $\|f(y)\|^2 + \|f(z)\|^2 = \frac{1}{9}(\|z\|^2 + \|y\|^2)$

et par inégalité triangulaire $\|f(y) + f(z)\|^2 \leq \frac{1}{9}(\|z\|^2 + \|y\|^2)$

or $\|z+y\|^2 = \|z\|^2 + 2\langle y,z\rangle + \|y\|^2$ et y, z orthogonaux

donc $\langle y,z\rangle = 0$

donc $\|y+z\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2 = \|x\|^2$

et par linéarité $f(y) + f(z) = f(x)$, f endomorphisme

Finalement: $\forall x \in \mathbb{R} \quad \|f(x)\| \leq \frac{1}{3}\|x\|$ et $\frac{1}{3} \in [0,1[$

donc $\boxed{f \in F}$

3\. a) $\forall x \in \mathbb{R}$. $\|Id(x)\| = \|x\| = 1 \times \|x\|$

donc il n'existe pas de $k \neq 1$ tq $\|Id(x)\| \leq k\|x\|$

donc $\boxed{Id \notin F}$

3\. b) soit $(f,g) \in F$ tq $\exists a \in \mathbb{R}^3$ tq $f(a) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} a$:

et $g(a) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} a$

alors $f(a) + g(a) = \sqrt{3}\, a$

donc $\|f(a) + g(a)\| = 3\|a\|$

$\Rightarrow \|(f+g)(a)\| = 3\|a\|$

donc $f+g \notin F$

donc F n'est pas stable par combinaison linéaires

donc $\boxed{\text{F n'est pas un espace vectoriel}}$

3\. c) $\forall (f,g) \in F$, $\exists (k,i) \in [0,1[^2$ tq $\forall x \in \mathbb{R}$ $\|f(x)\| \leq k\|x\|$

$\|g(x)\| \leq i\|x\|$

donc $\|g\circ f(x)\| \leq k\|g(x)\|$ par composition

or $\|g(x)\| \leq i\|x\|$

donc $\|g\circ f(x)\| \leq ik\|x\|$ et comme $i,k \in [0,1[^2$

$ik \in [0,1[$

donc $g\circ f \in F$

donc $\boxed{\text{F est stable par composition}}$

4\. b) l'application f de la question 2 est symétrique

et appartient à F

donc $\boxed{\text{F contient des symétries}}$

5\. b) comme k est la plus grande valeur propre en absolu

si elle est plus grande que 1 (en absolu)

k aussi et f n'appartiend pas à F

réciproquement si $\lambda \in [0,1[$, k aussi... donc $\boxed{f \in F \Leftrightarrow \lambda \in]-1,1[}$

6. a) $A^2 = \frac{1}{6^2}\begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \frac{1}{6^3}\begin{pmatrix} 0 & -18 & 18 \\ -18 & -9 & 0 \\ 18 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

donc $A^3 - \frac{9}{6^2}A = 0$

donc $X^3 - \frac{9}{36}X$ est un polynome annulateur de A

or $X^3 - \frac{9}{36}X = 0 \iff X\left(X^2 - \frac{9}{36}\right) = 0$

$\iff X\left(X - \frac{3}{6}\right)\left(X + \frac{3}{6}\right) = 0$

donc les racines du polynome annulateur sont 0, $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$

donc $\boxed{\left\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right\} \text{ sont les valeurs propres possibles de } A}$

6. b) donc de même que dans la question 2 $\ker(f - \frac{1}{2}Id)$, $\ker(f)$ et $\ker(f + \frac{1}{2}Id)$ sont supplementaires orthogonaux

donc $\forall x \in \mathbb{R}^3$ $\exists (a,b,c) \in \ker f - \frac{1}{2}Id \times \ker f \times \ker f + \frac{1}{2}Id$ tq $a+b+c = x$

donc $\|f(a)\|^2 + \|f(c)\|^2 = \frac{1}{4}(\|a\|^2 + \|c\|^2)$

et par inégalité triangulaire $\|f(a) + f(c)\|^2 \leq \frac{1}{4}(\|a\|^2 + \|c\|^2)$

or $f(b) = 0$ donc $\|f(x)\|^2 \leq \frac{1}{4}(\|a\|^2 + \|c\|^2)$

or $\|x\|^2 = \|a+b+c\|^2 = \|a\|^2 + 2(\langle a,b\rangle + \langle a,c\rangle) + \|b\|^2 + 2\langle b,c\rangle + \|c\|^2$

$= \|a\|^2 + \|b\|^2 + \|c\|^2 \geq \|a\|^2 + \|c\|^2$

donc $\|f(x)\|^2 \leq \frac{1}{4}\|x\|^2$ donc $\boxed{\|f(x)\| \leq \frac{1}{2}\|x\| \text{ et } \frac{1}{2} \in [0,1[}$

6. c) $\boxed{k = 1/2}$ techniquement...

Copie anonyme - n°anonymat : 860649

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 21

Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques S

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

Exercice 3

1. a) $\forall i \in [\![1, n]\!]$ $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ et $(X_1, \dots, X_n)$ mutuellement indépendantes

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\sum_{i=1}^{n} X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ et $(\sum_{i=1}^{n} X_i)(\Omega) = [\![0, n]\!]$

or $N(\Omega) = \mathbb{N}^*$ donc N peut prendre toute valeur dans $\mathbb{N}^*$

donc $\boxed{S(\Omega) = \mathbb{N}}$

1. b)

$\boxed{2. \ \forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p) \quad \text{et} \quad E(S_n) = np}$

3. $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $\{N = n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ forme un système complet d'évènements

donc $P(S=k) = \sum_{n=1}^{+\infty} P_{[N=n]}(S=k) \, P(N=n)$

or $P_{[N=n]}(S=k) = P(S_n = k)$ et $\forall n \in [\![1, k]\!]$ $P_{[N=n]}(S=k) = 0$

donc $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^* \quad P(S=k) = \sum_{n=k}^{+\infty} P(S_n=k) \, P(N=n)}$

4. a) $N-1 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$

donc $(N-1)(\Omega) = \mathbb{N}$

et $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $P(N-1=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

$\Rightarrow P(N=k+1) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, on pose $k'=k+1$

donc $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^* \quad P(N=k) = \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda}}$

4. b) d'après la question 3 :

$\forall k \in \mathbb{N}^*$ $P(S=k) = \sum_{n=k}^{+\infty} P(S_n=k) P(N=n)$

$$= \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda}$$

$$= \frac{p^k \lambda^{k-1} e^{-\lambda}}{1} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} q^{n-k} \lambda^{n-k} \frac{1}{(n-1)!}$$

$$= \frac{p^k \lambda^{k-1} e^{-\lambda}}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n}{(n-k)!} (\lambda q)^{n-k}$$

donc $\boxed{\forall k \in \mathbb{N} \quad P(S=k) = \frac{p^k \lambda^{k-1} e^{-\lambda}}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n(\lambda q)^{n-k}}{(n-k)!}}$

on pose $n' = n-k$

et $\forall k \in \mathbb{N}$ $P(S=k) = \frac{p^k \lambda^{k-1} e^{-\lambda}}{k!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+k)(\lambda q)^n}{n!}$

$$= \frac{p^k \lambda^{k-1} e^{-\lambda}}{k!} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda q)^n}{n!} \times k + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\lambda q)^n}{(n-1)!} \right)$$

or $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda q)^n}{n!}$ est une série exponentielle

donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda q)^n}{n!} k = k\, e^{-\lambda q}$

de plus $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\lambda q)^n}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda q)^{n+1}}{n!} = \lambda q \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda q)^n}{n!}$

$= \lambda q \quad e^{-\lambda q}$

donc $P(S=k) = \dfrac{p^k \lambda^{k-1} e^{-\lambda}}{k!} \left(k\, e^{-\lambda q} + \lambda q \cdot e^{-\lambda q} \right)$

donc $P(S=k) = \dfrac{p^k \lambda^{k-1} e^{-\lambda}}{k!} (k + \lambda q) e^{-\lambda q}$

or $e^{-\lambda} e^{-\lambda q} = e^{-\lambda(1-q)} = e^{-\lambda p}$

donc $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^* \quad P(S=k) = \dfrac{p^k \lambda^{k-1}}{k!} (\lambda q + k) e^{-\lambda p}}$

4\. c) $P(S=0) = 1 - \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P(S=k)$ comme $S(\Omega) = \mathbb{N}$

$$= 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{p^k \lambda^{k-1}}{k!} (\lambda q + k) e^{-\lambda p}$$

$$= 1 - e^{-\lambda p} \left(\lambda q \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{p^k \lambda^{k-1}}{k!} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{p^k \lambda^{k-1}}{(k-1)!} \right)$$

$$= 1 - e^{-\lambda p} \left(\frac{\lambda q}{\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(\lambda p)^k}{k!} + p \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(p\lambda)^{k-1}}{(k-1)!} \right)$$

$$= 1 - e^{-\lambda p} \left(q \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda p)^k}{k!} - 1 \right) + p \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(p\lambda)^k}{k!} \right)$$

$$= 1 - e^{-\lambda p} \left(q \left(e^{\lambda p} - 1 \right) + p \left(e^{\lambda p} \right) \right) = 1 - e^{-\lambda p} \left(e^{\lambda p}(q+p) - q \right)$$

or $p+q=1$ donc $= 1 - e^{-\lambda p}(e^{-\lambda p} - q)$ donc $\boxed{P(S=0) = 1 - e^{-2\lambda p} - q e^{-\lambda p}}$

4. d) $E(S|[N=n]) = \Sigma$

5.
```
function y=S(lambda,p)
    N= grand(1,1,'poi',lambda)
    y= grand(1,1,'bin', N, p)
enfunction
```

Copie anonyme - n°anonymat : 860649

Code épreuve : 297 | Nombre de pages : 21 | Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques S

Emplacement QR Code

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Problème

1. $f(x) \underset{0}{\sim} x$ donc $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$

or $\lim\limits_{1} \ln x = 0$

donc par composition $\lim\limits_{0} \ln\left(\frac{f(x)}{x}\right) = 0$

donc $\lim\limits_{0} \ln(f(x)) - \ln(x) = 0$

or $\lim\limits_{0} \ln x = -\infty$ donc $\lim \frac{\ln(f(x)) - \ln(x)}{\ln(x)} = 0$

donc $\lim\limits_{0} \frac{\ln(f(x))}{\ln(x)} - 1 = 0$

donc $\lim\limits_{0} \frac{\ln(f(x))}{\ln(x)} = 1$ donc $\boxed{\ln f(x) \underset{0}{\sim} \ln(x)}$

Partie 1

2. a) $\forall x \in \mathbb{R}$ $sh(-x) = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2} = -\frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = -sh(x)$

donc $\boxed{\text{sh est impaire}}$

2.b) par somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$
sh est dérivable sur $\mathbb{R}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

et $\forall x \in \mathbb{R}$ $sh'(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = ch(x)$

or $\forall x \in \mathbb{R}$ $e^x > 0$ et $e^{-x} > 0$ donc $ch(x) > 0$
$sh'(x) > 0$

donc sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

donc

x	$-\infty$	0	$+\infty$
sh	$\nearrow$	0	$\nearrow$

2.c) $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$ donc $e^{-x} - 1 \underset{0}{\sim} -x$

or $\forall x \in \mathbb{R}$ $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \dfrac{e^x - 1 - (e^{-x} - 1)}{2}$

donc $sh(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{2}(x - (-x))$

donc $\boxed{sh(x) \underset{0}{\sim} x}$

3.a) $\forall x \in \mathbb{R}$ $ch(-x) = \dfrac{e^{-x} + e^x}{2} = ch(x)$

donc $\boxed{\text{ch est paire}}$

3.b) par somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$
ch est dérivable sur $\mathbb{R}$

et $\forall x \in \mathbb{R}$ $ch'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = sh(x)$

or

x	$-\infty$		0		$+\infty$
sh		$-$	0	$+$	

donc

x	$-\infty$	0	$+\infty$
ch	$\searrow$	1	$\nearrow$

car $ch(0) = 1$

4. $\forall x \in \mathbb{R} \quad (ch(x))^2 = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2$

$$= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4}$$

$$= \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{4} + \frac{1}{2}$$

et $(sh(x))^2 = \frac{(e^x - e^{-x})^2}{4}$

$$= \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4}$$

$$= \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{4} - \frac{1}{2}$$

donc $ch(x)^2 - sh(x)^2 = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{4}(1-1) + \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)$

donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad (ch(x))^2 - (sh(x))^2 = 1}$

Partie 2

5\. a) comme étudié dans les questions précédentes

$\forall x \in \mathbb{R} \ ch(x) > 0$ donc $ch(x) \neq 0$

donc $\boxed{th = \frac{sh}{ch} \text{ est bien définie}}$

5\. b) $\forall x \in \mathbb{R} \quad th(x) = \frac{sh(-x)}{ch(-x)}$ or $sh(-x) = -sh(x)$ et $ch(-x) = ch(x)$

donc $th(-x) = -\frac{sh(x)}{ch(x)} = -th(x)$

donc $\boxed{th \text{ est impaire}}$

5\. c) par quotient de fonction dérivables dont le dénominateur ne s'annulle pas sur $\mathbb{R}$
th est dérivable sur $\mathbb{R}$

et $\forall x \in \mathbb{R} \quad th'(x) = \frac{sh'(x)ch(x) - ch'(x)sh(x)}{(ch(x))^2}$

$$= \frac{ch^2(x) - sh^2(x)}{ch^2(x)} = \frac{1}{ch^2(x)}$$

donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad Th'(x) > 0$ et $\boxed{Th \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}}$

d) or $Th(0) = 0$

et $\forall x \in \mathbb{R} \quad Th(x) = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$

or $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ donc $e^{x} - e^{-x} \underset{+\infty}{\sim} e^{x}$

et $e^{x} + e^{-x} \underset{+\infty}{\sim} e^{x}$

donc $\dfrac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}} \underset{+\infty}{\sim} 1$

donc $\lim\limits_{+\infty} Th(x) = 1$ et come Th impair $\lim\limits_{-\infty} Th = -1$

donc

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Th	-1	$\nearrow 0 \nearrow$	1

6. a) on pose $a = 1$ et $b = 1$

et $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \dfrac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} + \dfrac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} = \dfrac{e^{-x}(1 + e^{-x}) + e^{-x}(1 - e^{-x})}{1 - e^{-2x}}$

$$= \frac{e^{-x} + e^{-2x} + e^{-x} - e^{-2x}}{1 - e^{-2x}}$$

$$= \frac{2e^{-x}}{1 - e^{-2x}} = \frac{1}{\frac{e^{x} - e^{-x}}{2}} = \frac{1}{sh(x)}$$

donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \dfrac{1}{sh(x)} = \dfrac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} + \dfrac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}}$

6. b) $\boxed{\ln\left(Th\left(\frac{x}{2}\right)\right) \text{ est une primitive}}$ car dérivable par composition

et $\forall x \in \mathbb{R} \quad \ln\left(Th\left(\frac{x}{2}\right)\right)' = \dfrac{1}{2} \dfrac{Th'\left(\frac{x}{2}\right)}{Th\left(\frac{x}{2}\right)} = \dfrac{1}{2} \dfrac{1}{ch\left(\frac{x}{2}\right) sh\left(\frac{x}{2}\right)} = \dfrac{1}{2} \dfrac{4}{e^{x} - e^{-x}} = \dfrac{1}{sh(x)}$

Copie anonyme - n°anonymat : 860649

Code épreuve : 297 | Nombre de pages : 21 | Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques S

Emplacement QR Code

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

7. d'après la question 2.c) $sh(x) \underset{0}{\sim} x$ donc $sh(\frac{x}{2}) \sim \frac{x}{2}$

et $ch(0) = 1$

donc $th(\frac{x}{2}) = \frac{sh(x)}{ch(x)} \underset{0}{\sim} \frac{x}{2}$

or d'après les préliminaires : si $f(x) \underset{0}{\sim} x$

$\ln(f(x)) \sim \ln(x)$

donc $\ln(th(\frac{x}{2})) \underset{0}{\sim} \ln(x) - \ln(2)$

or $\lim\limits_{0} \ln x = -\infty$ donc $\ln(x) - \ln(2) \underset{0}{\sim} \ln(x)$

Partie 3

donc $\boxed{\ln(th(\frac{x}{2})) \underset{0}{\sim} \ln(x)}$

8. a) $\forall \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [k, k+1], \forall x \in \mathbb{R}_+^*$.

$0 < k \leq t \leq k+1$

$0 < xk \leq xt \leq x(k+1)$ car $x > 0$

donc $0 < sh(xk) \leq sh(xt) \leq sh(x(k+1))$

par croissance de Sh et comme $\forall x > 0$ $Sh(x) > 0$

donc $\frac{1}{sh(x(k+1))} \leq \frac{1}{sh(xt)} \leq \frac{1}{sh(xk)}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

or $t \mapsto \frac{1}{sh(tx)}$ est continue sur $[k, k+1]$

donc par croissance de l'intégrale avec les bornes dans le bon sens

$$\frac{1}{sh((k+1)x)} \int_k^{k+1} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{sh(tx)} dt \leq \frac{1}{sh(kx)} \int_k^{k+1} dt$$

or $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $\int_k^{k+1} dt = 1$

donc $\boxed{\forall x > 0, \forall k \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{sh((k+1)x)} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{sh(tx)} dt \leq \frac{1}{sh(kx)}}$

8. b) donc par somme : $\forall x > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{sh(tx)} dt \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{sh(kx)}$$

or $\sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{sh(tx)} dt = \int_1^{n+1} \frac{1}{sh(tx)} dt$ par relation de Chasles

donc $\forall x > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ $\int_1^{n+1} \frac{1}{sh(tx)} dt \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{sh(kx)}$

et de même $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{sh(x(k+1))} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{sh(xt)} dt$

donc $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{sh(xk)} \leq \int_1^{n} \frac{1}{sh(xt)} dt$

et $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{sh(xk)} \leq \int_1^{n} \frac{1}{sh(xt)} dt + \frac{1}{sh(x)}$

pour conclure : $\boxed{\forall x>0,\ \forall n\in\mathbb{N}^*}$

$$\boxed{\int_1^{n+1}\frac{1}{sh(tx)}\,dt \le \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{sh(kx)} \le \int_1^{n}\frac{1}{sh(tx)} + \frac{1}{sh(x)}}$$

9. a) $\forall x>0,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$ $\quad \dfrac{1}{sh(nx)} = \dfrac{2}{e^{nx}-e^{-nx}}$

or $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-nx} = 0$

donc $\dfrac{1}{sh(nx)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{e^{nx}}$

or $\forall x>0$ $\lim\limits_{n\to+\infty}(xn)^2\dfrac{2}{e^{nx}} = 0$ par croissance comparée

donc $\dfrac{2}{e^{nx}} = o\left(\dfrac{1}{xn^2}\right)$

or la série de Riemann $\left(\sum\limits_{n\geq1}\dfrac{1}{n^2}\right)$ converge avec $2>1$

donc $\left(\sum\limits_{n\geq1}\dfrac{1}{(xn)^2}\right)$ converge

et $\forall x>0$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $\quad \dfrac{2}{e^{nx}}>0,\ \dfrac{1}{(xn)^2}>0$

donc par critère de négligeabilité

$\left(\sum\limits_{n\geq1}\dfrac{2}{e^{nx}}\right)$ converge

or $\dfrac{2}{e^{nx}} \sim \dfrac{1}{sh(nx)}$ et $\forall x>0, \forall n>0$ $\dfrac{1}{sh(nx)}>0,\ \dfrac{2}{e^{nx}}>0$

donc par critère d'équivalence

$\left(\sum\limits_{n\geq1}\dfrac{1}{sh(nx)}\right)$ converge

donc $\boxed{\text{la série de terme générale } \dfrac{1}{sh(nx)} \text{ converge}}$

comme $x \mapsto \ln\left(\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right)$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{\operatorname{sh}(x)}$

alors $\displaystyle\int_1^n \frac{1}{\operatorname{sh}(tx)}\,dt = \left[\frac{1}{x}\ln\left(\operatorname{th}\left(\frac{xt}{2}\right)\right)\right]_1^n$

or $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{x}\ln\left(\operatorname{th}\left(\frac{xn}{2}\right)\right) = 0$ par composition

car $\displaystyle\lim_{+\infty} \operatorname{th} = 1$ et $\displaystyle\lim_{1} \ln = 0$

donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_1^n \frac{1}{\operatorname{sh}(tx)}\,dt = \lim_{n \to +\infty} \int_1^{n+1} \frac{1}{\operatorname{sh}(tx)}\,dt = -\frac{1}{x}\ln\left(\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right)$

or $\left(\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\operatorname{sh}(kx)}\right)$ converge donc par passage à la limite :

$$\boxed{\forall x > 0 \quad -\frac{1}{x}\ln\left(\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{sh}(kx)} \leq -\frac{1}{x}\ln\left(\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \frac{1}{\operatorname{sh}(x)}}$$

9.c) donc $\forall x > 0$

$$\frac{\ln\left(\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{\ln x} \leq \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{sh}(kx)}}{-\frac{\ln x}{x}} \leq \frac{\ln\left(\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{\ln(x)} - \frac{x}{\operatorname{sh}(x)\ln(x)}$$

or $\operatorname{sh}(x) \underset{0}{\sim} x$ donc $\displaystyle\lim_{0} \frac{x}{\operatorname{sh} x} = 1$

donc $\displaystyle\lim_{0} \frac{x}{\operatorname{sh}(x)\ln(x)} = 0$

et $\ln\left(\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right) \underset{0}{\sim} \ln x$ donc $\displaystyle\lim_{0} \frac{\ln\left(\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{\ln x} = 1$

donc par encadrement : $\displaystyle\lim_{0} \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{sh}(kx)}}{-\frac{\ln x}{x}} = 1$

donc $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{sh}(nx)} \underset{0}{\sim} -\frac{\ln x}{x}}$

Copie anonyme - n°anonymat : 860649

Code épreuve : 297 | **Nombre de pages :** 21 | **Session :** 2022

Épreuve de : Mathématiques S

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Emplacement QR Code

10.
```
n = input('entrez une valeur pour n: ')
x = input('entrez une valeur pour x: ')
S = 0
for k=1:n
S = S + 2/( exp(k * x) - exp(-k * x))
end
disp(S)
```

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

/