Copie anonyme - n°anonymat : 599509

Code épreuve : 295	**Nombre de pages :** 18	**Session :** 2022

Épreuve de : Mathématiques S EML

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Problème 1 :

Partie A :

1) a) en notant C_1, C_2, C_3 les colonnes de A, $C_2 = C_1 + C_3$.

Donc $rg(A) = 2$ donc A n'est pas inversible.

b) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$A^3 - A^2 + A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) $P = X^3 - X^2 + X$ est donc polynôme annulateur de A.

Comme 0 est racine de P, $P = X(X^2 - X + 1)$

$\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$. Donc $Sp(A) \subset \{0\}$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Or, A n'est pas inversible donc $Sp(A) = 0$.

Comme par le théorème du rang, $\dim(E_0(A)) = 3 - 2 = 1 \neq 3$, A n'est pas diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$.

2) ⓐ $^tB = {}^t({}^tAA) = {}^tAA = B$. Donc B est symétrique réelle, donc diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$.

ⓑ i $\quad {}^tR = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

$$R\,{}^tR = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ 2 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1+3+2 & -1+3-2 & -2+2 \\ -1+3-2 & 1+3+2 & 2-2 \\ -2+2 & 2-2 & 2+4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

Donc $R^{-1} = {}^tR$ donc R est orthogonale.

ii $\quad B = {}^tAA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

~~$^tRBR =$~~

$$^tRBR = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ 2 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ 2 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 14 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Donc ^tRBR est diagonale.

Partie B :

3) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$:

$<x, g(y)> = {}^tX\,{}^tMY = {}^t(MX)Y = <f(x), y>$

$<x, h(x)> = {}^tX\,{}^tMMX = {}^t(MX)MX = <f(x), f(x)> = \|f(x)\|^2$

4) a) $x \in \mathrm{Ker}(h)$.

$<x, h(x)> =$
${}^tX\,{}^tMMX = X \times 0 = 0$. Or, $<x, h(x)> = \|f(x)\|^2$.

Donc $\|f(x)\|^2 = 0 \Rightarrow f(x) = 0$. Donc $x \in \mathrm{Ker}(f)$.

b) On a prouvé $\mathrm{Ker}(h) \subset \mathrm{Ker}(f)$. Montrons ~~la réciproque~~ l'autre inclusion

Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$.

~~Donc $\|f(x)\|^2 = 0$ car $f(x) = 0$. donc $<x, h(x)> = 0$~~

$h(x) = g \circ f(x) = g(0) = 0$. Donc $x \in \mathrm{Ker}(h)$ et donc $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(h)$

Grâce aux deux inclusions, on en déduit que $\mathrm{Ker}(h) = \mathrm{Ker}(f)$.

c) Notons H la matrice de h dans la base $\mathcal{B}$. $H = {}^tMM$

~~Donc $H \in \ldots$~~ et donc $\dim(h) = \dim(f) = \dim(\mathbb{R}^n) = n$.

Par théorème du rang, $\dim(h) = rg(h) = \dim(\mathbb{R}^n) - \dim(\mathrm{Ker}(h))$
$= n - \dim(\mathrm{Ker}(f))$
$=$ rang $(f) = r$.

(rang $(M) =$ rang (f) donc
rang $(H) =$ rang (M))

5) a) $H = {}^tMM$ donc ${}^tH = {}^t({}^tMM) = {}^tMM = H$.

H est donc symétrique réelle, donc diagonalisable.
Donc il existe une base orthonormée $B_1 = (X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^n$ constituée des vecteurs propres de H (orthonormée car symétrique)

b) Soit $\lambda \in Sp(h)$ et $x \in \mathbb{R}^n$, un vecteur propre de h associé à λ.
En particulier, x est non nul.

$\cancel{\|h(x)\|^2 = {}^tXH{}^tHX = {}^tXH\lambda X = {}^tXX\lambda^2 = \lambda^2\|X\|^2 \geq 0}$

$\cancel{{}^tH = H}$

~~Or~~ $\cancel{\lambda > 0}$ ~~donc~~ $\cancel{\|X\| > 0}$, ~~donc on a~~

$\cancel{\|g(x)\|^2 \geq 0}$ ~~car~~ $\cancel{x \notin Ker(h)}$ ~~donc~~ $\cancel{\notin Ker(g)}$.

Donc $\langle x, h(x)\rangle = {}^tXHX = \lambda\|X\|^2 \geq 0$. Or $X \neq 0$ donc $\|X\|^2 > 0$.
On en déduit que $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, donc que $Sp(h) \subset \mathbb{R}_+^*$.

6) P est orthogonale car elle est une matrice de passage d'une base à une base orthonormée.

Comme h est diagonalisable, $\exists P \in M_n(\mathbb{R})$ inversible et $D = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ où $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+^*$ et sont les valeurs propres de H telles que :

$$H = {}^tMM = P D \underbrace{P^{-1}}_{P^{-1} = {}^tP} = P D {}^tP$$

7) Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ les valeurs propres de M où $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$.

Comme $M^2 = PD{}^tP$ $\cancel{\sqrt{PD}}$, $M = P\sqrt{\mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)}\,{}^tP$

Donc les valeurs propres de M sont $\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}$.

Donc $\forall i \in [\![1;n]\!]$, $\sigma_i = \sqrt{\alpha_i} = \sqrt[4]{\lambda_i}$

Copie anonyme - n°anonymat : 599509

8) $\dim(\mathrm{Im}(h)) = \dim(\mathbb{R}^n) - \dim(\mathrm{Ker}(h)) = n - r$ par le théorème du rang.

Donc $\dim(E_0(h)) = n-r$, donc 0 apparaît $n-r$ fois sur la diagonale de Δ. Comme on est sûr que les autres valeurs propres sont différentes de 0, Δ admet exactement r coefficients diagonaux non nuls.

9) ⓐ $\forall i \in [\![1, r]\!]$ $e_i \notin \mathrm{Ker}(h)$ car $\lambda_1 \neq 0, \dots, \lambda_r \neq 0$.

Donc $e_i \notin \mathrm{Ker}(g)$ et donc $g(e_i) \neq 0$.

$\|g(e_i)\|^2 = \langle g(e_i), g(e_i)\rangle = \langle e_i, h(e_i)\rangle = \lambda_i \|e_i\|^2$

Donc $\|g(e_i)\| = \sqrt{\lambda_i}\,\|e_i\| = \sqrt{\lambda_i}$ car $(e_1, \dots, e_n)$ est orthonormée.

ⓑ $\forall i, j \in [\![1, r]\!]$: par la question 3)

$$\langle u_i, u_j\rangle = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j}} \langle g(e_i), g(e_j)\rangle = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i\lambda_j}} \langle e_i, h(e_j)\rangle = \frac{\sqrt{\lambda_j}}{\sqrt{\lambda_i}} \langle e_i, e_j\rangle$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ \sqrt{\frac{\lambda_i}{\lambda_i}} = 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

Donc $(u_1, \dots, u_r)$ est une famille orthonormée.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

C

10) Q est une matrice de passage d'une base à une base orthonormée, elle est donc orthogonale.

11) $\cancel{A - I_d = \begin{pmatrix} - & \cdot & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$ ~~Ch~~

Partie C : Notons $\mathrm{Diag}\left(\frac{1}{\sigma_1}, \dots, \frac{1}{\sigma_n}, 0, \dots, 0\right) = Z$

12) $\cancel{S}$ $MM^+ = Q\Delta^{t}PP\,\mathrm{Diag}\left(\frac{1}{\sigma_1}, \dots, \frac{1}{\sigma_r}, 0, \dots, 0\right){}^{t}Q$, ${}^{t}PP = I_{dn}$.

$= Q\,\Delta\,\mathrm{Diag}\left(\frac{1}{\sigma_1}, \dots, \frac{1}{\sigma_n}, 0, \dots, 0\right){}^{t}Q$ $= Q\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}{}^{t}Q$

$= \cancel{Q I_{dn} {}^{t}Q}$

~~Car~~ $\cancel{\Delta\,\mathrm{Diag}\left(\frac{1}{\sigma_1}, \dots, \frac{1}{\sigma_n}, 0, \dots, 0\right) = I_{dn}}$

~~Donc $M^{-1} = M^+$~~

~~13) (a) Par la question précédente, $MM^+ = I_{dn}$.~~

~~(b) $p^2 = MM^+MM^+$~~

~~Soit R la matrice de p dans la base $\mathcal{B}$.~~

~~Donc $R = MM^+ = I_{dn}$ donc $R^2 = I_{dn} = R$~~

~~Donc R (donc p) est un projecteur.~~

~~De plus, ${}^tR = {}^t(MM^+) = {}^tM^+\,{}^tM = Q\,\mathrm{Diag}\left(\frac{1}{\sigma_1},\dots,\frac{1}{\sigma_r},0,\dots,0\right){}^tP P \Delta\,{}^tQ$~~
~~$= I_{dn} = R$.~~

~~Donc R (donc p) est un endomorphisme symétrique.~~

~~Donc finalement, p est un projecteur orthogonal.~~

(c)

Cela me semble bizarre, car si M est inversible, alors $0 \notin Sp(f)$ et donc M n'est pas égale à $Q\Delta\,{}^tP$ car nécessairement Δ ne doit contenir aucun zéro sur sa diagonale.

13) (a) $MM^+ = Q\Delta\,{}^tPP\Sigma\,{}^tQ = Q\Delta\Sigma\,{}^tQ = Q\begin{pmatrix}1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0\end{pmatrix}{}^tQ$.

(b) Soit R la matrice de p dans la base $\mathcal{B}$. Donc $R = MM^+$.

$R^2 = MM^+MM^+ = Q\begin{pmatrix}1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0\end{pmatrix}{}^tQ\,Q\begin{pmatrix}1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0\end{pmatrix}{}^tQ = Q\begin{pmatrix}1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0\end{pmatrix}{}^tQ = R.$

Donc $p^2 = p$ et donc p est un projecteur.

${}^tR = {}^tM^+\,{}^tM = Q\Sigma\,{}^tPP\Delta\,{}^tQ = Q\begin{pmatrix}1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0\end{pmatrix}{}^tQ = R.$

Donc p est un endomorphisme symétrique, donc est finalement un projecteur orthogonal.

ⓒ $rg(MM^+) = rg\left(Q\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix} {}^t Q\right) = rg\left(\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}\right) = r.$

Par la question a.b), $rg(f) = r$ (car égal au rang de M)

Donc $rang(p) = dim(Im(p)) = r = rang(f) = dim(Im(f))$.

Soit $X \in Im(p)$, donc $\exists Y \in \mathbb{R}^n$ tel que $M(M^+Y) = X$ et donc $X \in Im(f)$ avec M^+Y qui joue le rôle de l'antécédent de X par f.

Donc $Im(p) \subset Im(f)$.

On a une inclusion et l'égalité des dimensions, on en déduit donc que $Im(p) = Im(f)$.

14) ⓐ $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|y - f(x)\| = \|y - p(y)\|$ par le théorème de la minimisation

donc forcément, $\|y - p(y)\| \leq \|y - f(x)\|$.

ⓑ Comme ~~...~~ B_2 est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n \setminus Im(f)$.

Un vecteur $p(z) \in \mathbb{R}^n$ qui répond au problème posé est $p(z) = \sum_{k=1}^{n} \langle z_i, b_i \rangle b_i$ où $z \in \mathbb{R}^n$

Lorsque $r < n$, comme B_1 et B_2 sont 2 bases orthonormées de $\mathbb{R}^n$, alors $\exists$ au moins 2 vecteurs distincts de $\mathbb{R}^n$ répondant au problème posé.

15) ⓐ $Im(f_1) = Vect((0,0,-1),(1,0,0))$

Soit $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. On veut $AX = Y \Leftrightarrow \begin{cases} b+c=1 \\ 0=1 \\ -a+c=0 \end{cases}$ ↯ C'est impossible, donc

$y \notin Im(f_1)$.

Copie anonyme - n°anonymat : 599509

Code épreuve : 295 | Nombre de pages : 18 | Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques S EML

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

b) $\forall x \in \mathbb{R}^3$. $\|y - f_x(a)\|^2 = {}^t(Y-AX)(Y-AX)$

$= ({}^tY - {}^tX\,{}^tA)(Y-AX)$

$= {}^tYY - {}^tYAX - {}^tX{}^tAY + {}^tX{}^tAAX$

$=$

${}^tYY = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}(1\,1\,1) = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$

Problème 2

Partie A:

1) $c_0 = \frac{1}{1}\binom{0}{0} = \underline{1}$ $\quad c_1 = \frac{1}{2}\binom{2}{1} = \frac{2}{2} = \underline{1}$ $\quad c_2 = \frac{1}{3}\binom{4}{2} = \frac{1}{3} \times \frac{4!}{2!}$ $= \underline{4}$

2) a) $\forall n \in \mathbb{N}$.

$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{2n!}{(n!)^2} - \frac{2n!}{(n+1)!(n-1)!} = \frac{2n!}{(n!)^2}\left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \frac{2n!}{(n!)^2}\left(\frac{1}{n+1}\right) = \underline{c_n}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\binom{2n}{n} \geq \binom{2n}{n+1}$ donc $c_n \geq 0$.

De plus,

3) $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$: " $c_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2} c_n$ ".

$n=0$ $\frac{2(2\times 0+1)}{0+2} c_0 = \frac{2}{2} \times 1 = 1 = c_1$. $P(0)$ est vraie.

Supposons $\exists n \geq 0$ tel que $P(n)$ soit vraie, montrons $P(n+1)$:

$\cancel{c_{n+2} = \frac{2(2n+3)}{n+3} c_{n+1} = \frac{2(2n+3)}{n+3} \times}$

$\frac{2(2n+1)}{n+2} c_n = \frac{2(2n+1)}{n+2} \times \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{2(2n+1)}{(n+2)(n+1)} \times \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{2(2n+1)!}{(n+2)(n+1)(n!)^2} \times \frac{2n+2}{2(n+1)}$

$= \frac{(2n+2)!}{(n+2)((n+1)!)^2} = \frac{1}{n+2} \binom{2n+2}{n+1}$

$= c_{n+1}$.

Ainsi, par principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2} c_n$.

4)
```
function c = catalan(n)
    g = 1
    for k = 1 : n-1
    g = ((2*(2*k+1)) \ (n+2)) * g
    end
endfunction
```

5) ⓐ $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_{n+1} - c_n = c_n \left(\frac{2(2n+1)}{n+2} - 1 \right)$

$$= c_n \left(\frac{4n+2-n-2}{n+2} \right) = c_n \left(\frac{3n}{n+2} \right) > 0$$

car par la 2)(b), $c_n \in \mathbb{N}^*$.

Donc $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

ⓑ Supposons que $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et notons l cette limite. Donc $l \in \mathbb{R}$.

$\frac{2(2n+1)}{n+2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{4n}{n} = 4$. Donc en passant à la limite la relation entre c_{n+1} et c_n, on a que $l = 4l \iff l = 0$. Or, $c_0 = 1 > 0$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, ce qui est donc absurde ↯.

Ainsi, comme $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas et est croissante, $c_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

6) ⓐ $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $\frac{c_{k+1}}{c_k} = \frac{1}{k+2} \times \frac{(2k+2)!}{((k+1)!)^2} \times k+1 \times \frac{(k!)^2}{2k!}$

$$= \frac{k+1}{k+2} \times \frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)^2} = \frac{2(2k+1)}{k+2}$$

$2k+2 = 2(k+1) > 2k+1 > 2k$.

$$\iff \frac{2(k+1)}{k+2} > \frac{2k+1}{k+2} > \frac{2k}{k+2}$$

$$\iff 4\left(\frac{k+1}{k+2}\right) \geq \frac{c_{k+1}}{c_k} \geq 4\left(\frac{k}{k+2}\right)$$

ⓑ En ~~[illegible]~~ mettant sous forme d'un produit l'inégalité précédente pour k allant de 1 à $n-1$:

$$\prod_{k=1}^{n-1} 4\left(\frac{k}{k+1}\right)^{3/2} \leq \prod_{k=1}^{n-1} \frac{c_{k+1}}{c_k} \leq \prod_{k=1}^{n-1} 4\left(\frac{k+1}{k+2}\right)^{3/2}$$

$\Leftrightarrow \quad 4^{n-1} \times \left(\frac{1}{n}\right)^{3/2} \leq \frac{c_n}{c_0} \leq 4^{n-1} \times \left(\frac{2}{n+1}\right)^{3/2}$

$\Leftrightarrow \quad \frac{4^n}{n\sqrt{n}} \frac{1}{4} \leq c_n \leq \frac{4^n \sqrt{2}}{2(n+1)\sqrt{n+1}} \leq \frac{4^n\sqrt{2}}{2n\sqrt{n}}.$

7) a) $\forall n \in \mathbb{N}$: $T_n = \sum_{k=0}^{n} k c_k c_{n-k} = \sum_{i=0}^{n} (n-i) c_{n-i} c_i = n \sum_{i=0}^{n} c_{n-i} c_i - \sum_{i=0}^{n} i c_{n-i} c_i$

$i = n-k \Leftrightarrow k = n-i$

$= n S_n -$

b) $T_{n+1} + S_{n+1} = \frac{n+1}{2} S_{n+1} + S_{n+1} = S_{n+1}\left(\frac{n+3}{2}\right)$

$= \cancel{\frac{n+1}{2} S_n + \sum_{k=0}^{n+1} c_k c_{n+1-k}}$

$c_{n+1} + 4T_n + 2S_n = c_{n+1} + 2n S_n + 2S_n = c_{n+1} + S_n(2n+2)$

c) $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$: " $S_n = c_{n+1}$ ".

$n=0$: $S_0 = c_0^2 = 1$ et $c_1 = 1$. Donc $P(0)$ est vraie.

Supposons $\exists n \geq 0$ tel que $P(n)$ soit vraie, montrons $P(n+1)$:

$S_{n+1} = c_{n+2} + 4T_n + 2S_n - T_{n+1} = c_{n+1} + 2nS_n + 2S_n - \frac{2}{n+1} S_{n+1}$

En admettant que $c_{n+1} + 2nS_n + 2S_n - \frac{2S_{n+1}}{n+1} = c_{n+2}$ a bien que $S_{n+1} = c_{n+2}$

Ainsi, par principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = c_{n+1}$.

Copie anonyme - n°anonymat : 599509

Code épreuve : 295 | **Nombre de pages :** 18 | **Session :** 2022

Épreuve de : Mathématiques S EML

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

8) a) $\forall x \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$, ~~en divisant par $\frac{1}{x^n}$ l'inégalité de la 6) b), on a :~~

$$\cancel{\frac{\frac{1}{4^n}}{n\sqrt{n}x^n} \leq c_n x^n}$$

Par la 6) b), on a : $\frac{x^n 4^n}{4n\sqrt{n}} \leq c_n x^n \leq \frac{\sqrt{2}\, x^n 4^n}{2n\sqrt{n}}$

$$\left|\frac{x^n 4^n}{4n\sqrt{n}}\right| \leq \frac{1}{4n\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad \left|\frac{\sqrt{2}\, x^n 4^n}{2n\sqrt{n}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{2}\, n\sqrt{n}}.$$

Les séries de ces 2 majorants des valeurs absolues qui encadrent $c_n x^n$, sont des séries convergentes par critère de Riemann.
Donc par comparaison de séries à termes positifs, $\sum_{n\geq 0} x^n c_n$ converge absolument donc converge.

b) $\left(\sum_{i=0}^{N} c_i x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{N} c_j x^j\right) = \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} c_i c_j x^{j+i} = \sum_{n=0}^{2N}\left(\sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k}\right)x^n$

car $0 \leq i \leq N$ et $0 \leq j \leq N \Leftrightarrow 0 \leq n \leq 2N$ et $0 \leq k \leq n$.

$$f(x)^2 = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n^2 x^{2n} + 2\sum_{0\leq i<j\leq+\infty} c_i c_j x^{i+j}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} c_n^2 x^{2n} + 2\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} c_k c_{n-k}\right)x^n$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

c) $\forall x \in [\frac{-1}{4};\frac{1}{4}]$ $(g(x))^2 = 4x^2 (f(x))^2 = 4x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^{n-1}$

$= 4 \sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^{n+1}$

$= 4x \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n - \underbrace{4xc_0}_{=4x}$

$= 2g(x) - 4x.$

d)

Partie B :

9) a) $t \mapsto \cos(t)^2 \in C^0([-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}])$.

$\forall t \in \mathbb{R}$

$\cos(t)^2 = \frac{1+\cos(2t)}{2}$.

Donc $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} \cos(t)^2 dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} \left(\frac{1+\cos(2t)}{2}\right) dt = \left[\frac{t}{2} + \sin(2t)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2}$

$= \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} + \sin(\pi) - \frac{-\pi}{2} \times \frac{1}{2} - \sin(-\pi)$

$= \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

(b) $\int_{-2}^{2} \varphi(x)\,dx = \int_{-2}^{2} \frac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2}\,dx$

changement de variable qui réalise une bijection C^1 donc légitime.

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2\pi}\sqrt{4-4\sin(t)^2}\,dt\, 2\cos(t)$$

$$= \frac{\cancel{4}}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\cos(t)^2\,dt = \frac{\cancel{4}}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^2\,dt = 1.$$

10) Par Chasles et la question précédente, $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx = 1$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) \geq 0$ et $\varphi \in C^0(\mathbb{R})$. car $\varphi(x) \xrightarrow[x \to 2^{\pm}]{} 0$

Donc φ est une densité.

11) (a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\cancel{x^n \varphi(x)} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \varphi(x) = \int_{-2}^{2} x^n \varphi(x)\,dx$.

X admet donc des moment de tout ordre n car X est finie (son support)

De plus, si n est impair, $x \mapsto x^n \varphi(x)$ est impair, donc $E(X^n) = 0$.
Donc $E(X^{2n+1}) = 0$.

Si n est pair, $E(X^{2n}) = 2\int_0^2 x^{2n}\varphi(x)\,dx$. car $x \mapsto x^{2n}\varphi(x)$ est pair.

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^2 x^{2n}\sqrt{4-x^2}\,dx.$$

(b) i $\mu_0 = E(X^{2\times 0}) = E(1) = 1$.

ii $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mu_{n+1} = \frac{1}{\pi}\int_0^2 x^{2n+2}\sqrt{4-x^2}\,dx$

Par IPP (borne finie) avec u et $v \in C^1([0;2])$, $\cancel{u'(x) = x^{2n+2}}$

$\cancel{u(x) = \frac{x^{2n+3}}{2n+3}}$

$v(x) = \sqrt{4-x^2}$, $v'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}$.

$\cancel{\mu_{n+1} = \left[\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}\right]_x^0 +}$

$u'(x) = \cancel{A\ln a} \cdot x\sqrt{4-x^2}$ $u(x) = -\frac{1}{3}(4-x^2)^{3/2}$ $v(x) = x^{2m+1}$ $v'(x) = (2m+1)x^{2m}$

Donc $\mu_{2m+1} = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{3}(4-x^2)x^{2m+1}\right]_0^2 + \frac{2m+1}{3\pi}\int_0^2 x^{2m}(4-x^2)^{3/2}dx$

$= 0 + \frac{2m+1}{3}\times\frac{1}{\pi}\int_0^2 x^{2m}(4-x^2)$.

iii

Partie C:

12) a)

```
function T = simule(p) ; u=0 ; x=0 ; q=0
    While x <> q
        if rand() < 1
            q = 1
            x = x
        else
            x = 1
            q = q
        end
endfunction.
```

b) Le script affiche ~~le nombre moyen que pris~~ la valeur moyenne prise par T

13) La probabilité que le nombre de piles et de face, lors d'un tirage impair est forcément nul car au mieux, il y aura 1 Face de plus que de Pile.

14) a)

b) ii $e_{m+1} = \sum_{k=1}^{m+1} d_k e_{m+1-k} = \sum_{k=1}^{m+1} e_{k-1} e_{m+1-k} = \sum_{k=0}^{m} e_k e_{m-k}$

$\forall m \in \mathbb{N}$:

$d_k = e_{k-1}$

Copie anonyme - n°anonymat : 599509

Code épreuve : 295	Nombre de pages : 18	Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques S EML

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

15) a) $0 \leq P(T=n)\alpha^n \leq P(T=n)$

Or, comme $\sum_{n\geq 0} P(T=n) = 1$, on en déduit par encadrement puis par comparaison de séries de même signe que $\sum_{n\geq 0} \alpha^n P(T=n)$ converge.

b) Soit $\forall x \in]0;1[$, $f(x) = x(1-x)$

$f'(x) = 1-x-x = 1-2x$ $\quad 1-2x=0 \Leftrightarrow 2x=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

Donc

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$f(x)$	0 ↗	$\frac{1}{4}$	↘ 0

Donc $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$ $\forall p \in]0;1[$

$p(1-p) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow p(1-p) - \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow -p^2 + p - \frac{1}{4} = 0$

$\Delta = 1 - 1 = 0$. $x = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$. Donc cette équation du second degré s'annule uniquement pour $p = \frac{1}{2}$.

Donc $p(1-p) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow p = \frac{1}{2}$.

c)

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

d) $G_T(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(T=n)\, 1^n = \sum_{n=0}^{+\infty} P(T=n) = 1$ par définition.

Donc $G_T(1) = P(T=0) + g(p(1-p)) = 1 \iff P(T=0) = 1 - g(p(1-p))$

Or, $g(p(1-p)) = 2p(1-p) \sum_{n=0}^{+\infty} c_n\, p^n(1-p)^n$

$= 2p(1-p) \sum_{n=0}^{+\infty} c_n\, p^n(1-p)^n$

$P(T=0) = 1 - g(p(1-p)) = 1 - 2p(1-p) \sum_{n=0}^{+\infty} 1$

16) a)

IMPRIMERIE NATIONALE – 2019-12-PF 018 751