Copie anonyme - n°anonymat : 551293

Code épreuve : 297	Nombre de pages : 28	Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques S EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 1 :

Q1. On a :

$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0$

D'où :

$\forall a \in \mathbb{R},\ \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx > 0$ par positivité de l'intégrale

d'où : $F(a) > 0$

Donc : $x \mapsto \frac{f(x)}{F(a)}$ est bien définie sur $]-\infty, a]$

et la fonction nulle sur $]a, +\infty[$

Donc :

g est bien définie sur $\mathbb{R}$

On a :

- $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) \geq 0$
- g est continue sur $]-\infty, a]$ (car f l'est) et sur $]a, +\infty[$ donc sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$
- Enfin, on a :

$\forall (A, B) \in]-\infty, a] \times]a, +\infty[,\ \int_{A}^{B} g(x)\,dx = \int_{A}^{a} g(x)\,dx$ (g nulle sur $]a, B]$)

$= \int_{A}^{a} \frac{f(x)}{F(a)}\,dx$

$= \frac{1}{F(a)} \left[F(x)\right]_{A}^{a}$

$= \frac{F(a) - F(A)}{F(a)}$

Or : $F(A) \xrightarrow[A \to +\infty]{} 0$ d'où :

$$\int_A^{+\infty} g(x)\,dx \xrightarrow[A \to -\infty]{} \underbrace{\frac{F(a)}{F(a)}}_{=1}$$

Donc :

g peut être considérée comme densité d'une certaine variable aléatoire (VAR) notée Y

Q2.a. On a :

$$\forall x \in]-\infty, a], \; G(x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)\,dt = \frac{F(x)}{F(a)}$$

D'où :

$$G : x \mapsto \begin{cases} \frac{F(x)}{F(a)} & \text{si } x \leqslant a \\ 1 & \text{si } x > a \end{cases}$$

Q2.b. D'après la formule de Bayes, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; \mathbb{P}_{(X \leqslant a)}(X \leqslant x) = \frac{\mathbb{P}(X \leqslant a, X \leqslant x)}{\mathbb{P}(X \leqslant a)} = \begin{cases} \frac{F(x)}{F(a)} & \text{si } x \leqslant a \\ 1 & \text{si } x > a \end{cases}$$

car : $\mathbb{P}(X \leqslant a, X \leqslant x) = \begin{cases} \mathbb{P}(X \leqslant x) \text{ si } x \leqslant a \\ \mathbb{P}(X \leqslant a) \text{ si } x > a \end{cases}$

D'où : $\forall x \in \mathbb{R}, \; G(x) = \mathbb{P}_{(X \leqslant a)}(X \leqslant x)$

Q3.a. Puisque, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $Y_i(\Omega) \subset]-\infty, a]$, on a :

$$M_n(\Omega) \subset]-\infty, a]$$

D'où :

- $\forall x > a, \quad G_n(x) = 1$
- $\forall x \leqslant a, \quad G_n(x) = \mathbb{P}(\max(Y_1, \dots, Y_n) \leqslant x)$

$$= \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} (Y_k \leqslant x)\right)$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \underbrace{\mathbb{P}(Y_k \leqslant x)}_{= G(x)}$$ (indépendance des évènements)

D'où :

$$G_n = G^n \text{ sur } \mathbb{R}$$

Donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; G_n(x) = \begin{cases} \left(\frac{F(x)}{F(a)}\right)^n & \text{si } x \leqslant a \\ 1 & \text{si } x > a \end{cases}$$

Q3.b. On a :

$\forall x < a, \quad F(x) < F(a)$ (stricte croissance de F)

D'où : $\forall x < a, \quad 0 < \frac{F(x)}{F(a)} < 1$

Donc : $\forall x < a, \left(\frac{F(x)}{F(a)}\right)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ d'où : $G_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

De plus : $\forall x > a, \quad G_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

Et : $G_n(a) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

Donc : $M_n \xrightarrow{\mathcal{L}} 0$

Q4.a. On a : $M_n(\Omega) \subset]-\infty, a]$ d'où : $(a-M_n)(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$

D'où : $Z_n(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$

Donc :

- $\forall x \in \mathbb{R}_-^*, \ H_n(x) = 0$
- $\forall x \in \mathbb{R}_+, \ H_n(x) = \mathbb{P}\left(n(a-M_n) \leqslant x\right)$

$$= \mathbb{P}\left(M_n \geqslant a - \frac{x}{n}\right)$$

$$= 1 - G_n\left(a - \frac{x}{n}\right)$$

D'où :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ H_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \left(\dfrac{F\left(a - \frac{x}{n}\right)}{F(a)}\right)^n & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Q4.b. La fonction affine $x \mapsto a + x$ est bien $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto \dfrac{F(x)}{F(a)}$ aussi

Donc, par composition, $x \mapsto \dfrac{F(a+x)}{F(a)}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

Alors, d'après Taylor-Young à l'ordre 1, on a :

$$\forall b \in \mathbb{R}, \ \frac{F(a+x)}{F(a)} \underset{x \to b}{=} \frac{F(a+b)}{F(a)} + (x-b)\underbrace{\left(\frac{d}{dt}\frac{F(a+t)}{F(a)}\right)(b)}_{= \frac{f(a+b)}{F(a)}} + o(x-b)$$

En particulier, pour $b = 0$, on a :

$$\frac{F(a+x)}{F(a)} \underset{x \to 0}{=} \underbrace{\frac{F(a)}{F(a)}}_{=1} + x\frac{f(a)}{F(a)} + o(x)$$

Or : $\forall x \in \mathbb{R}, \ -\dfrac{x}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

Donc, par composition, on a : $\forall x \in \mathbb{R}, \ \dfrac{F\left(a - \frac{x}{n}\right)}{F(a)} \underset{n \to +\infty}{=} 1 - \dfrac{f(a)}{F(a)}\dfrac{x}{n} + o\left(-\dfrac{x}{n}\right)$

Or : $\forall x \in \mathbb{R},\ o\left(-\frac{x}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$

Donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{F(a-\frac{x}{n})}{F(a)} \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{f(a)}{F(a)}\frac{x}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Q4. b. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \left(\frac{F(a-\frac{x}{n})}{F(a)}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(1 - \frac{f(a)}{F(a)}\frac{x}{n}\right)^n$$

Or :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ -\frac{f(a)}{F(a)}\frac{x}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

D'où : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \ln\left(1 - \frac{f(a)}{F(a)}\frac{x}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{f(a)}{F(a)}\frac{x}{n}$

$$\text{donc : } \underbrace{n\ln\left(1 - \frac{f(a)}{F(a)}\frac{x}{n}\right)} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{f(a)}{F(a)}x$$

$$= \ln\left(\left(1 - \frac{f(a)}{F(a)}\frac{x}{n}\right)^n\right)$$

Donc, par composition par l'exponentielle, il vient :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \left(\frac{F(a-\frac{x}{n})}{F(a)}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-\frac{f(a)}{F(a)}x}$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-\frac{f(a)}{F(a)}x}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad H_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\frac{f(a)}{F(a)}x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Donc : $Z_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Z$ avec $Z \hookrightarrow \mathcal{E}\left(\frac{f(a)}{F(a)}\right)$

Exercice 2 :

Q1. Pour $k = 0$, on a :

$$f \in F \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^3, \ \underbrace{\|f(x)\|}_{\geqslant 0} \leqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^3, \ f(x) = 0 \quad (\text{car } \|f(x)\| = 0)$$

Donc :

$$\text{Pour } k = 0, \ F = \{0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}\}$$

Q2.a. On a :

$$A^2 = \frac{1}{27^2}\begin{pmatrix} -1 & 8 & -4 \\ 8 & -1 & -4 \\ -4 & -4 & -7 \end{pmatrix}^2$$

$$= \frac{1}{27^2}\begin{pmatrix} 81 & 0 & 0 \\ 0 & 81 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{pmatrix}$$

D'où : $A^2 = \frac{1}{9} I_3$

Donc : $X^2 - \frac{1}{9} = \left(X - \frac{1}{3}\right)\left(X + \frac{1}{3}\right)$ est un polynôme annulateur non-nul de A

Or, ses racines sont $-\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{3}$, d'où :

$$sp(A) \subset \left\{-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right\}$$

Q2.b. Puisque A est symétrique, d'après le théorème spectrale, on a :

A est diagonalisable

Q2.c. A étant symétrique et donc diagonalisable, le théorème spectrale nous donne :

Les sous-espaces propres de A sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

Or, puisque $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, par écriture matricielle du produit scalaire, on a :

Les sous-espaces propres de f sont supplémentaires orthogonaux de $\mathbb{R}^3$

Q2.d. ~~Il existe donc une base~~ ~~$\mathcal{B}' = (x_1, x_2, x_3)$~~ ~~de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f (base orthonormale)~~

~~Alors :~~

$$\cancel{\forall k \in [\![1,3]\!],\ \|f(x_k)\| = \|\pm \tfrac{1}{3} x_k\|}$$

$$\cancel{= \tfrac{1}{3} \underbrace{\|x_k\|}_{=1}}$$

$$\cancel{\leqslant \tfrac{1}{3} \|x_k\|}$$

~~D'où~~ :

$$\cancel{\forall (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3,\ \|f(y_1, y_2, y_3)\| = \|\langle y_1 | x_1 \rangle f(x_1) +}$$

~~Or (x_1, x_2, x_3) une base de $\mathbb{R}^3$~~

D'où : $\cancel{\forall x \in \mathbb{R}^3,\ \|f(x)\| \leqslant \tfrac{1}{3}\|x\|}$

~~Donc~~

$$\cancel{f \in F}$$

Alors : $\cancel{\forall (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3,\ (y_1, y_2, y_3) = \langle y_1 | x_1 \rangle x_1 + \langle y_2 | x_2 \rangle x_2 + \langle y_3 | x_3 \rangle x_3}$

d'où : $\cancel{f(y_1, y_2, y_3) = \tfrac{1}{3}\left(\pm \langle y_1 | x_1 \rangle x_1 \pm \langle y_2 | x_2 \rangle x_2 \pm \langle y_3 | x_3 \rangle x_3\right)}$

Copie anonyme - n°anonymat : 551293

Code épreuve : 297 — Nombre de pages : 28 — Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques S EDHEC

Consignes
• Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
• Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
• Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
• Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
• Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

~~D'où :~~

$\cancel{\forall (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3, \ \|f(y_1,y_2,y_3)\|^2 = \frac{1}{3} \| \Sigma \langle y_1 | x_1 \rangle}$

Q2.d. Puisque $\mathbb{R}^3 = \ker(f - \lambda id) \overset{\perp}{\oplus} \ker(f - \mu id)$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \ \exists (y, z) \in \ker(f - \lambda id) \times \ker(f - \mu id) \ / \ x = y + z \quad \text{d'où : } f(x) = \lambda y + \mu z$$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}^3, \ \|f(x)\| = \|\lambda y + \mu z\|$

théorème de Pythagore car $\langle y | z \rangle = 0$

$$= \underbrace{\lambda}_{= \pm \frac{1}{3} \ \leqslant \frac{1}{3}} \|y\| + \underbrace{\mu}_{= \pm \frac{1}{3} \ \leqslant \frac{1}{3}} \|z\|$$

$$\leqslant \frac{1}{3} \underbrace{(\|y\| + \|z\|)}_{= \|y + z\|} \quad \text{(Pythagore)}$$

$$\|\underbrace{y+z}_{= x}\|$$

D'où : $\forall x \in \mathbb{R}^3, \ \|f(x)\| \leqslant \frac{1}{3} \|x\|$

Donc : $f \in F$ car $\frac{1}{3} \in [0, 1[$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Q3.a. Supposons par l'absurde que $Id \in F$

Alors : $\exists k \in [0, 1[\ / \ \|\underbrace{Id(x)}_{=x}\| \leqslant \underbrace{k}_{<1}\|x\|$

d'où : $\|x\| < \|x\|$ ce qui est absurde

Donc :

$$\underline{Id \notin F}$$

Q3.b. Soit $f \in F$ et $f \neq 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$

Alors : $\exists k \in]0, 1[\ / \ \|f(x)\| \leqslant k\|x\|$ ($k \neq 0$ d'après Q1, car $f \neq 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$)

Or : $\forall x \in \mathbb{R}^3, \ \|\frac{2}{k} f(x)\| \leqslant 2\|x\|$ et l'égalité est supposée être atteinte

Donc : $\frac{2}{k} f \notin F$

Donc : <u>F n'est pas un espace vectoriel</u>

Q3.c. Soit $(f, g) \in F \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$

Alors : $\exists k \in [0, 1[\ / \ \forall x \in \mathbb{R}^3$

Q3.d. Soit f un automorphisme de F

Donc f non-nulle, f inversible et :

$\exists k \in]0, 1[\ / \forall x \in \mathbb{R}^3, \|f(x)\| \leqslant k\|x\|$ ($k \neq 0$ car sinon f est nulle)

D'où :

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \ \|\underbrace{f(f^{-1}(x))}_{=x}\| \leqslant k\|f^{-1}(x)\|$$

D'où : $\forall x \in \mathbb{R}^3, \ \underbrace{\frac{1}{k}}_{>1 \text{ car } k \in]0,1[}\|x\| \leqslant \|f^{-1}(x)\|$

D'où : $f^{-1} \notin F$

Donc :

Si f automorphisme de F alors $f^{-1} \notin F$

Q4.a. Soit p un projecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$ non-nul

Alors :

$$\forall x \in \operatorname{Im}(p),\ \|p(x)\| = \|x\|$$

Or : $1 \notin [0, 1[$

Donc : $p \notin F$

Donc :

F ne contient aucun projecteurs autres que le projecteur nul (d'après Q1.)

Q4.b. Soit s une symétrie donc s diagonalisable et $sp(s) = \{-1, 1\}$

Alors, en reprenant un raisonnement analogue à Q2.d, en prenant un $x \in \mathbb{R}^3$ quelconque tel que $x = y + z$ avec $(y, z) \in \ker(s + id) \times \ker(s - id)$, vu que $\mathbb{R}^3 = \ker(s + id) \overset{\perp}{\oplus} \ker(s - id)$ (car s diagonalisable, théorème spectrale), on trouvera :

$$\forall x \in \mathbb{R}^3,\ \|s(x)\| \leq \|x\| \text{ avec égalité pour } x \in \ker(s+id) \text{ ou } x \in \ker(s-id)$$

Donc : $s \notin F$

Donc : F contient aucune symétrie

Q5.a. Puisque f un endomorphisme symétrique, d'après le théorème spectrale, on a $\mathcal{B}' = (x_1, x_2, x_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f associés aux valeurs (distincts ou non) λ_1, λ_2 et λ_3

Alors : $\forall k \in [\![1, 3]\!],\ \|f(x_k)\| = |\lambda_k| \|x_k\|$

$\leq k$ avec $k = \max_{\lambda \in sp(f)} |\lambda|$

Or $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$

Donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}^3,\ \|f(x)\| \leqslant k\|x\| \text{ avec } k = \max_{\lambda \in sp(f)} |\lambda|$$

Q5.b. On a :

$$f \in F \Leftrightarrow \exists \mu \in [0,1[\,/\, \forall x \in \mathbb{R}^3,\ \|f(x)\| \leqslant \mu\|x\|$$

et : $\forall x \in \mathbb{R}^3,\ \|f(x)\| \leqslant k\|x\|$

$$\Leftrightarrow \exists \mu \in [0,1[\,/\, \forall x \in \mathbb{R}^3,\ \|f(x)\| \leqslant \begin{cases} k\|x\| \\ \mu\|x\| \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists \mu \in [0,1[\,/\, \forall x \in \mathbb{R}^3,\ \|f(x)\| \leqslant \begin{cases} k\|x\| \\ \mu\|x\| \end{cases}$$

et pour x vecteur propre λ tel que $k = |\lambda|$,
$\|f(x)\| = k\|x\| \leqslant \mu\|x\|$

$$\Leftrightarrow \exists \mu \in [0,1[\,/\, \forall x \in \mathbb{R}^3,\ \|f(x)\| \leqslant \mu\|x\|$$

et $k \leqslant \mu$ (divise par $\|x\| \neq 0$ vecteur propre de f)

$\Leftrightarrow k \in [0,1[$ (car si $sp(f) \subset]-1,1[$, avec Q5.a., l'implication de gauche à droite est évidente)

Donc :

$$f \in F \Leftrightarrow sp(f) \subset]-1,1[$$

Q6.a. On a :

$$A^2 = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2$$

$$= \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 551293

Alors :

$$A^3 = \frac{1}{6^3}\begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6^3}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -18 & 18 \\ -18 & -9 & 0 \\ 18 & 0 & 9 \end{pmatrix}}_{= 9A}$$

D'où : $A^3 = \frac{1}{24} A$

Donc : $X^3 - \frac{1}{24}X$ est un polynôme annulateur non-nul de A

Or les racines de $X^3 - \frac{1}{24}X$ sont $-\frac{1}{2\sqrt{6}}$, 0 et $\frac{1}{2\sqrt{6}}$

Donc :

$$sp(A) \subset \left\{-\frac{1}{2\sqrt{6}}, 0, \frac{1}{2\sqrt{6}}\right\}$$

Q6. b. Puisque f est un endomorphisme symétrique, f est diagonalisable et :

$$(*) \quad \mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}\left(f + \frac{1}{2\sqrt{6}}\right) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Ker}(f) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Ker}\left(f - \frac{1}{2\sqrt{6}}\right)$$

d'après le théorème spectrale

On note que $-\frac{1}{2\sqrt{6}}$ et $\frac{1}{2\sqrt{6}}$ sont forcément valeurs propres de f car sinon 0 est l'unique valeur propre de f,

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

ce qui n'est pas possible car $f = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$ d'après la matrice A

En fait, $(*)$ peut s'écrire plutôt :

$$\mathbb{R}^3 = \bigoplus_{\lambda \in sp(f)}^{\perp} \mathrm{Ker}(f - \lambda id) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} -\frac{1}{2\sqrt{6}} \in sp(f) \\ \text{ou } \frac{1}{2\sqrt{6}} \in sp(f) \end{cases}$$

Et, d'après Q5.a., on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \ \|f(x)\| \leq \frac{1}{2\sqrt{6}} \|x\| \quad \left(\text{car } \max_{\lambda \in sp(A)} |\lambda| = \left|\pm \frac{1}{2\sqrt{6}}\right|\right)$$

Donc, puisque $\frac{1}{2\sqrt{6}} \in [0, 1[$, on a :

$$\underline{f \in F \text{ et : } \forall x \in \mathbb{R}^3, \ \|f(x)\| \leq \frac{1}{2\sqrt{6}} \|x\|}$$

Q6.c.

Exercice 3 :

Q1.a. On a $N(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et : $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $X_i(\Omega) = \{0, 1\}$
Donc :

$$S(\Omega) = \mathbb{N}$$

Q1.b. On a :
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} X_k$ admet une espérance (car $X_1, \dots, X_n$ sont n VAR indépendantes admettant une espérance)

Puisque $N(\Omega) = \mathbb{N}^*$, on a bien :
S admet une espérance

Q2. Par somme indépendante et stabilité de la loi binomiale, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p) \text{ et } \mathbb{E}(S_n) = np$$

Q3. La formule des probabilités totales associé au système complet d'événements $((N = n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ nous donne :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{P}(S = k) = \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\mathbb{P}(S = k, N = n)}_{= \begin{cases} \mathbb{P}(S_n = k, N = n) & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}}$$

$$= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = k, N = n)$$

Or, pour $(n, k) \in \mathbb{N}^* \times [\![0, n]\!]$, $(S_n = k)$ et $(N = n)$ sont indépendants par coalition (N indépendante de $X_1, \dots, X_n$)
Donc :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{P}(S_n = k) = \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = k) \mathbb{P}(N = n)$$

Q4.a. On a : $N(\Omega) = \mathbb{N}^*$

Alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(N = k) = \mathbb{P}(N-1 = k-1)$$

$$= e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

Q4.b. D'après Q3., on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(S_n = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$= \frac{p^k \lambda^{k-1}}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} q^{n-k} \frac{\lambda^{n-k}}{(n-1)!}$$

D'où : $$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(S_n = k) = \frac{p^k \lambda^{k-1}}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n(\lambda q)^{n-k}}{(n-k)!}$$

Or : $$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n(\lambda q)^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+k)(\lambda q)^n}{n!}$$ (glissement de k indices)

$$= \lambda q \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\lambda q)^{n-1}}{(n-1)!}}_{= e^{\lambda q}} + k \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda q)^n}{n!}}_{= e^{\lambda q}}$$

(glissement d'indice)

$$= e^{\lambda q}(\lambda q + k)$$

D'où :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(S_n = k) = \frac{p^k \lambda^{k-1}}{k!} (\lambda q + k)\, e^{\lambda \underbrace{(q-1)}_{=-p}}$$

Donc : $$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(S_n = k) = \frac{p^k \lambda^{k-1}}{k!} (\lambda q + k) e^{-\lambda p}$$

Q4.c. Puisque $S(\Omega) = \mathbb{N}$, on a :

$$\mathbb{P}(S_n = 0) = 1 - \mathbb{P}(S_n \geqslant 1)$$

$$= 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{p^k \lambda^{k-1}}{k!} (\lambda q + k) e^{-\lambda p}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 551293

Code épreuve : 297 | **Nombre de pages :** 28 | **Session :** 2022

Épreuve de : Mathématiques S EDHEC

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Emplacement QR Code

Donc :

$$\mathbb{P}(S_n = 0) = 1 - \left(q e^{-\lambda p} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(p\lambda)^k}{k!} + p e^{-\lambda p} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(p\lambda)^{k-1}}{(k-1)!}\right)$$

$$= 1 - \left(q e^{-\lambda p}(e^{\lambda p} - 1) + p e^{-\lambda p} e^{\lambda p}\right)$$

$$= 1 - (q - q e^{-\lambda p} + p)$$

Donc :

$$\mathbb{P}(S_n = 0) = q e^{-\lambda p}$$

Q4. d. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{E}(S \mid N = n) = \mathbb{E}(S_n \mid N = n)$$

Par indépendance (coalition), on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{E}(S_n \mid N = n) = \mathbb{E}(S_n)$

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{E}(S \mid N = n) = np$$

Alors, d'après la formule de l'espérance totale, on a :

$$\mathbb{E}(S) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}(S \mid N = n)\, \mathbb{P}(N = n)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} np e^{-\lambda} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

D'où :

$$\mathbb{E}(S) = \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1+1) p \, e^{-\lambda} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$= p e^{-\lambda} \lambda \underbrace{\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\lambda^{n-2}}{(n-2)!}}_{= e^{\lambda}} + p e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}}_{= e^{\lambda}}$$

Donc :

$$\mathbb{E}(S) = p(\lambda + 1)$$

Or : $\mathbb{E}(X) = p$ et : $\mathbb{E}(N) = \mathbb{E}(N-1) + 1$
$= \lambda + 1$

Donc :

$$\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(N)$$

Q5.

```
function y = S(lambda, p)
    N = 1 + grand(1, 1, 'poi', lambda)
    y = sum(grand(1, N, 'uin', p))
endfunction
```

Problème :

Partie 1 :

Q1. Puisque $f(x) \underset{0^+}{\sim} x$ et : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$, $\ln$ étant continue sur $\mathbb{R}_+^*$, par composition, on a :

$$\underline{\ln(f(x)) \underset{0^+}{\sim} \ln(x)}$$

Q2.a. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ sh(-x) = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2}$$

$$= -sh(x)$$

et : $\forall x \in \mathbb{R},\ ch(-x) = \dfrac{e^{-x} + e^{x}}{2}$

$$= ch(x)$$

Donc : <u>sh est impaire</u> (et <u>ch est paire</u>)

Q2.b. sh, en tant que somme de fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}$, est C^∞ sur $\mathbb{R}$

Donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ sh'(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

$$> 0$$

Donc :

<u>sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$</u>

et : $sh(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} -\infty$

$sh(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$

<u>$sh(0) = 0$</u>

Q2.c. On a : $e^{x} \underset{0}{=} 1 + x + o(x)$ ($DL_1(0)$ de exp)

D'où : $e^{x} - e^{-x} \underset{0}{=} 1 + x - 1 + x + o(x)$

Donc : $sh(x) \underset{0}{=} x + o(x)$

Donc : $sh(x) \underset{0}{\sim} x$

Q3.a. On a montré à Q2.a. que :

ch est paire

Q3.b. Par somme de fonction $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, ch est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad ch'(x) = sh(x)$$

Puisque sh strictement croissante sur $\mathbb{R}$, le theorème de la bijection nous assure l'unicité du point a tel que $sh(a) = 0$

Or : $sh(0) = 0$

Donc : ch' est négative sur $\mathbb{R}_-$ et positive sur $\mathbb{R}_+$

Donc :

ch décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$

et : $ch(x) \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} +\infty$ et $\min\limits_{x \in \mathbb{R}} ch(x) = ch(0) = 1$

Q4. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (ch(x))^2 - (sh(x))^2 = \frac{1}{4}\underbrace{\left(e^{2x} + 2\underbrace{e^{x}e^{-x}}_{=1} + e^{-2x} - e^{2x} + 2\underbrace{e^{x}e^{-x}}_{=1} - e^{-2x}\right)}_{=4}$$

D'où :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (ch(x))^2 - (sh(x))^2 = 1$$

Copie anonyme - n°anonymat : 551293

Code épreuve : 297	Nombre de pages : 28	Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques S EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

Partie 2 :

Q5. a. ~~On a ch décroissante sur $\mathbb{R}_-$ puis croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc~~

On a ch strictement positive sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}$, et $x \mapsto \frac{1}{x}$ continue sur $\mathbb{R}^*$

Donc, par composition, $x \mapsto \frac{1}{ch(x)}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et donc bien définie sur $\mathbb{R}$

C'est aussi le cas de sh

Donc, par produit, on a :

th est bien définie (et continue) sur $\mathbb{R}$

Q5. b. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ th(-x) = \frac{sh(-x)}{ch(-x)}$$
$$= \frac{-sh(x)}{ch(x)}$$
$$= -th(x)$$

Donc : th est impaire

Q5. c. De manière analogue à Q5. a., avec "C^1" en lieu et place de "continue", on a bien th C^1 sur $\mathbb{R}$

D'où : $\forall x \in \mathbb{R},\ th'(x) = \dfrac{sh'(x)\,ch(x) - sh(x)\,ch'(x)}{ch(x)^2}$

D'où : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad th'(x) = \dfrac{ch(x)^2 - sh(x)^2}{ch(x)^2}$ $\quad (sh' = ch$ et $ch' = sh)$

$$= \frac{1}{ch(x)^2} \quad \text{(d'après Q4.)}$$

$$> 0 \quad (\text{car } ch > 0 \text{ sur } \mathbb{R})$$

Donc :

th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Q5.d. On a : $th(0) = \dfrac{sh(0)}{ch(0)}$

$$= 0$$

De plus :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad th(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$$

$$= \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

Or : $e^{-2x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

d'où : $th(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$

Par imparité de th, on a donc : $th(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} -1$

Donc :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$th(x)$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

Q6. a. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\frac{1}{sh(x)} = \frac{ae^{-x}}{1-e^{-x}} + \frac{be^{-x}}{1+e^{-x}}$$

donc : $$\frac{2}{e^{x}-e^{-x}} = \frac{ae^{-x}(1+e^{-x}) + be^{-x}(1-e^{-x})}{(1-e^{-x})(1+e^{-x})}$$

d'où : $$\frac{2e^{-x}}{1-e^{-2x}} = \frac{(a+b)e^{-x} + (a-b)e^{-2x}}{1-e^{-2x}}$$

donc : $$\begin{cases} a+b = 2 \\ a-b = 0 \end{cases}$$

Donc : $\underline{a = 1}$ et $\underline{b = 1}$

Q6. b. Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{sh(x)}$ est $x \mapsto \ln\left(\frac{1-e^{-x}}{1+e^{x}}\right)$

Q7. ~~On a :~~

$\cancel{sh(x) \underset{0^+}{\sim} x \text{ et } ch(x) \underset{0^+}{\sim} 1}$

On a :

$e^{x} - e^{-x} \underset{0^+}{\sim} 2x$ (car $e^{x} \underset{0^+}{=} 1 + x + o(x)$, raisonnement analogue à Q2.c)

et : $\frac{e^{x}+e^{-x}}{2} \underset{0^+}{\sim} 1$

D'où : $\cancel{th(x) \underset{0^+}{\sim} 2x}$

Partie 3 :

Q8.a. Soit $k \in \mathbb{N}^*$

Par croissance de sh, on a :

$$\forall t \in [k, k+1], \quad sh(kx) \leqslant sh(tx) \leqslant sh((k+1)x)$$

En passant par l'inverse puis en invoquant la positivité de l'intégrale sur $[k, k+1]$, on a :

$$\underbrace{\int_k^{k+1} \frac{1}{sh((k+1)x)}\, dt}_{= \frac{1}{sh((k+1)x)} (\underbrace{k+1-k}_{=1})} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{sh(tx)}\, dt \leqslant \underbrace{\int_k^{k+1} \frac{1}{sh(kx)}\, dt}_{= \frac{1}{sh(kx)} (\underbrace{k+1-k}_{=1})}$$

Donc :

$$\frac{1}{sh((k+1)x)} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{sh(tx)}\, dt \leqslant \frac{1}{sh(kx)}$$

Q8.b. Par sommation puis par Chasles, il vient :

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{sh((k+1)x)}}_{= \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{sh(kx)}} \leqslant \int_1^{n+1} \frac{1}{sh(tx)}\, dt \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{sh(kx)}$$

D'où, on soustrait par $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{sh(kx)} + \int_1^{n+1} \frac{1}{sh(tx)}\, dx$ puis on multiplie par 1 :

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{sh(tx)}\, dt \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{sh(kx)} \leqslant \int_1^{n} \frac{1}{sh(tx)}\, dt$$

Copie anonyme - n°anonymat : 551293

Q9.a. D'après Q6.b., on a :

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{sh(tx)}\,dt = \frac{1}{x}\left[\ln\left(\frac{1-e^{-tx}}{1+e^{-tx}}\right)\right]_1^{n+1}$$

$$= \frac{1}{x}\left(\underbrace{\ln\left(\underbrace{\frac{1-e^{-(n+1)x}}{1+e^{-(n+1)x}}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1}\right)}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0} - \ln\left(\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}\right)\right)$$

$$\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}\right)$$

Donc : $\int_1^{+\infty} \frac{1}{sh(tx)}\,dt$ converge

Par comparaison série - intégrale, on a :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{sh(nx)} \text{ converge}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE