Code épreuve : 295

Nombre de pages : 42

Session :

Épreuve de : Maths-ENS Lyon

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Problème 1 :

1) ~~rg(A) = 3 donc A~~

Notons C_1, C_2, C_3 les 3 colonnes de A

$C_3 = C_2 - C_1$ donc $Im(A) = Vect(C_1, C_2)$

donc $rg(A) = 2$, A n'est pas inversible.

b) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$A^3 = A^2 A$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 - A^2 + A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cancel{+} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc $A^3 - A^2 + A = 0$.

c) D'après la 1-b), $P(X) = X^3 - X^2 + X$ est un polynôme annulateur de A

$P(X) = \cancel{(X} \; X(\underbrace{X^2 - X + 1}_{\text{trinôme du second degré}})$

$\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$

donc $Sp(A) \subset \{0 ; \alpha_1, \alpha_2\}$ où $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{C}^2$,

donc la seule valeur propre réelle de A est 0

Si A est diagonalisable, A est semblable à la matrice nulle donc elle est nulle, absurde car non de A

Donc : A n'est pas diagonalisable.

2) a) ${}^tB = {}^t({}^tAA) = {}^tA\,{}^t({}^tA) = {}^tAA = B$

B est symétrique réelle donc diagonalisable.

b) ${}^tRR = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ 2 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = I_3$

${}^tRR = I_3$ donc R est orthogonale.

ii) ${}^tAA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\cancel{= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & & \end{pmatrix}}$

$\cancel{{}^tRBR = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & \end{pmatrix}}$

${}^tRBR =$

3) Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle x ; g(y) \rangle = {}^tX\, {}^tM Y$$
$$= {}^t(MX) Y$$
$$= \langle f(x) ; y \rangle$$

en ~~bas~~ passant aux matrices relatives de ces deux endomorphismes dans la base $\mathcal{B}$

donc $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $\langle x ; g(y) \rangle = \langle f(x) ; y \rangle$.

$$\langle x ; h(x) \rangle = {}^tX\, {}^tM M X$$
$$= {}^t(MX) M X$$
$$= \| MX \|^2$$
$$= \| f(x) \|^2$$

on munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique

donc $\langle x ; h(x) \rangle = \| f(x) \|^2$.

4) a) soit $x \in Ker(h)$, $h(x) = 0_{\mathbb{R}^n}$

$\langle x; h(x) \rangle = \langle x; 0_{\mathbb{R}^n} \rangle = 0$

alors $\|f(x)\|^2 = 0$ cf (3)
$\Rightarrow f(x) = 0_{\mathbb{R}^n}$
$\Rightarrow x \in Ker(f)$

Donc $x \in Ker(f)$

b) si $x \in Ker(f)$, $f(x) = 0$

donc $\|f(x)\|^2 = 0$

donc $\langle x; h(x) \rangle = 0$, $h(x) \in (\mathbb{R}^n)^{\perp} = \{0\}$

alors $h(x) = 0_{\mathbb{R}^n}$, $x \in Ker(h)$ (*)

D'après (*) et (4 4-a), $Ker(h) = Ker(f)$ (**)

h et f sont deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ (de dimension) finie alors d'après le théorème du rang,

$\dim(Ker(f)) + rg(f) = n$, $\dim(Ker(h)) + rg(h) = n$

or $Ker(f) = Ker(h)$

$\Leftrightarrow$ ~~rg~~ $rg(f) = rg(h) = r$ d'après l'énoncé et ~~dcdb~~ (**)

donc $rg(h) = r$.

5) a) $mat_{\mathcal{B}}(h) = {}^t M M$

${}^t M M$ est symétrique réelle donc diagonalisable

donc h est symétrique réelle donc diagonalisable

dans une ~~base~~ base orthonormée de vecteurs propres de h.

b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \in Sp(h)$, x un vecteur propre associé à λ

$h(x) = \lambda x$,

$\langle x, h(x) \rangle = \lambda \|x\|^2$ d'après (a 3),

$\lambda = \dfrac{\|f(x)\|^2}{\|x\|^2} \geq 0$, $\|x\|^2 \neq 0$

donc $Sp(h) \subset \mathbb{R}^+$.

6) P est la matrice de ~~base~~ passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}_1$ qui est orthonormée donc P est orthogonale.

${}^t M M$ est symétrique réelle donc diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres

donc il existe une matrice D diagonale telle que ${}^t M M = P D {}^t P$ où $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ où $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i \geq 0$ cf (5 b)

On utilise la matrice P car c'est une matrice de passage vers une base orthonormée de vecteurs propres de h (donc de ${}^t n n$)

7) n est symétrique réelle donc diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres

or $rg(n) = r$, d'où d'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(n)) = n - r$

Notons $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq r}$ les valeurs propres strictement positives de n

donc $\forall i \in [\![1;r]\!]$, $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$

et $\forall i \in [\![r+1;n]\!]$, $\lambda_i = 0$

donc $\forall i \in [\![r+1,n]\!]$, $\sigma_i = 0$.

8) D'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}({}^t m)) = n - r > 0$

$rg({}^t m m) = r$ cf (4-b)

donc D'après la 6),

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \} r \text{ fois} \\ \} n-r \text{ fois} \end{array}$$

donc D admet exactement r coefficients diagonaux non nuls.

Code épreuve : 295 | Nombre de pages : 42 | Session : 2022

Épreuve de : Maths S EMLyon

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

9) a) Soit $i \in [\![1;r]\!]$,

$f(\varepsilon_i) = \lambda_i \varepsilon_i$ cf (5.a)

or, par structure de D, ~~$\lambda_1 \ldots \lambda_r$~~

$\forall i \in [\![1;r]\!], \lambda_i > 0$ et $\varepsilon_i \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ Voir (8)

d'où $\forall i \in [\![1;r]\!], f(\varepsilon_i) \neq 0$

$\|f(\varepsilon_i)\|^2 = \langle \lambda_i \varepsilon_i ; \lambda_i \varepsilon_i \rangle = \lambda_i^2$

donc $\|f(\varepsilon_i)\| = \lambda_i$ $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

b) Soit $i \neq j$, $(i,j) \in [\![1;r]\!]$, $f(\varepsilon_i) \neq 0$, $f(\varepsilon_j) \neq 0$

$\langle u_i ; u_j \rangle = \cancel{\frac{1}{\|f(\varepsilon_i)\| \, \|f\|}} \frac{1}{\|f(\varepsilon_i)\|} \frac{1}{\|f(\varepsilon_j)\|} \langle f(\varepsilon_i) ; f(\varepsilon_j) \rangle$

par bilinéarité du produit scalaire $= \cancel{\frac{\lambda_i \lambda_j}{1}} \frac{1}{\|f(\varepsilon_i)\|} \frac{1}{\|f(\varepsilon_j)\|} \lambda_i \lambda_j \underbrace{\langle \varepsilon_i ; \varepsilon_j \rangle}_{=0}$

$= 0$ $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ base orthonormée

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

donc $\langle u_i ; u_j \rangle = 0$, si $i \neq j$

$\|u_i\|^2 = \langle u_i ; u_i \rangle$

$= \frac{1}{\underbrace{\|f(\varepsilon_i)\|^2}_{=\lambda_i^2}} \lambda_i^2 \underbrace{\|\varepsilon_i\|^2}_{=1}$ par bilinéarité du produit scalaire

cf (g.a)

$= 1$

donc ~~$\langle u_i$~~ $\|u_i\|^2 = 1$

donc $(u_1, \dots, u_r)$ est une famille orthonormée.

c) On peut compléter la famille $(u_1, \dots, u_r)$

par les vecteurs $(u_{r+1}, \dots, u_n)$

où les $u_{r+1}, \dots, u_n$ valent tous 0

car $\forall i \in$ ~~$[\![1;n]\!]$~~ $[\![r+1 ; n]\!]$, $\lambda_i = 0$

Dès lors la famille $(u_1, \dots, u_r, u_{r+1}, \dots, u_n)$ forment bien une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ (famille orthonormée libre et de cardinal $n = \dim(\mathbb{R}^n)$.

et où $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ pour $i \in [\![1;r]\!]$

et $\sigma_{r+1} = \dots = \sigma_n = 0$

donc il existe une base orthonormée B_2 de $\mathbb{R}^n$ telle que la matrice de f dans la B_1 et la base B_2 soit

est $= \mathrm{Diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = \mathrm{Diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r, \sigma_{r+1}, \dots \sigma_n)$

$= \mathrm{Diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r, 0, \dots, 0)$

10) Q est la matrice de passage de la base B à la base B_2 qui est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$

Donc Q est une matrice orthogonale.

Partie C :

12) Si M est inversible, alors $0 \notin Sp(M)$

donc $\forall i \in [\![1;r]\!]$, ~~$\Delta$~~

donc $M^{-1} = (Q\Delta {}^tP)^{-1} = {}^t(P)^{-1} \Delta^{-1} Q^{-1} = P\,\mathrm{Diag}(\frac{1}{\sigma_1}, \dots, \frac{1}{\sigma_r}, 0, \dots, 0)$
$= M^+$

or, ${}^tP^{-1} = P$, $Q^{-1} = {}^tQ$

et $\Delta^{-1} = \mathrm{diag}(\frac{1}{\sigma_1}, \dots, \frac{1}{\sigma_r}, 0, \dots, 0)$

l'inverse d'une matrice diagonale c'est seulement l'inverse des coefficients de la matrice de départ

donc si M est inversible, M^{-1} ~~A~~ $= M^+$.

Notons $\Delta' = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{\sigma_1}, \dots, \frac{1}{\sigma_r}, 0, \dots, 0\right)$

13) a) $\Pi\Pi^+ = Q\Delta \underbrace{{}^tPP}_{=I_n}\Delta' {}^tQ$ car P orthogonal

$= Q\Delta\Delta' {}^tQ$

$= Q\,\mathrm{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{r \text{ fois}}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-r \text{ fois}})\, {}^tQ$

donc $\Pi\Pi^+ = ~~Q~~ \; Q \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} {}^tQ$] r fois] n−r fois

---

b) $P \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$,

$p \circ p = \Pi\Pi^+\Pi\Pi^+ = Q\Delta \underbrace{{}^tPP}_{=I_n}\Delta' \underbrace{{}^tQQ}_{=I_n}\Delta \underbrace{{}^tPP}_{=I_n}\Delta' {}^tQ$

$= Q\Delta\Delta'\Delta\Delta' {}^tQ$

$= Q(\Delta\Delta')^2 {}^tQ = Q\Delta\Delta' {}^tQ = \Pi\Pi^+ = p$

or, $(\Delta\Delta')^2 = \Delta\Delta'$ voir 13.a) (Evident vu la structure de la matrice)

donc p est un projecteur

et ${}^t(\Pi\Pi^+) = {}^t(\Pi^+){}^t\Pi$

$= {}^t(P\Delta' {}^tQ)\, {}^t(Q\Delta {}^tP)$

$= Q\, {}^t\Delta' \underbrace{{}^tPP}_{=I_n} {}^t\Delta\, {}^tQ$, ${}^t\Delta' = \Delta'$, ${}^t\Delta = \Delta$

$= Q\Delta'\Delta {}^tQ$

$= Q\Delta\Delta' {}^tQ = \Pi\Pi^+$

donc $\Pi\Pi^+$ est une matrice symétrique réelle.

Code épreuve : 295	Nombre de pages : 42	Session : 2022

Épreuve de : MathsENLyon

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Suite 13) b) Donc p est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$ et un projecteur donc p est un projecteur orthogonal.

c) $MM^+ = Q\Delta\Delta' {}^tQ$

or, Q est une matrice orthogonale de plus MM' est symétrique réelle donc diagonalisable

donc MM^+ et $\Delta\Delta'$ sont semblables

or, deux matrices semblables ont mêmes rang

or, $\Delta\Delta' = \text{diag}(\underbrace{1,\dots,1}_{r \text{ fois}},\underbrace{0,\dots,0}_{n-r \text{ fois}})$

donc $rg(\Delta\Delta') = r$ donc $rg(MM^+) = r$. $(*)$

si $x \in Im(p)$, alors $\exists y \in \mathbb{R}^n$, $y = f(f^+(x)) \in Im(f)$

donc $Im(p) \subset Im(f)$

or $rg(f) = r$ (car $rg(M) = r$ et $M = Mat_B(f)$)
et $rg(h) = r$ (car $rg(MM^+) = r$ $(*)$ et $MM' = Mat_B(f)$)

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

donc $Im(p) \subset Im(f)$ et $rg(p) = rg(f)$

Conclusion : $Im(p) = Im(f)$

14) a) $f(x) \in \mathbb{R}^n$, car $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$

D'après le théorème de minimisation par caractérisation de la norme, l'unique vecteur qui minimise la distance de y à $\mathbb{R}^n$ est le projeté orthogonal de y sur $\mathbb{R}^n$ où $y \in \mathbb{R}^n \setminus Im(f)$

donc $\|y - p(y)\| \leq \|y - x\|$ où $x \in \mathbb{R}^n$
or $f(x) \in \mathbb{R}^n$

donc $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|y - p(y)\| \leq \|y - f(x)\|$. $(*)$

b) ~~En posant $x^+ = f^+(y) \in \mathbb{R}^n$ dans $(*)$~~

~~on a : $\|y -$~~ En posant $x^+ = f^+(y) \in \mathbb{R}^n$,

on a d'après $(*)$, $\|y - f(x^+)\| \leq \cancel{\min_{x \in \mathbb{R}}} \|y - f(x)\|$

d'où $\|y - f(x^+)\| = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|y - f(x)\|$ avec $x^+ = f^+(y) \in \mathbb{R}^n$
(théorème utilisé dans la 14-a)

15) a) $\cancel{\mathrm{Im}(f_1)}$ Notons $B=(e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$

$$\mathrm{Im}(f_1) = \mathrm{Vect}(f_1(e_1), f_1(e_2), f_1(e_3))$$
$$= \cancel{\mathrm{Vect}(-e_3, e_2, e_1+e_3)} = \mathrm{Vect}(-e_3, e_1, e_1+e_3)$$
$$= \cancel{\mathrm{Vect}(-e_3, e_2} \qquad = \mathrm{Vect}(e_1, e_3)$$

donc $\mathrm{Im}(f_1) = \mathrm{Vect}(e_1, e_3)$.

$y = e_1 + e_2 + e_3$ or, il y a un vecteur en trop (e_2) donc y n'est pas combinaison linéaire des seuls vecteurs e_1 et e_3 donc $y \notin \mathrm{Vect}(e_1, e_3) = \mathrm{Im}(f_1)$.

b) Soient $(x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3$,

$$\|y - f_1(x)\|^2 = \|y\|^2 - 2\langle y; f_1(x)\rangle + \|f_1(x)\|^2$$
$$= 1 - 2$$

Problème 2 :

Partie A :

1) $C_0 = 1 \times \binom{0}{0} = 1$

$C_1 = \frac{1}{2}\binom{2}{1} = \frac{1}{2} \times 2 = 1$

$C_2 = \frac{1}{3}\binom{4}{2}$

$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\,2!} = \frac{\cancel{1}\times\cancel{2}\times 3\times 4}{\cancel{1}\times\cancel{2}\times 1\times 2} = \frac{3\times 4}{2} = 6$

donc $C_2 = 2$

2)a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{1}{n+1} \times \frac{(2n)!}{(n!)^2}$

$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} - \frac{(2n)!}{(n+1)!\,(n-1)!}$$

$$= \frac{(2n)!}{(n!)^2} - \frac{(2n)! \times n^*}{(n+1)\,(n!)^2}$$

$$= \frac{(2n)!}{(n!)^2}\underbrace{\left(1 - \frac{n}{n+1}\right)}$$

$$= \frac{n+1-n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$.

Emplacement QR Code

Code épreuve : 295 | **Nombre de pages :** 44 | **Session :** 2022

Épreuve de : Maths-SEN Lyon

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

b) Soit $n \in \mathbb{N}$, $C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} \geq 0$

~~or $\binom{2n}{n} \geq \binom{2n}{n+1}$~~

car $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$

C_n est un entier comme différence de deux entiers

Supposons $C_n = 0$,

alors $\binom{2n}{n} = \binom{2n}{n+1}$

$\Rightarrow \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(2n)! \times n}{(n+1)\times(n!)^2} \Rightarrow \frac{(2n)!}{(n!)^2}\left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = 0$, $(2n)! > 0$

$\Rightarrow \frac{n}{n+1} = 1 \Rightarrow n = n+1$
(on divise et multiplie par $(2n)!$ et $(n!)^2 > 0$)
$\Rightarrow 1 = 0$, impossible

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, C_n est un entier naturel non nul

3) Soit $n \in \mathbb{N}$,

$C_{n+1} = \frac{1}{n+2}\binom{2n+2}{n+1}$

~~$= \frac{1}{(n+2)} \times \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} = \frac{1}{(n+2)} \times 2($~~

Soit $n \in \mathbb{N}$, $C_{n+1} = \binom{2n+2}{n+1} - \binom{2n+2}{n+2}$

$$= \frac{(2n+2)!}{(n+1)!^2} - \frac{(2n+2)!}{(n+2)!\,n!}$$

$$= \frac{(2n+2)!}{(n+1)!^2} - \frac{(2n+2)!\,(n+1)}{(n+2)(n+1)!^2}$$

$$= \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2}\left(1 - \frac{n+1}{n+2}\right)$$

$$= \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2} \times \frac{1}{(n+2)}$$

or, $\frac{2(2n+1)}{n+2} C_n = \frac{2(2n+1)}{(n+2)(n+1)} \times \frac{(2n)!}{(n!)^2}$

$$= \frac{(2n+2) \times \cancel{2}(2n+1) \times (2n)!}{\cancel{2}(n+1) \times (n+2)(n+1) \times (n!)^2}$$

$$= \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2 (n+2)} = C_{n+1}$$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $C_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2} C_n$.

5) a) $c_{n+1} - c_n = c_n\left(\frac{2(2n+1)}{(n+1)} - 1\right)$ cf (3)

$$= c_n\left(\frac{2(2n+1)-n-1}{(n+1)}\right)$$

$$= c_n\left(\frac{4n+2-n-1}{(n+1)}\right) \cancel{\geq}$$

$$= \underbrace{c_n\left(\frac{3n+1}{n+1}\right)}_{\geq 0}$$ car $c_n > 0$ et $\frac{3n+1}{n+1} \geq 0$

donc $c_{n+1} - c_n \geq 0$ la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante.

b) Raisonnons par l'absurde et supposons que ~~l~~ $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ

alors $\lim\limits_{n\to+\infty} c_{n+1} = \ell$

d'où $\ell = \frac{2(2n+1)}{n+2}\ell$

$$\cancel{\Rightarrow \ell\left(1 - \frac{2(n+1)}{n+2}\right) = 0}$$

$$\cancel{\Rightarrow \ell\left(\frac{n+2-2n-1}{n+2}\right) = 0}$$

$$\cancel{\Rightarrow \ell\left(\frac{1-n}{n+2}\right)} = 0$$

$$\ell\left(\frac{2(2n+1)}{n+2} - 1\right) = 0$$

$$\Rightarrow \ell\left(\frac{4n+\cancel{2}-n-\cancel{2}}{n+2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \ell\left(\frac{3n}{n+2}\right) = 0 \Rightarrow 3n\ell = 0$$

$$\Rightarrow \ell = 0 \text{, impossible}$$

car la suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est non nulle et croissante
elle ne peut pas converger vers 0

Absurde donc $(C_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge

et $\lim\limits_{n\to+\infty} C_n = +\infty$ car $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ~~pas~~ strictement positive et croissante.

6) a) $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $\dfrac{C_{k+1}}{C_k} = \dfrac{2(2k+1)}{k+2}$
$C_k > 0$

Code épreuve : 295	Nombre de pages : 42	Session : 2022

Épreuve de : maths 3 ENS Lyon

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

b) D'après la 6.a),

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ 4\left(\frac{k}{k+1}\right)^{3/2} \leq \frac{C_{k+1}}{C_k} \leq 4\left(\frac{k+1}{k+2}\right)^{3/2}$$

$$\Rightarrow 4^{n-1}\underbrace{\prod_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{k+1}\right)^{3/2}} \leq C_n \leq 4^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k+1}{k+2}\right)^{3/2}, \text{ telescopage}$$

$$= 4^{n-1} \times \left(\frac{1}{n}\right)^{3/2} \leq C_n \leq 4^{n-1}\left(\frac{2}{n}\right)^{3/2}, \text{ telescopage}$$

donc on a : $\frac{1}{4} \times \frac{4^n}{n\sqrt{n}} \leq C_n \leq \frac{4^{n-1} \times 2^{3/2}}{n\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{4^n}{n\sqrt{n}}$

$= \cancel{4^{n-1}} \times$

$\cancel{4^n}\ \frac{\sqrt{2}}{2} \times 4^n = \cancel{4^{n-1}}$

$\cancel{4^{n-1} \times 2^{3/2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 4^n = 4^{n-1} \times 2\sqrt{2} = 4^{n-1} \times 2^{3/2}$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \frac{1}{4}\frac{4^n}{n\sqrt{n}} \leq C_n \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{4^n}{n\sqrt{n}}$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

7) a) $T_n = \sum_{k=0}^{n} k C_k C_{n-k}$

$\Rightarrow T_n = \sum_{i=0}^{n} (n-i) C_{n-i} C_i$ on pose le changement de variable $i = n-k$ ($k = n-i$)

$= n \sum_{i=1}^{n} C_{n-i} C_i - T_n$

$= n S_n - T_n$ par définition de S_n

$\Rightarrow 2 T_n = n S_n$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_n = \frac{n}{2} S_n$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_{n+1} + S_{n+1}$

~~$= \frac{n+2}{2} S_{n+1} + S_{n+1} = \frac{n+4}{2} S_{n+2}$.~~

~~$C_{n+1} + 4T_n + 2S_n$~~

~~$= \frac{2(2n+1)}{n+2} C_n +$~~

~~$T_{n+1} = (n+1) C_{n+1} \sum_{k=0}^{n+1} k C_k C_{n+1-k}$~~

~~$= \sum (n+1) C_{n+1} + T_{n+1} \sum_{k=0}^{n} k C_k C_{n+1-k}$~~

donc $T_{n+1} + S_{n+1} = (n+1) C_{n+1} + T_n + S_{n+1}$

$= \cancel{2(n+1)(2n+} \cancel{(n+2)C_{n+1} + T_n}$

$\cancel{T_{n+1} = (n+1)C_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} k C_k C_{n+1-k}}$

$\cancel{T_{n+1} = \frac{n+1}{2} S_{n+1} = \frac{n+1}{2}\left(C_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} C_k C_{n+1-k}\right)}$

$\cancel{= \frac{(n+1)(2n+1)}{2n+2} C_n + \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-(k-1)}}$

$$T_{n+1} + S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} k C_k C_{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n+1} C_k C_{n+1-k}$$

$$= (n+1)C_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} k C_k C_{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n+1-k} + C_{n+1}$$

$$= (n+1)C_{n+1} + C_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} k C_k \frac{2(2(n-k)+1)}{n-k+2} C_{n-k} + \sum_{k=0}^{n} C_k \frac{2(2(n-k)+1)}{n-k+2} C_{n-k}$$

cf (3)

$$= (n+2)C_{n+1} + \frac{1}{n-k+2} \sum_{k=0}^{n} 4k(n-k) C_k C_{n-k} + \sum_{k=0}^{n} k C_k C_{n-k} \times \frac{2}{n-k+2} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n-k+2} 4 C_k (n-k) C_{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n-k+2} 2 C_k C_{n-k}$$

$= C_{n+1} + 4T_n + 2S_n$ cf (7.a)

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_{n+1} + S_{n+1} = C_{n+1} + 4T_n + 2S_n$

c) Montrons par récurrence simple que $\forall n \in \mathbb{N}$,
P_n : " $S_n = C_{n+1}$ "

$S_0 = C_0 = 1 = C_1$ cf (1)

donc P_0 Vraie

Supposons que pour un entier n fixé P_n Vraie,

$T_{n+1} + S_{n+1} = C_{n+2} + 4T_n + 2S_n$ cf (7-6)

$\Rightarrow \frac{n+1}{2} S_{n+1} + S_{n+1} = C_{n+1} + 2nC_{n+1} + 2C_{n+1}$

$\Rightarrow \frac{n+3}{2} S_{n+1} = C_{n+1} + 2nC_{n+1} + 2C_{n+1}$

$\Rightarrow S_{n+1} = \frac{2(2n+3)C_{n+1}}{n+3}$

$= \frac{2(2(n+1)+1)}{n+3} C_{n+1} = C_{n+2}$ cf (3)

donc P_{n+1} Vraie

par axiome de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = C_{n+1}$

Code épreuve : 295	**Nombre de pages :** 42	**Session :** 2022

Épreuve de : Maths 3 ENS Lyon

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Emplacement QR Code

8) a) Soit $x \in [-\frac{1}{4} ; \frac{1}{4}]$,

cf (6-b) $|C_n x^n| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{4^n |x|^n}{n\sqrt{n}} \leq \frac{\sqrt{2}}{2n^{3/2}}$, $|x|^n \leq (\frac{1}{4})^n$, $4^n|x|^n \leq 1$

or, $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{3/2}}$ en tant que série de Riemann convergente

donc par critère de comparaison de séries à termes positifs, $\sum_{n \geq 1} C_n x^n$ est absolument convergente

donc convergente donc $\sum_{n\geq 0} C_n x^n$ cvn pour $x \in [-\frac{1}{4} ; \frac{1}{4}]$

b) Soit $x \in [-\frac{1}{4} ; \frac{1}{4}]$,

$$\left(\sum_{i=0}^{N} C_i x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{N} C_j x^j\right) = \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{n} C_i C_j x^{i+j}$$

en posant $n = i+j$ intervension de somme finie $= \sum_{i=0}^{2N} \left(\sum_{j=0}^{n} C_k C_{n-k}\right) x^n$ (x) or, $\forall x \in [-\frac{1}{4} ; \frac{1}{2}]$, $\sum_{n \geq 1} c_n x^n$ converge

or, en faisant tendre N vers $+\infty$ dans (*), on a :

$$\cancel{(f(x))^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} c_k c_{n-k}\right) x^n}$$

$$\cancel{= \sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^{n-1}}$$

On a $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k}\right) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_{n+1} x^n$, $S_n = c_{n+1}$ cf (7)

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^{n-1}$$

$$= (f(x))^2$$

car $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ et que le produit ~~des~~ deux sommes allant jusqu'à ~~???~~ N correspond à f sans faire tendre $N \longrightarrow +\infty$

d'où $(f(x))^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^{n-1}$

c) $\forall x \in [-1;1]$, $(g(x))^2 = 4x^2 (f(x))^2$

toutes les séries en jeu convergentes $= \sum_{n=1}^{+\infty} 4 c_n x^{n+1}$

et $2g(x) - 4x = 4xf(x) - 4x$

$= 4x(f(x) - 1)$

$= 4x\left(\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n - 1\right)$ or, $c_0 = 1$

$= 4x\left(\sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^n + \cancel{c_0} - \cancel{1}\right)$

$= 4\sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^{n+1}$

d'où $\forall x \in [-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}]$, $(g(x))^2 = 2g(x) - 4x$

d) ~~$g(x)^2 - 2g(x) = -4x$~~

~~$g(x)(g(x) - 2)$~~

~~$(g(x))^2 = 4xf(x) - 4x$~~ cf (c)

~~$= 4x(f(x) - 1)$~~

~~$(g(x))^2 = 2g(x) - 4x$~~

~~$4x^2(f(x))^2 = 2g(x) - 4x$~~

~~$\Rightarrow 2x^2(f(x))^2 + 2x = g(x)$~~

Voir Page 42.

Partie B :

9) a) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos t)^2 dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t \times \cos t \, dt$

~~Considérons les fonctions $u : t \longmapsto \cos t$ et $v : t \longmapsto \sin t$~~
~~u et v sont~~

$(\cos t)^2 = \frac{1}{2}(1 - \sin(2t))$, $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin(2t)}{2} = [-\cos t]_{-\pi/2}^{\pi/2}$

or, $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos t)^2 dt = \frac{\pi}{2} + [\cos t]_{-\pi/2}^{\pi/2}$ par linéarité de l'intégrale

$= \frac{\pi}{2} + 0$

donc $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos t)^2 dt = \frac{\pi}{2}$.

Code épreuve : 295	Nombre de pages : 42	Session : 2022

Épreuve de : maths SEN Lyon

Emplacement QR Code

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

b) $t \longmapsto \sin t \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et réalise une bijection croissante de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1;1]$

alors le changement de variable est licite

et donc $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2}\,dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2\pi}\sqrt{4-4^2\sin^2 t}\,\cos t\,dt$ $\quad dx = 2\cos t\,dt$

$$= \frac{1}{\cancel{2}\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{4\cos^2 t}\,\cancel{dt}\,\cos t\,dt$$

$$= \cancel{2}\,\frac{1}{\pi} \times 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos^2 t)\,dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \times \pi = 1$$

donc $\displaystyle\int_{-2}^{2} \varphi(x)\,dx = 1$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

10) φ est définie et continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points

φ est à valeurs positives

et $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx = \int_{-2}^{2} \varphi(x)dx = 1$ car $\forall x \notin [-2;2]$, $\varphi(x) = 0$

donc φ est une densité d'une var réelle

10) $\forall n \in \mathbb{N}$, $X(\Omega) = [-2;2]$

$|X| \leq 2$

$|X|^n \leq 2^n$ or la variable certaine égale à 2^n admet une espérance

donc par domination de l'espérance, $E(|X|^n)$ existe

X admet donc un moment d'ordre n.

$x \mapsto x^{2n+1}\varphi(x)$ est impaire car φ est paire

donc $\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n+1} \varphi(x) dx$ converge et vaut 0

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $E(X^{2n+1}) = 0$

$g : x \longmapsto x^{2n} \varphi(x)$ est paire sur ~~D~~ $\mathbb{R}$

$E(X^{2n})$ existe et

$$E(X^{2n}) = \int_{-2}^{2} x^{2n}\varphi(x)\,dx = 2\int_{0}^{2} x^{2n}\varphi(x)\,dx$$ par parité de g

et par définition de φ, on a :

$\forall n \in \mathbb{N},\ E(X^{2n}) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{2} x^{2n}\sqrt{4-x^2}$.

b) i) $\mu_0 = E(1) = 1$

sinon $\mu_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{\cancel{-\infty}}^{2} \sqrt{4-x^2}\,dx$

$= \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\,dx = 1$

donc $\mu_0 = 1$

ii) Considérons les fonctions $u = x \longmapsto \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$ et $v = x \longmapsto \sqrt{4-x^2}$

u et v sont de classe C^1 sur $[0;2]$. Effectuons une intégration par parties

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_{0}^{2} x^{2n}\sqrt{4-x^2}\,dx = \left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\sqrt{4-x^2}\right]_0^2 + \int_0^2 \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

J'admets le résultat.

iii) Montrons par récurrence simple que $\forall n \in \mathbb{N}$ P_n : "$c_n = u_n$"

$c_0 = 1 = u_0$ donc P_0 vraie

Supposons que pour un entier n fixé P_n vraie

$u_{n+1} = \frac{2n+1}{3}(4c_n - u_{n+1})$ d'après l'hypothèse de récurrence

$\cancel{= \frac{3U_{n+1}}{2n+1} + u_{n+1} = \frac{4(2n+1)}{3}c_n}$

$\cancel{= \frac{3+(2n+2)u_{n+1}}{(2n+1)}}$

$u_{n+1} + \frac{2n+1}{3}u_{n+1} = \frac{4(2n+1)}{3}c_n$

$\Rightarrow \frac{1}{3}\left(2(n+2)\,u_{n+1}\right) = 4\,\frac{2(n+1)}{3}c_n$

$\Rightarrow \cancel{2}\,u_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2}c_n = c_{n+1}$ cf (3)

donc P_{n+1} vraie

d'où par axiome de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_n = u_n$.

Code épreuve : 295	Nombre de pages :	Session : 2022

Épreuve de : Maths S En Lyon

Emplacement QR Code

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie C :

~~b)~~

13) ~~$\{T = 2n+1\}$ signi~~

Si $T = 2n+1$ alors il y a eu $2n+1$ lancers effectués ~~pour~~ lorsqu'on a eu pour la première fois le même nombre de face que de pile mais ceci s'avère impossible car $\forall n \in \mathbb{N}$, $2n+1$ est un nombre impair donc non divisible par 2

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(T = 2n+1) = 0$

14) a) $e_n = Card(E_n)$ $d_n = Card(D_n)$

Tout résultat de D_n commence par une pile et se finit par un Face

~~P P P P P P P P~~
~~F F F F~~

il faut donc lors des $2n-2$ lancers que le nombre de piles soit supérieur où égal au nombre de face lors de

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

2n-3 lancers. Dès lors le nombre de pile sera strictement supérieur au nombre de face tout au long des (2n-1) premiers lancers

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $d_n = e_{n-1}$

b) i) J'admets cette question.

ii) $\forall n \in \mathbb{N}$, $e_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} d_k e_{n+1-k} = \sum_{k=1}^{n+1} d_k e_{n-(k-1)}$

$j = k-1$
($k = j+1$)

$= \sum_{j=0}^{n} d_{j+1} e_{n-j}$

k et j sont des variables muettes

$= \sum_{k=0}^{n} e_k e_{n-k}$ cf (14.a)

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $e_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} e_k e_{n-k}$

iii) Montrons par récurrence simple que :

$\forall n \in \mathbb{N}$, P_n : "$e_n = c_n$"

$e_0 = 1 = c_0$ donc P_0 vraie

Supposons que pour un entier n fixé P_n vraie

$e_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} e_k e_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k} = S_n = c_{n+1}$ cf (7.c)

donc P_{n+1} vraie

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $e_n = c_n$ (*)

c) ~~ER~~ si $T = 2n$ alors au $(2n)$! ème lancer, on a :
autant de piles que de face, soit n piles et n face
la probabilité d'avoir une pile est p, une face $1-p$
On commence nécessairement par une pile
donc par dénombrement,

$[T=2n] = 2\underbrace{\text{card}(E_{n-1})}_{=c_{n-1} \text{ cf } (*)} P(\text{avoir } n \text{ pile}) P(\text{avoir } n \text{ face})$

les lancers sont indépendantes

d'où $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(T=2n) = 2c_{n-1} p^n (1-p)^n$.

15) a/ $\forall x \in]-1;1[$, $|P(T=n)x^n| \leq |x|^n$

or, $\sum_{n\geq 0} |x|^n$ converge en tant que série géométrique convergente ~~donc~~ ~~par~~ donc par critère de $|x|<1$
comparaison de séries à termes positifs,

$\sum_{n\geq 0} P(T=n)x^n$ est absolument convergente

si $x = 1$, $x = -1$, cela marche car $\sum_{n\geq 0} P(T=n)$
converge et vaut 1
$\sum_{n\geq 0} P(T=n) = 1$

donc $\forall x \in [-1;1]$, $\sum_{n\geq 0} P(T=n)x^n$ converge.

b) $f : x \longmapsto x(1-x)$ est dérivable sur $]0;1[$
(c'est un polynôme)

$f'(x) = 1-2x$

$f'(x) \geq 0 \iff x \leq \frac{1}{2}$

donc f est croissante sur $[0;\frac{1}{2}]$ et décroissante sur $[\frac{1}{2};1]$ f admet un maximum en $\frac{1}{2}$

et $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$ (x)

donc $\forall x \in]0;1[$, $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$

or, $p \in]0;1[$, $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$.

$p = \frac{1}{2}$, $1-p = \frac{1}{2} \Rightarrow p(1-p) = \frac{1}{4}$

si $p(1-p) = \frac{1}{4}$ alors $p = \frac{1}{2}$ f(x)

donc $p(1-p) = \frac{1}{4} \iff p = \frac{1}{2}$.

c) $\forall x \in [0;1]$, $G_T(x) = P(T=0) + \sum_{n=1}^{+\infty} P(T=n)x^n$

$$= P(T=0) + \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} P(T=2n+1)x^{2n+1}}_{=0} + \sum_{n=1}^{+\infty} P(T=2n)x^{2n}$$

termes pairs et impairs
$P(T=2n+1) = 0$ cf (13)

$$= P(T=0) + \sum_{n=1}^{+\infty} 2C_{n-1}p^n(1-p)^n(x^2)^n \quad \text{cf (2.c)}$$

$$= P(T=0) + 2\sum_{n=1}^{+\infty} C_{n-1}(p(1-p)x^2)^n$$

$=$

Code épreuve : 295	**Nombre de pages :** 42	**Session :** 2022

Emplacement QR Code

Épreuve de : Maths S En Lyon

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Suite 15) c)

$$G_T(x) = P(T=0) + 2\sum_{n=0}^{+\infty} \left(p(1-p)x^2\right)^{n+1} C_n$$

$$= P(T=0) + 2\left(p(1-p)x^2\right) \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} C_n \left(p(1-p)x^2\right)^n}_{= \cancel{f(x)}\, f((p(1-p)x^2)^n}$$

or, $g((p(1-p)x^2)^n = 2(p(1-p)x^2) f((p(1-p)x^2)$

d'où $\forall x \in [-1;1]$, $G_T(x) = P(T=0) + g(p(1-p)x^2)$.

d) $\cancel{G_T(1)}$ $g(p(1-p)) = 1 - \sqrt{1-4p(1-p)}$ cf (8-c)

$$= 1 - \sqrt{1-4p+4p^2}$$
$$= 1 - \sqrt{(2p-1)^2}$$
$$= 1 - |2p-1|$$

or, $G_T(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(T=n) = 1$

et d'après la 15.c), en évaluant en 1, on a :

$1 = P(T=0) + 1 - \cancel{p}|2p-1|$. Donc $P(T=0) = |2p-1|$

si $p=\frac{1}{2}$, $P(T=0)=0$

~~si~~ donc on a jamais autant de ~~[illegible]~~ face que de pile lorsqu'on effectue un nombre infini de lancers lorsqu'il y a équiprobabilité dans le choix d'une pile et d'une face

16) a) si $p \neq \frac{1}{2}$

$\cancel{\frac{1}{4} \times 4^{n-1}}$

$2n P(T=2n) = 4n\, c_{n-1}\, p^n(1-p)^n$, pour $n \geqslant 2$,

d'après le A.6.b), on a :

$|2n P(T=2n)| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{4 \times 4^{n-1} \times p^n(1-p)^n}{(n-1)\sqrt{n-1}}$

$4^n (p(1-p))^n \leq 1 \implies (p(1-p))^n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$, $x \mapsto x^n$ croissante

$\leq \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{(n-1)\sqrt{n-1}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{n^{3/2}}$

or, $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge comme série de Riemann convergente

donc par critère de comparaison de séries à termes positifs, $\sum_{n \geqslant 0} 2nP(T=2n)$ est absolument convergente donc convergente donc si $p \neq \frac{1}{2}$, $E(T)$ existe si $p=\frac{1}{2}$, $(p(1-p))^n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$ cf (15.b)

donc $P(T=2n) = 2C_{n-1} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$

$\Rightarrow 2nP(T=2n) = 2C_{n-1}\left(\frac{1}{4}\right)^n n$

D'après le ~~A-6~~-b)

$\forall n \geq 2, \frac{1}{4} \times \frac{4^{n-1}}{(n-1)\sqrt{n-1}} \times 2n\left(\frac{1}{4}\right)^n \leq 2nP(T=2n)$

$\Rightarrow$ et $\frac{1}{4} \times \frac{4^{n-1}}{(n-1)\sqrt{n-1}} 2n\left(\frac{1}{4}\right)^n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{4n}}$.

$\frac{1}{4} \times \frac{4^{n-1}}{4^n} = \frac{1}{16}$ $\qquad \frac{n}{n-1} \xrightarrow[+\infty]{} 1$

or, $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{1/2}}$ diverge comme série de Riemann divergente $(\alpha = \frac{1}{2} < 1)$

donc par critère de comparaison de séries à termes positifs, $\sum_{n \geq 0} 2nP(T=2n)$ diverge

donc si $p=\frac{1}{2}$, $E(T)$ n'existe pas.

IMPRIMERIE NATIONALE – 2021-12-PF 018 751

Code épreuve : 295

Nombre de pages : 42

Session : 2022

Épreuve de : Maths En Lyon

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Problème 2.

Partie A :

8) d) On sait que $\forall x \in [\frac{-1}{4} ; \frac{1}{4}]$,

$(g(x))^2 = 2g(x) - 4x$ cf (8.c)

$\Rightarrow 4x^2(f(x))^2 - 4xf(x) + 4x = 0$

$\Rightarrow 4x^2(f(x))^2 + 4x(f(x)-1) = 0$

$\Rightarrow 4x(f(x))^2 + 4(f(x)-1) = 0$, $x \neq 0$

en faisant tendre x vers 0,

$4x^2(f(x))^2 = 2xf(x) - 4x$

$\Rightarrow 4\sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^{n+1} = 2x\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n - 4x$

8) d) En posant $\varepsilon : x \longmapsto -\frac{(-1-2xf(x))}{\sqrt{1-4x}}$

définie sur $[-\frac{1}{4} ; \frac{1}{4}[$, on a :

$\forall x \in [-\frac{1}{4} ; \frac{1}{4}]$, $g(x) = 1 + \varepsilon(x)\sqrt{1-4x}$

ε est continue sur $[-\frac{1}{4} ; \frac{1}{4}[$ comme quotient de deux fonctions continues sur $[-\frac{1}{4} ; \frac{1}{4}[$ dont le dénominateur ne s'annule jamais

/