Code épreuve : 295	Nombre de pages : 24	Session : 2022

Épreuve de : Mathémathématiques S emlyon

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Problème 1

Partie A :

Q1.a. On a :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

D'où : $A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Donc puisque $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, on a : $0 \in sp(A)$

Donc :

$\underline{A \text{ n'est pas inversible}}$

On a :

$$rg(A) = rg({}^tA)$$
$$= rg\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= rg\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Or $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont non-colinéaires du fait du 1er et 2ème coefficient

Donc : $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est libre d'où :

$$rg\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

Donc :

$$rg(A) = 2$$

Q1.b. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D'où :

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc :

$$A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D'où :

$$A^3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Donc :

$$A^3 - A^2 + A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc :

$$A^3 - A^2 + A = 0$$

Q1.b. On a donc, puisque $X^3 - X^2 + X$ un polynôme non-nul annulateur de A, en notant $Z_{\mathbb{R}}(X^3 - X^2 + X)$ l'ensemble des racines réelles de $X^3 - X^2 + X$:

$$sp_{\mathbb{R}}(A) \subset Z(X^3 - X^2 + X)$$

0 est racine évidente de $X^3 - X^2 + X$

De plus, le discriminant Δ de $X^2 - X + 1$ est :

$$\Delta = 1 - 4$$
$$= -3$$

Donc $X^2 - X + 1$ n'admet aucune solution réelle

D'où : $Z_{\mathbb{R}}(X^3 - X^2 + X) = \{0\}$

Or : $0 \in sp(A)$ d'après Q1.a.

Donc :

0 est l'unique valeur propre réelle de A

On a $rg(A) = 2$ donc, d'après le théorème du rang et puisque $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on a :

$$\dim(\mathrm{Ker}(A)) = 1$$
$$\neq 3$$

Or $\mathrm{Ker}(A)$ est l'unique sous-espace propre de A associé à une valeur réelle

Donc :

A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

Q2.a. On a :

$$B = {}^tAA \text{ d'où : } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc : $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Puisque B est symétrique, d'après le théorème spectrale, on a :

<u>B est diagonalisable</u>

Q2.b.i. On a :

$$^tRR = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ 2 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

D'où : $^tRR = I_3$

Donc : R est inversible et $R^{-1} = {}^tR$

Donc : <u>R est orthogonale</u>

Q2.b.ii. On a :

$$^tRBR = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ 2 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ 2 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc : <u>^tRBR est diagonale</u>

Code épreuve : 295 | Nombre de pages : 24 | Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques S emlyon

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

Partie B :

Q3. Soit $(x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2$ et $(X,Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ les matrices colonnes associées

On a :

$$\langle x \mid g(y) \rangle = {}^tX\,{}^tMY$$
$$= {}^t(MX)Y$$

Or : $\langle f(x) \mid y \rangle = {}^t(MX)Y$

Donc :

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ \langle x \mid g(y) \rangle = \langle f(x) \mid y \rangle$$

De même, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \langle x \mid h(x) \rangle = \langle x \mid (g \circ f)(x) \rangle$$
$$= {}^tX\,{}^tMMX$$
$$= \underbrace{{}^t(MX)MX}_{= \|f(x)\|^2}$$

D'où :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \langle x \mid h(x) \rangle = \|f(x)\|^2$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Q4.a. Puisque $x \in \ker(h)$, on a : $\langle x \mid h(x)\rangle = 0$

d'où : $\|f(x)\|^2 = 0$

Donc : $f(x) = 0$

Donc :

$$\underline{x \in \ker(f)}$$

Q4.b. Or :

$$\forall x \in \ker(f),\ h(x) = g(\underbrace{f(x)}_{=0})$$

$$= 0$$

Donc : $\forall x \in \ker(f),\ x \in \ker(h)$

En combinant Q4.a et ce qu'on vient de montrer, c'est-à-dire $\ker(h) \subset \ker(f)$ et $\ker(f) \subset \ker(h)$, on a :

$$\underline{\ker(h) = \ker(f)}$$

Or, puisque ${}^tMM \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $h \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, donc d'après le théorème du rang, on a :

$$n = \dim(\ker(h)) + rg(h)$$

$$\text{donc : } rg(h) = \underbrace{n - \dim(\ker(f))}_{= rg(f) \text{ d'après le théorème du rang}}$$

Or, puisque $M = Mat_{\mathcal{B}}(f)$, on a : $rg(f) = rg(M)$

Donc :

$$\underline{rg(h) = r}$$

Q5.a. On a : $Mat_{\mathcal{B}}(h) = {}^tMM$

Or : $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2$, $({}^tMM)[i,j] = \sum_{k=1}^{n} {}^tM[i,k]M[k,j]$

$$= \sum_{k=1}^{n} M[k,i]\underbrace{M[k,j]}_{= {}^tM[j,k]}$$

Or : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $({}^tMM)[j,i] = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{{}^tM[j,k]}_{= M[k,j]} M[k,i]$

$= ({}^tMM)[i,j]$

Donc : ${}^tMM$ est symétrique

Ainsi, d'après le théorème spectrale et puisque ${}^tMM = Mat_{\mathcal{B}}(h)$, on a :

h diagonalisable et il existe une base orthonormée $\mathcal{B}_1 = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de h

Q5. b. Soit $\lambda \in sp({}^tMM)$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre associé
Alors :

$${}^tMMX = \lambda X$$

d'où : ${}^tX\,{}^tMMX = \lambda\,{}^tXX$

donc : $\lambda = \frac{\|f(x)\|^2}{\|x\|^2}$ (licite car $X \neq 0$ donc $\|x\|^2 \neq 0$)

≥ 0

D'où :

$$sp({}^tMM) \subset \mathbb{R}_+$$

Donc :

$$sp(h) \subset \mathbb{R}_+$$

Q6. Puisque $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_1$ sont des bases orthonormées de $\mathbb{R}^n$ et que P est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}_1$, on a :

P est orthogonale

Ainsi, en posant $D = P^{-1}\,{}^tMMP$, on a :

$$D = Mat_{\mathcal{B}_1}(h)$$

Or, puisque $\mathcal{B}_1$ est composée uniquement de vecteurs propres de h, on a :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \exists \lambda_k \in \underbrace{\mathbb{R}_+}_{\text{car } sp(h) \subset \mathbb{R}_+} \ / \ h(\varepsilon_k) = \lambda_k \varepsilon_k$$

D'où :

$$\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+)^n \ / \ P^{-1}\,{}^tMMP = D \text{ avec } D = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

Donc, puisque P est orthogonale, on a :

$$\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+)^n \ / \ {}^tMM = PD\,{}^tP \text{ avec } D = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

Q7. ~~Puisque M est symétrique, d'après le théorème spectrale, M est diagonalisable et il existe $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n$ et Q une matrice orthogonale telle que :~~

~~$M = QD'\,{}^tQ$ avec $D' = diag(\mu_1, \dots, \mu_n)$~~

~~Donc : $M^2 = QD'^2\,{}^tQ$~~

~~D'où, puisque ${}^tMM = M^2$, d'après Q6., on a :~~

~~$PD\,{}^tP = QD'^2\,{}^tQ$~~

Puisque M est symétrique, d'après le théorème spectrale, M est diagonalisable et il existe $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n$ et Q une matrice orthogonale telle que :

$$M = QD'\,{}^tQ \text{ avec } D' = diag(\mu_1, \dots, \mu_n)$$

Donc : $\underbrace{M^2}_{= {}^tMM} = Q(D')^2\,{}^tQ$

Or : $(D')^2 = diag(\mu_1^2, \dots, \mu_n^2)$

Donc, on a :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \ \sigma_i = |\mu_i|$$

Or, il est clair que $sp(M) = \{\mu_1, \dots, \mu_n\}$ (avec répétitions éventuelles)

Donc : $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\} = \{|\lambda| \,;\, \lambda \in sp(M)\}$

Q8. Les coefficients diagonaux de la matrice D sont, comme nous l'avons vu, les valeurs propres de h.
Or : $rg(h) = r$ et avec le théorème du rang, on a :
$$\dim(\ker(h)) = n - r$$
Donc : $\exists (i_1, \dots, i_{n-r}) \in [\![1, n]\!]^{n-r}$ deux à deux distincts tels que : $(\varepsilon_{i_1}, \dots, \varepsilon_{n-r}) \in \ker(h)^{n-r}$
Donc $n-r$ coefficients diagonaux de D sont nuls exactement.

Donc :

D admet exactement r coefficients diagonaux non-nuls

Q9.a. On a, d'après D :

$$\forall i \in [\![1, r]\!],\ h(\varepsilon_i) = \lambda_i \varepsilon_i \neq 0$$
donc : $f(\varepsilon_i) \neq 0$ car sinon $h(e_i) = g(\underbrace{f(\varepsilon_i)}_{=0}) = 0$

Donc : $\forall i \in [\![1, r]\!],\ f(\varepsilon_i) \neq 0$

Avec Q3., il vient :

$$\forall i \in [\![1, r]\!],\ \|f(\varepsilon_i)\|^2 = \lambda_i \underbrace{\|e_i\|^2}_{=1}$$ car $\mathcal{B}_1$ est orthonormée

Donc :

$$\forall i \in [\![1, r]\!], \ \|f(e_i)\| = \sqrt{\lambda_i}$$

Q9. b. Soit $(i, j) \in [\![1, r]\!]^2$ distincts

On a :

$$\langle u_i | u_j \rangle = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j}} \underbrace{\langle f(\varepsilon_i) | f(\varepsilon_j) \rangle}$$

$= {}^tE_i {}^tMME_j$ en notant $(E_i, E_j) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$

$= \langle \varepsilon_i | h(\varepsilon_j) \rangle$ associés à $(\varepsilon_i, \varepsilon_j)$

$= \lambda_j \langle \varepsilon_i | \varepsilon_j \rangle$

$= 0$ car $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ distincts

$= 0$

Et : $\forall i \in [\![1, r]\!], \ \|u_i\| = \dfrac{\|f(\varepsilon_i)\|}{\|f(\varepsilon_i)\|}$

$= 1$

Donc :

$$\forall (i, j) \in [\![1, r]\!]^2, \ \langle u_i | u_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

Donc :

$(u_1, \dots, u_r)$ est une famille orthonormée

Q9. c. Soit $\mathcal{B}_2 = (u_1, \dots, u_r, \varepsilon_{r+1}, \dots, \varepsilon_n)$

Pour $i \in [\![1, r]\!]$, on a :

$$\forall j \in [\![r+1, n]\!], \ \langle u_i | \varepsilon_j \rangle = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \langle f(\varepsilon_i) | \varepsilon_j \rangle$$

$= 0$ (on l'admet)

Donc $\mathcal{B}_2$ est orthonormée car $(u_1, \dots, u_r)$ et $(\varepsilon_{r+1}, \dots, \varepsilon_n)$ sont orthonormée

Donc, puisque $\text{card}(\mathcal{B}_2) = n$, on a $\mathcal{B}_2$ une base de $\mathbb{R}^n$

Or :

- $\forall i \in [\![1, r]\!]$, $f(\varepsilon_i) = \underbrace{\sqrt{\lambda_i}}_{=\sigma_i} u_i$ car $u_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} f(\varepsilon_i)$

- $\forall i \in [\![r+1, n]\!]$, $f(\varepsilon_i) = 0$

Donc :

Il existe une base orthonormée $\mathcal{B}_1$ de $\mathbb{R}^n$ telle que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}_1$ vers la base $\mathcal{B}_2$ soit $\text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r, 0, \dots, 0)$

Q10. Q étant la matrice de passage d'une base orthonormée vers une autre base orthonormée, on a :

Q est orthogonale

On a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}}(f) = {}^tQM$$

Mais aussi :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}}(f) = \underbrace{\text{Mat}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1}(f)}_{= \Delta} \underbrace{\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}_1}(f)}_{= {}^tP}$$

D'où : ${}^tQM = \Delta\, {}^tP$

Puisque Q orthogonale, on a :

$$M = Q\Delta\, {}^tP$$

Q11. Soit $P_1 = R$, $Q_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \\ 3 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ et $\Delta_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Partie C :

Q12. Soit M inversible

Donc $rg(M) = n$

Donc :

$$M^+ = P\,\mathrm{diag}\left(\frac{1}{\sigma_1}, \dots, \frac{1}{\sigma_n}\right) {}^tQ \quad (\text{avec } \sigma_1, \dots, \sigma_n \text{ tous non-nuls})$$

Or :
$$MM^+ = Q\Delta \underbrace{{}^tPP}_{= I_n \text{ car } P \text{ orthogonale}} \mathrm{diag}\left(\frac{1}{\sigma_1}, \dots, \frac{1}{\sigma_n}\right) {}^tQ$$

$$= Q \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \sigma_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \frac{1}{\sigma_n} \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} \frac{\sigma_1}{\sigma_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \frac{\sigma_n}{\sigma_n} \end{pmatrix} = I_n} {}^tQ$$

$$= Q\,{}^tQ$$

$$= I_n \text{ car } Q \text{ orthogonale}$$

Donc : $\quad M^{-1} = M^+$

Q13. a. On a :

$$MM^+ = Q\Delta \underbrace{{}^tPP}_{= I_n} \mathrm{diag}\left(\frac{1}{\sigma_1}, \dots, \frac{1}{\sigma_r}, 0, \dots, 0\right) {}^tQ$$

$$= Q \underbrace{\Delta\, \mathrm{diag}\left(\frac{1}{\sigma_1}, \dots, \frac{1}{\sigma_r}, 0, \dots, 0\right)}_{= \begin{pmatrix} 1 & & & & (0) \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ (0) & & & & \ddots \; 0 \end{pmatrix} \; r \text{ fois}} {}^tQ$$

Donc :

$$MM^+ = Q \begin{pmatrix} \overbrace{1 \;\; \ddots \;\; 1}^{r \text{ fois}} & & (0) \\ & 0 & \\ (0) & & \ddots \; 0 \end{pmatrix} {}^tQ$$

Code épreuve : 295 | Nombre de pages : 24 | Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques S emlyon

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Q13. b. On a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = MM^+$$

D'où : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p^2) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p)^2$

$$= MM^{+2}$$

$$= Q\begin{pmatrix} 1 & & & & (0) \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ (0) & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} {}^tQ \underbrace{Q}_{} \begin{pmatrix} 1 & & & & (0) \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ (0) & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} {}^tQ$$

$= I_n$ car Q orthogonale

$$= Q\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & & (0) \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ (0) & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}^2}_{= \begin{pmatrix} 1 & & & & (0) \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ (0) & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}} {}^tQ$$

$$= MM^+$$

$$= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p)$$

Donc : $p^2 = p$

p étant une composition d'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, on a donc $p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ et, puisque $p^2 = p$, on a : p est un projecteur

De plus : ${}^t(MM^+) = {}^t\left(Q \begin{pmatrix} 1 & & & & (0) \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ (0) & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} {}^tQ \right)$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Donc :

$$^t(MM^+) = {}^t({}^tQ)\,{}^t\begin{pmatrix} 1 & & & & (0) \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ (0) & & & & \ddots \; 0 \end{pmatrix} {}^tQ$$

$$= Q \begin{pmatrix} 1 & & & & (0) \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ (0) & & & & \ddots \; 0 \end{pmatrix} {}^tQ$$

$$= MM^+$$

D'où : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p)$ est symétrique

Donc p est une symétrie donc, étant un projecteur, on a :

p est un projecteur orthogonal

Q13.c. On a :

$$rg(MM^+) = rg\left(Q\begin{pmatrix} 1 & & & & (0) \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ (0) & & & & \ddots \; 0 \end{pmatrix}{}^tQ\right)$$

$$= rg\begin{pmatrix} 1 & & & & (0) \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ (0) & & & & \ddots \; 0 \end{pmatrix}$$ car Q inversible et orthogonale (donc ${}^tQ = Q^{-1}$ est inversible)

(r fois)

Donc : $rg(MM^+) = r$

Donc : $rg(p) = rg(f)$

Or : $\mathrm{Im}(f \circ f^+) \subset \mathrm{Im}(f)$ d'où : $\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Im}(f)$

Donc : $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Im}(f)$ (car $rg(p) = rg(f)$)

Q14. a. Puisque $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel, la distance minimale de y à $\mathrm{Im}(f)$ se réalise, d'après le théorème de meilleure approximation, en le projeté orthogonale de y sur $\mathrm{Im}(f)$.

Autrement dit, q le projecteur orthogonale de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathrm{Im}(f)$, d'après le théorème de meilleure approximation, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \ \|y - q(y)\| \leqslant \|y - f(x)\|$$

Or p est le projecteur orthogonal de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathrm{Im}(f)$ d'après Q13., donc :

$$\underline{\forall x \in \mathbb{R}^n, \ \|y - p(y)\| \leqslant \|y - f(x)\|}$$

Q14. b. On a $(u_1, \ldots, u_r, \varepsilon_{r+1}, \ldots, \varepsilon_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$ et :

$$\forall i \in [\![1, r]\!], \ f(\varepsilon_i) = \sigma_i u_i \text{ et } \forall i \in [\![r+1, n]\!], f(\varepsilon_i) = 0$$

Donc $(u_1, \ldots, u_r)$ forme une base orthonormée de $\mathrm{Im}(f)$

Et donc : $\forall x \in \mathbb{R}^n, \ p(x) = \underbrace{\sum_{k=1}^{r} \langle x | u_k \rangle u_k}_{\in \mathrm{Im}(p)} + \underbrace{x - \sum_{k=1}^{r} \langle x | u_k \rangle u_k}_{\in \ker(p)}$

Donc :

$$\underline{\sum_{k=1}^{r} \langle y | u_k \rangle u_k \text{ répond au problème posé}}$$

Q15. a. ~~D'après A, on a :~~

$$\cancel{\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \ f(x,y,z) = (y+z, 0, x+z)}$$

On a : $\mathrm{Im}(f_1) = \mathrm{Vect}\big((0,0,-1), (1,0,0), (1,0,1)\big)$

Mais : $(0,0,-1) = (1,0,0) - (1,0,1)$

Donc : $\underline{\mathrm{Im}(f_1) = \mathrm{Vect}\big((0,0,-1), (1,0,0)\big)}$

Or : $y = -(0,0,-1) + (1,0,0) + (0,1,0)$

$\notin \text{Vect}((0,0,-1),(1,0,0))$

Donc : $y \in \text{Im}(f_1)$

Q15. b. On a :

$$\forall (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3,\ \|y - f_1(x_1,x_2,x_3)\|^2 = \|\underbrace{y - (x_2+x_3, 0, -x_1+x_3)}_{=-(x_2+x_3-1,\,1,\,x_1-x_3+1)}\|^2$$

D'où :

$$\forall (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3,\ \|y - f_1(x_1,x_2,x_3)\|^2 = (x_2+x_3-1)^2 + (x_1-x_3+1)^2 + 1$$

Code épreuve : 295 | Nombre de pages : 24 | Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques S emlyon

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Problème 2

Partie A :

Q1. On a :

$$c_0 = 1, \quad c_1 = 1 \quad \text{et} \quad c_2 = 2$$

Q2. a. On a : $c_0 = \underbrace{\binom{2\times 0}{0}}_{=1} - \underbrace{\binom{0}{1}}_{=0}$

Et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} - \underbrace{\frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!}}_{= \frac{(2n)!}{(n!)^2} \times \frac{n}{n+1}}$$

$$= \underbrace{\frac{(2n)!}{(n!)^2}}_{\binom{2n}{n}} \Big(\underbrace{1 - \frac{n}{n+1}}_{= \frac{1}{n+1}} \Big)$$

$$= \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}, \ c_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$

Q2. b. On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in [\![0, n]\!], \binom{n}{k} \leqslant \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$ (d'après le triangle de Pascal)

D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in [\![0, 2n]\!], \binom{2n}{k} \leqslant \underbrace{\binom{2n}{\lfloor \frac{2n}{2} \rfloor}}_{= \binom{2n}{n}}$$

Donc, pour $k = n+1$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \underbrace{\binom{2n}{n}}_{\in \mathbb{N}} - \underbrace{\binom{2n}{n+1}}_{\in \mathbb{N}} > 0$$ (strict car $n+1 \neq \lfloor \frac{2n}{2} \rfloor$)

Donc :

$$\underline{\forall n \in \mathbb{N}, c_n \in \mathbb{N}^*}$$

Q3. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_{n+1} = \frac{1}{n+2} \binom{2n+2}{n+1}$$

$$= \frac{1}{n+2} \frac{(2n+2)!}{(n+1)!^2}$$

$$= \frac{1}{n+2} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

$$= \underbrace{\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+2)(n+1)}} \underbrace{\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}}_{= c_n}$$

$$= \frac{2(n+1)(2n+1)}{(n+2)(n+1)}$$

Donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ c_{n+1} = \dfrac{2(2n+1)}{n+2}\, c_n}$

Q4.

```
function c = catalan(n)
    x = cumprod([1:2n])
    y = cumprod([1:n])
    c = x(2n)/((n+1)*(y(n))^2)
endfunction
```

Q5.a. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ c_{n+1} - c_n = \underbrace{\underbrace{\left(\underbrace{\frac{2(2n+1)}{n+2}}_{\geq 1} - 1\right)}_{\geq 0} \underbrace{c_n}_{\geq 0}}_{\geq 0}$$

Donc :

$\boxed{(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante}}$

Q5.b. Supposons par l'absurde que $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel (positif) ℓ

~~$(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante, on a donc~~ :

$\cancel{\forall n \in \mathbb{N},\ c_n \leq \ell}$

Or : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\underbrace{c_{n+1} - c_n}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \text{ car } (c_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}} = \left(\frac{2(2n+1)}{(n+2)} - 1 \right) \underbrace{c_n}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} P}$

Donc : $\frac{2(2n+1)}{(n+2)} - 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ ce qui est absurde

Car : $\frac{2(2n+1)}{n+2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 4$ donc $\frac{2(2n+1)}{(n+2)} - 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 3$

Donc :

$$\underline{(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverge}}$$

Q6.a. On a :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{c_{k+1}}{c_k} = \frac{2(2k+1)}{k+2}$$
$$= 4\left(\frac{k+\frac{1}{2}}{k+2}\right)$$

Q6.b. On a ainsi d'après Q6.a. (on admet ce résultat) :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \prod_{k=1}^{n-1} 4\left(\frac{k}{k+1}\right)^{\frac{3}{2}} \leqslant \underbrace{\prod_{k=1}^{n-1} \frac{c_{k+1}}{c_k}}_{} \leqslant \prod_{k=1}^{n-1} 4\left(\frac{k+1}{k+2}\right)^{\frac{3}{2}}$$
$$= \frac{c_n}{c_1}$$
$$= c_n \text{ car } c_1 = 1$$

Or : $\prod_{k=1}^{n-1} 4\left(\frac{k}{k+1}\right)^{\frac{3}{2}} = 4^{n-1} \underbrace{\frac{n!^{\frac{3}{2}}}{(n+1)!^{\frac{3}{2}}}}_{= \frac{1}{n\sqrt{n}}} = \frac{1}{4} \frac{4^n}{n\sqrt{n}}$

et de manière analogue : $\prod_{k=1}^{n-1} 4\left(\frac{k+1}{k+2}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{4^n}{n\sqrt{n}}$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{4} \frac{4^n}{n\sqrt{n}} \leqslant c_n \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{4^n}{n\sqrt{n}}$

Code épreuve : 295 | Nombre de pages : 24 | Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques S emlyon

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Q7. a. ~~On a~~ :

$$\cancel{\forall n \in \mathbb{N}, \quad T_n = \sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k}}$$

$$\cancel{= \sum_{k=0}^{n} \frac{(n-k) c_k c_{n-k}}{2}}$$

$$\cancel{= \sum_{k=0}^{n} \frac{n}{2} c_k c_{n-k} - \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2} c_k c_{n-k}}$$

On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; T_n = \sum_{k=0}^{n} k c_k c_{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (n-k) c_k c_{n-k}$$

~~sommation~~ ~~"descendante"~~ changement d'indice $i = n-k$

$$= n \underbrace{\sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k}}_{= S_n} - \underbrace{\sum_{k=0}^{n} k c_k c_{n-k}}_{= T_n}$$

D'où : $\forall n \in \mathbb{N}, \; T_n = \frac{n}{2} S_n$

Q7. b. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; T_{n+1} + S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} k c_k c_{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n+1} c_k c_{n+1-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k c_k \frac{2(2(n-k)+1)}{n-k+2} c_{n-k} + \sum_{k=0}^{n} c_k \frac{2(2(n-k)+1)}{n-k+2} c_{n-k}$$

$$+ (n+1) c_{n+1} + c_{n+1}$$

D'où :

$\forall n \in \mathbb{N}, T_{n+1} + S_{n+1} =$

Q7.c. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, la propriété :

$$P(n) : \text{« } S_n = c_{n+1} \text{ »}$$

- Au rang $n = 0$, on a :

$$S_0 = 1 \quad \text{et} \quad c_1 = 1$$

Donc : $S_0 = c_1$

Donc : $P(0)$ est vraie

- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie, montrons que $P(n+1)$ est vraie.

On a :

$$T_{n+1} + S_{n+1} = c_{n+1} + 4T_n + 2S_n$$

D'après Q7.a., on a :

$$\left(1 + \frac{n+1}{2}\right) S_{n+1} = c_{n+1} + (2n+2) \underbrace{S_n}_{= c_{n+1} \text{ d'après } P(n)}$$

d'où : $\left(\dfrac{n+3}{2}\right) S_{n+1} = (2n+3)\, c_{n+1}$

Donc : $S_{n+1} = \dfrac{2(2n+3)}{n+3} c_{n+1}$

$= c_{n+2}$ d'après Q3.

Donc : $P(n+1)$ est vraie

- On en déduit par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = c_{n+1}$$

Q8. a. D'après Q6. b., on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall N \in \mathbb{N}, \ \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{N} \frac{4^k}{k\sqrt{k}} x^k \leqslant \sum_{k=}^{N} c_n x^k \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{k=1}^{N} \frac{4^k}{k\sqrt{k}} x^k$$

Donc :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n \geqslant 0} c_n x^n$ converge $\Leftrightarrow \sum_{n \geqslant 0} \frac{(4x)^n}{n\sqrt{n}}$ converge

Or : $\forall x \in \mathbb{R}, \ \forall N \in \mathbb{N}, \left| \sum_{n=0}^{N} \frac{(4x)^n}{n\sqrt{n}} \right| \leqslant \sum_{n=0}^{N} (4x)^n$

Or : $\forall x \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[, \ 4x \in]-1, 1[$

Donc : $\forall x \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[, \ \sum_{n \geqslant 0} (4x)^n$ converge

Donc : Pour tout $x \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[, \ \sum_{n \geqslant 0} \frac{(4x)^n}{n\sqrt{n}}$ converge

Donc :

Pour tout $x \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[, \ \sum_{n \geqslant 0} c_n x^n$ converge

Q8. b. On a :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \ \left(\sum_{i=0}^{N} c_i x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{N} c_j x^j\right) = \sum_{(i,j) \in [\![0,N]\!]^2} c_i c_j x^i x^j$$

Or :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \ \sum_{n=0}^{2N} \sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k} x^n = \sum_{k=0}^{2N} \underbrace{\sum_{n=k}^{2N} c_k c_{n-k} x^n}_{= \sum_{n=0}^{2N-k} c_k c_n x^n x^k}$$

$$= \sum_{n=0} \sum$$