Code épreuve : 297 | Nombre de pages : 17 | Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques S EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 1 :

1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) \geq 0$ par définition de f et de F.

$f \in C^0(\mathbb{R})$ et $F \in C^0(\mathbb{R})$, donc par quotient de fonctions qui le sont, $g \in C^0(\mathbb{R})$ (sauf peut être en un nombre fini de points où f n'est pas continue).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx = \int_{-\infty}^{a} \frac{f(x)}{F(a)}dx = \frac{1}{F(a)} \times F(a) = 1 \text{ car } F(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$$

par définition.

Ainsi, g est bien une densité.

2) ⓐ $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$G(x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)dt = \begin{cases} \frac{1}{F(a)} \times F(x) & \text{si } x \leq a \\ 1 = \frac{F(a)}{F(a)} & \text{si } x > a. \end{cases}$$

ⓑ $P_{[X\leq a]}(X \leq x) = \dfrac{P([X\leq a] \cap [X \leq x])}{P([X\leq a])}$

$\forall x \in \mathbb{R}$,

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Mais si $x \leq a$, $[X \leq a] \cap [X \leq x] = [X \leq x]$

et si $x > a$, $[X \leq a] \cap [X \leq x] = [X \leq a]$.

Donc $P_{[X \leq a]}[X \leq x] = \begin{cases} \dfrac{P(X \leq x)}{P(X \leq a)} = \dfrac{F(x)}{F(a)} & \text{si } x \leq a \\ \dfrac{P(X \leq a)}{P(X \leq a)} = 1 & \text{si } x > a. \end{cases}$

Donc on a bien $\forall x \in \mathbb{R}$, $G(x) = P_{[X \leq a]}(X \leq x)$

3) a) $\forall x \in \mathbb{R}$.

si $x > a$, $G_n(x) = 1$.

si $x \leq a$, $G_n(x) = P(M_n \leq x)$
$= P\left(\bigcap_{i=1}^{n} Y_n \leq x\right)$

indépendance des Y_n. $= P(Y \leq x)^n = G(x)^n = \dfrac{F(x)^n}{F(a)^n}$

Donc $G_n(x) = \begin{cases} G(x)^n = \left(\dfrac{F(x)}{F(a)}\right)^n & \text{si } x \leq a. \\ 1 \text{ si } x > a \end{cases}$

b) Comme $x \leq a$, $\dfrac{F(x)}{F(a)} < 1$ donc $G_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ $\forall x \leq a$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} G_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ 1 & \text{si } x \geq a. \end{cases}$

Donc en notant Z la variable aléatoire certaine égale à a

$M_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Z$

4) a)

$\forall x \in \mathbb{R}$:

$$
\begin{aligned}
P(Z_n \leq x) &= P(n(a - M_n) \leq x) \\
&= P\left(a - M_n \leq \frac{x}{n}\right) \\
&= P\left(-M_n \leq \frac{x}{n} - a\right) \\
&= P\left(M_n \geq a - \frac{x}{n}\right) = 1 - G_n\left(a - \frac{x}{n}\right)
\end{aligned}
$$

$a - \frac{x}{n} > a \iff -\frac{x}{n} > 0 \iff x < 0$.

Donc $H_n(x) = \begin{cases} 1 - 1 = 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \left(\dfrac{F(a - \frac{x}{n})}{F(a)}\right)^n & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$

b) $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad \dfrac{F(a - \frac{x}{n})}{F(a)} \underset{n \to +\infty}{=} \dfrac{F(a)}{F(a)} - \dfrac{f(a - \frac{0}{n})}{F(a)} \times \dfrac{x}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$

$$= 1 - \frac{f(a)}{F(a)} \times \frac{x}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

c) $\cancel{1 - \left(\dfrac{F(a - \frac{x}{n})}{F(a)}\right)^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1 - 1 \quad \text{car} \quad 1 - \dfrac{f(a)}{F(a)} \times \dfrac{x}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1}$

$1 - \left(\dfrac{F(a - \frac{x}{n})}{F(a)}\right)^n = 1 - \exp\left(n \ln\left(\dfrac{F(a - \frac{x}{n})}{F(a)}\right)\right)$

Mais $\ln\left(\dfrac{F(a - \frac{x}{n})}{F(a)}\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ln\left(1 - \dfrac{f(a)}{F(a)} \times \dfrac{x}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{f(a)}{F(a)} \times \dfrac{x}{n}$

Donc $1-\left(\frac{F(a-\frac{x}{n})}{F(a)}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1-\exp\left(n\times\frac{(-f(a))}{F(a)}\frac{x}{n}\right) = 1-\exp\left(-x\frac{f(a)}{F(a)}\right)$.

Et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} H_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ 1-e^{-x\frac{f(a)}{F(a)}} & \text{si } x\geq 0. \end{cases}$

Donc $H_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Z$ où Z suit une loi exponentielle de paramètre $\frac{f(a)}{F(a)}$.

Exercice 2 :

1) $f\in F$ si $\forall x\in\mathbb{R}^3$ $\|f(x)\|\leq 0$. Comme $\|f(x)\|\geq 0$, on a $\|f(x)\|=0$

ce qui implique que $f(x)=0$.

Donc si $K=0$, F est l'ensemble des endomorphismes nuls de $\mathbb{R}^3$.

2)

a) $A^2 = \frac{1}{(27)^2}\times\begin{pmatrix}-1&8&-4\\8&-1&-4\\-4&-4&-7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&8&-4\\8&-1&-4\\-4&-4&-7\end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{(27)^2}\begin{pmatrix}81&0&0\\0&81&0\\0&0&81\end{pmatrix} = \frac{1}{(27)^2}\times 81 I_3.$$

Donc $P = X^2 - \frac{81}{(27)^2}$ est polynome annulateur de A

$$= X^2 - \frac{81}{9^2 3^2} = X^2 - \frac{1}{9}.$$

Donc $Sp(A)\subset\left\{\frac{-1}{\sqrt{9}}, \frac{1}{\sqrt{9}}\right\} = \left\{\frac{-1}{3}, \frac{1}{3}\right\}$

Code épreuve : 297 | Nombre de pages : | Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques S EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

b) $\cancel{A - \frac{1}{\sqrt{9}} I_3 = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} -1-3\sqrt{9} & 8 & -4 \\ 8 & -1-3\sqrt{9} & -4 \\ -4 & -4 & -7-3\sqrt{9} \end{pmatrix}}$

A est une matrice symétrique réelle, donc est diagonalisable.

$$A + \frac{1}{\sqrt{9}} I_3 = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} -1+9 & 8 & -4 \\ 8 & -1+9 & -4 \\ -4 & -4 & -7+9 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 8 & 8 & -4 \\ 8 & 8 & -4 \\ -4 & -4 & 2 \end{pmatrix} \qquad C_1 = C_2 \text{ et } C_3 = -\frac{1}{2} C_2.$$

Donc $\text{rang}(A + \frac{1}{3} I_3) = 1$ et donc $\dim(E_{-\frac{1}{3}}(A)) = 2$ par théorème du rang.

Comme A est diagonalisable et que $\dim(E_{-\frac{1}{3}}(A)) \neq 3$, on en déduit que A a une autre valeur propre, qui est forcément $\frac{1}{3}$.

Donc $Sp(A) = \left\{-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right\}$

c) La matrice de f dans B qui est une base orthonormale, est symétrique réelle, donc f est un endomorphisme symétrique et donc ses sous-espaces propres sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathbb{R}^3$ par définition.

d) Soit $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $x = y + z$ où $y \in \ker(f + \frac{1}{3} Id)$

$z \in \ker(f - \frac{1}{3} Id)$.

$\|f(x)\|^2 = \langle f(y+k), f(y+k) \rangle$ f est symétrique.

$= \langle y+k, f^2(y+k) \rangle$ bilinéarité du produit scalaire.

$= \langle y, f^2(y+k) \rangle + \langle k, f^2(y+k) \rangle$

$= \langle f(y), f(y+k) \rangle + \langle f(k), f(y+k) \rangle$

$= \frac{1}{3} \langle y, f(y+k) \rangle - \frac{1}{3} \langle k, f(y+k) \rangle$

$= \frac{1}{9} \langle y, y+k \rangle + \frac{1}{9} \langle k, y+k \rangle = \frac{1}{9} \langle x, x \rangle = \frac{1}{9} \|x\|^2$.

Donc $\|f(x)\| = \frac{1}{|3|} \|x\|$ donc $\exists k \in [0, 1[$ tel que $\|f(x)\| \leq k \|x\|$.

(par exemple $k = \frac{3}{9}$), donc $f \in F$.

3) a) $\|Id(x)\| = \|x\|$. Or, $k \in [0,1[$, donc $k \neq 1$, donc $Id \notin F$.

b) Soit $f, g \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

~~$\|f(x) + \lambda g(x)\|^2 = \langle f(x) + \lambda g(x), f(x) + \lambda g(x) \rangle = \|f(x)\|^2 + 2\lambda \langle f(x), g(x) \rangle + \lambda^2 \|g(x)\|^2$~~

~~$\|f(x) + \lambda g(x)\| = \sqrt{\|f(x)\|^2 + 2\lambda \langle f(x), g(x) \rangle + \lambda^2 \|g(x)\|^2}$~~

Δ

~~Par Cauchy Schwarz: $\|f(x)$~~

$\|f(x)\lambda\| \leq k \times \lambda \times \|x\|$. Or ceci est vrai $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, donc $k\lambda$ peut être ≥ 1, donc F n'est pas un espace vectoriel.

6/9

(c) Soit $f \in F$. et soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}^3$, $\exists k \in [0;1[$ tel que $\|f(x)\| \leq k\|x\|$.

(d) Si f est un automorphisme de F.

4) (a) soit p un projecteur non nul. $Sp(p) = \{0;1\}$

Comme $k \neq 1$, on ne peut avoir $\|p(x)\| = \|x\|$ donc $1 \notin Sp(p)$.

Donc F ne contient aucun projecteur que le projecteur nul.

(b)

5) (a) $\forall x \in \mathbb{R}^3$:

$\|f(x)$

5)

a) $A^2 = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

$A^3 = \frac{1}{6^3}\begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6^3}\begin{pmatrix} 0 & -18 & 18 \\ -18 & -9 & 0 \\ 18 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \frac{9}{36}A = \frac{1}{4}A.$

Donc $P = X^3 - \frac{1}{4}X$ est polynome annulateur de A

$= X(X^2 - \frac{1}{4})$

Donc $Sp(A) \subset \{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\}$

b) $A + \frac{1}{2}I_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ $C_1 = \frac{C_3}{2} - C_2$. donc $-\frac{1}{2} \in Sp(A)$.

$A - \frac{1}{2}I_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ $C_1 = \frac{C_2}{2} - C_3$ donc $\frac{1}{2} \in Sp(A)$

Comme $Sp(A) \subset]-1, 1[$, $f \in F$ par la 5) b)

$\max Sp(A) = \frac{1}{2}$, donc $\forall x \in \mathbb{R}^3$, $\|f(x)\| \leq \frac{1}{2}\|x\|$ par la 5) a).

c) A=[0,-2,2;-2,-1,0;2,0,1]/6
K=max([-1/2;1/2])
disp(K)

Code épreuve : 297 | Nombre de pages : 17 | Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

Exercice 3 :

1) a) $S(\Omega) = \mathbb{N}$ car $N(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $X_i(\Omega) = \{0, 1\}$ $\forall i \in [\![1, N]\!]$

b) Les X_i ont une espérance, donc par linéarité de l'espérance, S en possède une.

En effet $E(S) = \sum_{i=1}^{N} E(X_i)$.

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, par stabilité par l'addition des lois de Bernoulli de même paramètre, et par indépendance des X_i, $S_n \hookrightarrow B(n, p)$ (loi binomiale de paramètre n et p).

Donc $E(S_n) = np$.

3) $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(S=k) = \sum_{n=k}^{+\infty} P_{[N=n]}(S_n = k) \times P(N=n)$ (par la formule des probas totales sur le système complet d'événements $\{N=n, n \in \mathbb{N}^*\}$)

$= \sum_{n=k}^{+\infty} P(S_n = k) P(N=n)$

La probabilité que $S=k$, c'est l'ensemble des probabilités où $N=i$ $(i \geq k)$ fois la probabilité que $S_n = k$.
Car S ne peut être égal à k si N n'est pas au minimum égal à k.

4) a) $N-1(\Omega)=\mathbb{N}$ donc $N(\Omega)=\mathbb{N}^*$.

$\forall k\in\mathbb{N}$, ~~$P(N-1=k) = P(N$~~

$$P(N=k)=P(N-1=k-1)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

b) $\forall k\in\mathbb{N}^*$.

$$P(S=k)=\sum_{n=k}^{+\infty} P(S_n=k)\,P(N=n) = \sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\times e^{-\lambda}\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$=\frac{e^{-\lambda}p^k\lambda^{k-1}}{k!}\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{n!}{(n-k)!}\times\frac{(\lambda q)^{n-k}}{(n-1)!}$$

$$=\frac{e^{-\lambda}p^k\lambda^{k-1}}{k!}\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{n(\lambda q)^{n-k}}{(n-k)!}$$

Donc $P(S=k)=\dfrac{p^k\lambda^{k-1}e^{-\lambda}}{k!}\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{n(\lambda q)^{n-k}}{(n-k)!}$

$i=n-k \to$ $=\dfrac{p^k\lambda^{k-1}e^{-\lambda}}{k!}\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{(i+k)(\lambda q)^i}{i!}$

$$=\frac{p^k\lambda^{k-1}e^{-\lambda}}{k!}\left(\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{(\lambda q)^i}{(i-1)!}+k\,e^{\lambda q}\right)$$

$$=\frac{p^k\lambda^{k-1}e^{-\lambda}}{k!}\left(\lambda q\,e^{\lambda q}+k\,e^{\lambda q}\right) = \frac{p^k\lambda^{k-1}}{k!}(\lambda q+k)\,e^{\lambda q-\lambda}$$

$$=\frac{p^k\lambda^{k-1}}{k!}(\lambda q+k)\,e^{-\lambda p}$$

car $\lambda q-\lambda=\lambda-\lambda p-\lambda$
$=-\lambda p$.

ⓒ $\sum_{k=0}^{+\infty} P(S=k) = \underline{1} \iff P(S=0) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} P(S=k)$

Mais $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{p^k \lambda^{k-1}}{k!}(\lambda q + k)e^{-\lambda p} = e^{-\lambda p}\left(\lambda q \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{p^k \lambda^{k-1}}{k!} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{p^k \lambda^{k-1}}{(k-1)!}\right)$

$= e^{-\lambda p}\left(q \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{p^{k} \lambda^{k}}{k!} + p e^{\lambda p}\right)$

$\cancel{= e^{-\lambda p}\left(\lambda q e^{\lambda p} - \lambda q + p e^{\lambda p}\right)}$

Donc $P(S=0) = 1 - q e^{-\lambda p}$ $\qquad = e^{-\lambda p}\left(q e^{\lambda p} - q + p e^{\lambda p}\right) = q - q e^{-\lambda p} + p$

$= 1 - q e^{-\lambda p}$

ⓓ $E(S \mid [N=n]) = \sum_{k=1}^{+\infty} k P_{[N=n]}(S=k)$

$= \sum_{k=1}^{n} k \times \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

$= \sum_{k=1}^{n} n \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k} = pn \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} q^{n-k} =$

5)
```
function y = S(lambda,p)
    N = grand(1,1,'poi', lambda) - 1
    y = grand(1,1,'bin',p,N)
endfunction
```

Problème :

1) $\frac{\ln(f(x))}{\ln(x)} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} \frac{\ln(x)}{\ln(x)} = 1$. donc $\ln(f(x)) \underset{0^+}{\sim} \ln(x)$.

Partie 1 :

2) a) $\forall x \in \mathbb{R}, sh(-x) = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2} = -sh(x)$, donc sh est impaire.

b) $\forall x \in \mathbb{R}, sh'(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} > 0$ donc

x	$-\infty$	$+\infty$
$sh(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

c) $sh(x) = \frac{e^{x}(1 - e^{-2x})}{2}$. comme $-2x \underset{x\to 0^+}{\to} 0$, $1-e^{-2x} \underset{0^+}{\sim} 2x$.

et donc $sh(x) \underset{0}{\sim} xe^{x}$.

3) a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $ch(-x) = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = ch(x)$, donc ch est paire.

b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $ch'(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$.

Donc

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$ch'(x)$	$-$		$+$
$ch(x)$	$+\infty$ ↘	1	↗ $+\infty$

4) $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$(ch(x))^2 - (sh(x))^2 = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}}{4}$$

$$= \frac{4}{4} = 1$$

12/20

Code épreuve : 297	Nombre de pages : 17	Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques S EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie 2 :

5) a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $ch(x) \neq 0$ donc $th(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)}$ est une fonction bien définie sur $\mathbb{R}$.

b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $th(-x) = \frac{sh(-x)}{ch(-x)} = \frac{-sh(x)}{ch(x)} = -th(x)$, donc th est impaire.

c) $\forall x \in \mathbb{R}$, $th'(x) = \frac{sh'(x)ch(x) - sh(x)ch'(x)}{ch(x)^2}$

$= \frac{ch(x)^2 - sh(x)^2}{ch(x)^2} = \frac{1}{ch(x)^2} \geq 0$.

Donc la fonction th est croissante sur $\mathbb{R}$.

d)

x	$-\infty$	$+\infty$
$th(x)$	-1 ↗	1

car $th(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
$= \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$

$\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} \underset{-\infty}{\sim} \frac{-e^{-2x}}{e^{-2x}} = -1$ et $\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{1} = 1$

6) a) on veut $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{2}{e^x - e^{-x}} = \frac{a e^{-x}}{1 - e^{-x}} + \frac{b e^{-x}}{1 + e^{-x}} = \frac{a(e^{-x} + e^{-2x}) + b(e^{-x} - e^{-2x})}{1 - e^{-2x}}$

$1 - e^{-2x} = e^{-x}(e^{x} - e^{-x})$

Donc $\frac{2}{(e^x - e^{-x})} = \frac{a(e^{-x} + e^{-2x}) + b(e^{-x} - e^{-2x})}{e^{-x}(e^{x} - e^{-x})}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Donc $2 = \dfrac{a(e^{-x} + e^{-2x}) + b(e^{-x} - e^{-2x})}{e^{-2x}}$

$\Leftrightarrow 2 = a(1+e^{-x}) + b(1-e^{-x})$

$\Leftrightarrow a = b = 1$.

6) J'ai l'impression que l'énoncé de la question n'est pas complet ?

Une primitive de $\dfrac{1}{sh(x)}$ est $ln(1-e^{-x}) - ln(1+e^{-x})$

7) $th\left(\frac{x}{2}\right) = \dfrac{sh\left(\frac{x}{2}\right)}{ch\left(\frac{x}{2}\right)} = \dfrac{e^{x/2} - e^{-x/2}}{e^{x/2} + e^{-x/2}} = \dfrac{e^{x/2}(1-e^{-x})}{e^{x/2}(1+e^{-x})} = \dfrac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}} \underset{0}{\sim} \dfrac{x}{2}$.

car $1-e^{-x} \underset{0}{\sim} 1-x$ et $1+e^{-x} \underset{0}{\sim} 2$.

Donc par la question 1, si f est th, on a bien que $ln\left(th\left(\frac{x}{2}\right)\right) \underset{0^+}{\sim} ln(x)$.

Partie 3 :

8) a) $\forall t \in [k; k+1]$, par croissance de sh et car $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$sh(x(k+1)) \geq sh(tx) \geq sh(xk)$; $sh(x) \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}_+^*$.

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{sh(x(k+1))} \leq \dfrac{1}{sh(tx)} \leq \dfrac{1}{sh(xk)}$

$\Rightarrow \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dt}{sh(x(k+1))} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{sh(tx)} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{sh(xk)}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{sh((k+1)\alpha)} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{sh(t\alpha)} \leq \frac{1}{sh(k\alpha)}$$

(b) en sommant pour k allant de 1 à n le membre de droite :

$$\sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{dt}{sh(t\alpha)} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{sh(k\alpha)} \Leftrightarrow \int_1^{n+1} \frac{dt}{sh(t\alpha)} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{sh(k\alpha)}$$

en faisant de même avec le membre de gauche avec k allant de 1 à n-1 :

$$\int_1^{n} \frac{dt}{sh(t\alpha)} \geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{sh((k+1)\alpha)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{sh(k\alpha)} - \frac{1}{sh(\alpha)}$$

$$\Leftrightarrow \int_1^{n} \frac{dt}{sh(t\alpha)} + \frac{1}{sh(\alpha)} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{sh(t\alpha)}$$

Ainsi, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\int_1^{n+1} \frac{dt}{sh(t\alpha)} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{sh(k\alpha)} \leq \int_1^{n} \frac{1}{sh(t\alpha)} dt + \frac{1}{sh(\alpha)}$

9) (a) $$\int_1^{n+1} \frac{dt}{sh(t\alpha)} = \Big[-\ln(1+e^{-\alpha}) + \ln(1-e^{-\alpha})\Big]_1^{n+1} = -\ln(1+e^{-(n+1)}) + \ln(1-e^{-(n+1)}) + \ln(1+e^{-1}) - \ln(1-e^{-1})$$

$$= \ln\left(\frac{1-e^{-(n+1)}}{1+e^{-(n+1)}}\right) + \ln\left(\frac{1+e^{-1}}{1-e^{-1}}\right)$$

Or, $\displaystyle\frac{1-e^{-(n+1)}}{1+e^{-(n+1)}} = \frac{e^{n+1}-1}{e^{n+1}+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{n+1}}{e^{n+1}} = 1.$

Donc $\displaystyle\int_1^{n+1} \frac{dt}{sh(t\alpha)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ln\left(\frac{1+e^{-1}}{1-e^{-1}}\right)$

Par théorème des gendarmes, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{Sh(nx)}$ admet donc une limite finie et est donc convergente.

(b) $\forall x > 0$:

(c) $\frac{-x}{\ln(x)} \times \frac{-1}{x} \ln\left(th\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \underbrace{\frac{\ln\left(th\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{\ln(x)} \underset{0}{\sim} \frac{\ln(x)}{\ln(x)}}_{\text{par la question 7)}} = 1$

et $\underbrace{\frac{-x}{\ln(x)} \times \frac{1}{Sh(x)} \underset{0^+}{\sim}}_{\text{question 2) (c)}} \frac{-x}{\ln(x)} \times \frac{1}{x e^{x}} = \frac{-1}{\ln(x) e^{x}} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 0$ car $\ln(x) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} -\infty$.

Ainsi, par le théorème des gendarmes, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{Sh(nx)} \times \left(\frac{-x}{\ln(x)}\right) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 1$

Donc $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{Sh(kx)} \underset{0^+}{\sim} \frac{-\ln(x)}{x}$.

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 17

Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques S EDHIC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

10)
```
n=input(' entrez une valeur pour n:')
x=input(' entrez une valeur strictement positive pour x:')
S=0
for k=1:n
S=S+1\((exp(k*x) -exp(-k*x))\2)
end
disp(S)
```

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE