ECRICOME PREPA 2022 - ECT - Technologique

Mathématiques option technologique Mathématiques

AXEL

Note de délibération : 18.5 / 20

Prénom (s) AXEL

18.5 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques T.

Sujet ☒ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 01 / 06

Numéro de table 002

Exercice 1:
Partie A:

1a).PQ:

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \boxed{\begin{pmatrix} \underline{3} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}} \end{array}$$

→ pour justifier, j'ai calculée le résultat souligné en faisant l'opération : $1\times1 + 1\times2 + 0\times1 = 3$.

1b) $PQ = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \boxed{3I}$.

→ Donc $PQ = 3I$. ainsi, on a $P\times\frac{Q}{3} = I$.
alors $P \times \frac{1}{3}Q = I$.

→ La fonction P est inversible car multipliée à une matrice ($ici\ \frac{1}{3}Q$), le résultat est I. On sait aussi que

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.5 / 20

$P \times P^{-1} = I$. ainsi, $\boxed{P^{-1} = \frac{1}{3} Q}$

2a) D'après l'énoncé, $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. on a donc $X_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix}$

donc $X_{n+1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} a_n + \frac{1}{4} b_n + \frac{1}{4} c_n . \\ \frac{1}{4} a_n + \frac{1}{2} b_n + \frac{1}{4} c_n . \\ \frac{1}{4} a_n + \frac{1}{4} b_n + \frac{1}{2} c_n \end{pmatrix}$.

(en remplaçant les valeurs de X_{n+1})

$\rightarrow$ et $M X_n = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

$=$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} & \boxed{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} a_n + \frac{1}{4} b_n + \frac{1}{4} c_n \\ \frac{1}{4} a_n + \frac{1}{2} b_n + \frac{1}{4} c_n \\ \frac{1}{4} a_n + \frac{1}{4} b_n + \frac{1}{2} c_n \end{pmatrix}} \end{array} = \underline{X_{n+1}}.$$

pour calculer ce résultat, j'ai fait :

$\frac{1}{4} \times a_n + \frac{1}{4} \times b_n + \frac{1}{2} \times c_n = \underline{\frac{1}{4} a_n + \frac{1}{4} b_n + \frac{1}{2} c_n}$

2b). On pose $P(n) : X_n = M^n X_0$.

Initialisation : Au rang $n = 0$, $M^0 X_0 = M^0 X_0 = I X_0 = X_0$.
→ $P(0)$ est donc vraie.

Hérédité : On suppose qu'à un certain rang n, $X_n = M^n X_0$.
Montrons que $X_{n+1} = M^{n+1} X_0$.

D'après (2a), on a $X_{n+1} = M X_n$;

Et d'après (HR), $X_n = M^n X_0$.
On a alors : $X_n = M^n X_0$.

$$M \times X_n = M \times M^n X_0.$$
$$M X_n = M^{n+1} X_0.$$
$$\underline{X_{n+1} = M^{n+1} X_0}.$$

→ $P(n)$ entraîne $P(n+1)$.

Conclusion : $P(0)$ est vraie, $P(n)$ est héréditaire, donc pour tout n, $\underline{X_n = M^n X_0}$.

3a) * $4M - I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

* $4M - 4I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

→ ainsi, $(4M - I)(4M - 4I)$ =

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} = \boxed{0}$$

/ $(4M - I)(4M - 4I)$ est bien la matrice nulle.

3b) Ainsi, les valeurs propres possibles de M sont calculées par :

~~1 et~~ 4. ∘ $4X - 1 = 0 \iff 4X = 1 \iff \boxed{X = \frac{1}{4}}$

∘ $4X - 4 = 0 \iff 4X = 4 \iff \boxed{X = 1}$

Les valeurs propres possibles de M sont $\boxed{\frac{1}{4} \text{ et } 1}$

4a). soit $M = PDP^{-1}$

$P^{-1}M = P^{-1}PDP^{-1}$

$P^{-1}MP = DP^{-1}P$.

$D = P^{-1}MP$.

→ donc $D = \frac{1}{3} Q \times M \times P$.

$$D = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \times \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$= \begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \end{array}$$

18.5 / 20

Prénom (s) A X E L

Ecricome Épreuve : Mathématiques T.

Sujet ☒ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 02 / 06

Numéro de table 002

$D = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$= \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}}$

4b). On a $M = PDP^{-1}$, où : ∘ P est une matrice inversible.
∘ D est une matrice diagonale.

→ ainsi, $M^n = PD^nP^{-1}$.

4c)

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.5 / 20

On pose $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ donc $D^n = \boxed{\begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix}}$.

→ ainsi, on a : $PD^nP^{-1} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \left(\frac{1}{4}\right)^n & 0 \\ 1 & -\left(\frac{1}{4}\right)^n & \left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1 & 0 & -\left(\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix} \frac{1}{3}$$

$$= \boxed{\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 + 2\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n & 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n & 1 + 2\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n & 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n & \boxed{1 + 2\left(\frac{1}{4}\right)^n} \end{pmatrix}}$$

↳ pour calculer ce résultat, j'ai fait : $1 \times 1 - 2 \times -\left(\frac{1}{4}\right)^n$

$= 1 + 2\left(\frac{1}{4}\right)^n$

4d). On a d'après (2b) ; $X_n = M^n X_0$.

→ on a ainsi, en calculant $M^n X_0$:

car $X_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$.

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1+2\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1+2\left(\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix}.$$

→ $a_n = \frac{1}{3} \times \left(1+2\times\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) = \frac{1}{3}\left(1+2\times\frac{1}{4^n}\right) = \boxed{\frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{4^n}\right)}$

$b_n = \frac{1}{3}\times\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) = \boxed{\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)}$

et $c_n = \frac{1}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) = \boxed{\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)} = b_n$

4e) • $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{4^n}\right)$

→ on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\frac{2}{4^n} = 1$.

→ Par ~~somme~~ produit, on a $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{3}}$.

• $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \lim\limits_{n\to+\infty} c_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)$.

→ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-\frac{1}{4^n} = 1$

par produit, on a $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} b_n} = \boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = \frac{1}{3}}$

5) /.

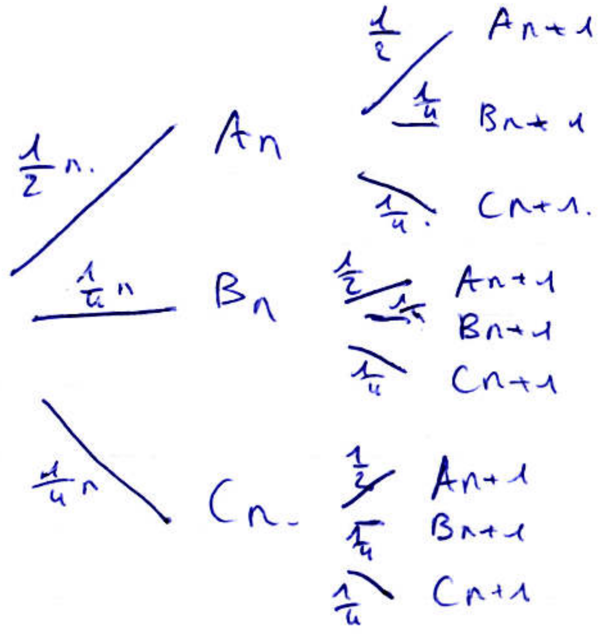
Partie B :

6). $P(A_0)=\boxed{1}$ / $P(B_0)=\boxed{0}$ / $P(C_0)=\boxed{0}$.

et $P(A_1)=\boxed{\frac{1}{2}}$ / $P(B_1)=\boxed{\frac{1}{4}}$ / $P(C_1)=\boxed{\frac{1}{4}}$.

(car si l'on tire 0, on tombe sur la case 0, et si l'on tire 3, on tombe sur la case 0.).

7a) : on a :



→ ainsi, $P_{A_n}(A_{n+1}) = \dfrac{P(A_n \cap A_{n+1})}{P(A_n)} = \dfrac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}n}{\frac{1}{2}n} = \boxed{\frac{1}{2}}$

Prénom (s) AXEL

18.5 / 20

ecricome Épreuve : Mathématiques T

Sujet ☒ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 03 / 06

Numéro de table 002

7b) : ~~On a donc~~ : ~~A_n~~ :

→ Pour calculer A_{n+1} : $\{A_n ; B_n ; C_n\}$ forme un système complet d'évènements ; on calcule la formule des probabilités totales
par.

- $A_{n+1} = P(A_n \cap A_{n+1}) + P(B_n \cap A_{n+1}) + P(C_n \cap A_{n+1})$.
  $= \frac{n}{4} + \frac{n}{8} + \frac{n}{8} = \frac{2n}{8} + \frac{n}{8} + \frac{n}{8} = \frac{4n}{8} = \frac{n}{2} = \boxed{\frac{1}{2}n}$
- $B_{n+1} = P(A_n \cap B_{n+1}) + P(B_n \cap B_{n+1}) + P(C_n \cap B_{n+1})$.
  $= \frac{n}{8} + \frac{n}{16} + \frac{n}{16} = \cancel{\frac{3}{8}}\ \cancel{\frac{3}{8}n} = \frac{2n+n+n}{16} = \frac{4n}{16} = \boxed{\frac{1}{4}n}$.
- $C_{n+1} = P(A_n \cap C_{n+1}) + P(B_n \cap C_{n+1}) + P(C_n \cap C_{n+1})$
  $= \frac{n}{8} + \frac{n}{16} + \frac{n}{16} = \boxed{\frac{1}{4}n}$

7c). D'après (4d), $a_n = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{4^n}\right) = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

→ on a ainsi $\boxed{P(A_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3}}$

on répète n fois le même tirage.

$\frac{1}{3}$ correspondent au nombre de cases dans la roue.

→ ~~j'admets que~~ donc $P(A_n), P(B_n), P(C_n)$ sont donnés par la Partie A, tels que $P(A_n) = a_n$, $P(B_n) = b_n$, $P(C_n) = c_n$.

$P(B_n) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4^n} = P(C_n)$.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.5 / 20

8) Ainsi, la limite de la probabilité de An sera $\boxed{\frac{1}{3}}$, tout comme celle de P(Bn) et P(Cn), en $+\infty$.

Exercice 2 :

1a) $\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} x \ln(1+x)$.

→ on a : $\lim_{x \to -1} x = -1$ et $\lim_{x \to -1} \ln(1+x) = -\infty$.

→ par produit, on a $\lim_{x \to -1} f(x) = \boxed{+\infty}$

Donc la courbe Cf admettra une asymptote verticale de tel que $Y = -1$.

1b) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x \ln(1+x)$

→ on a : $\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$.

et : $\lim_{x \to +\infty} \ln(1+x) = +\infty$

par produit, on peut déduire que $\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

1c) $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \ln(1+x) = \boxed{+\infty}$.

→ donc Cf admet une branche parabolique de direction $x = 0$.

2a). $f(x) = x \ln(1+x)$

↳ $f(x)$ est sous la forme : $x \times \ln(\overset{1+}{\underset{v}{x}})$

donc $u \times V$.

→ on sait que : $(u \times v)' = u'v + uv'$.

~~ainsi~~, on calcule u' et v' : $u = x$ / $u' = 1$.

$v = \ln(1+x)$ / $v' = \frac{u'}{u} = \frac{1}{1+x}$.

→ on a finalement $f'(x) = \boxed{\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}}$.

2b) : $f'(x) = \ln(1+x) + \frac{x}{1+x}$: $f'(x)$ est sous la forme :

$u + v$.

→ on sait que : $(u+v)' = u' + v'$.

on calcule u' et v' :

$u = \ln(1+x)$ / $u' = \frac{1}{1+x}$.

$v = \frac{x}{1+x}$ / $v' = \frac{1+x-x}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2}$

→ ainsi, $(u+v)' = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{1(1+x)}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{1+x+1}{(1+x)^2}$.

$= \boxed{\frac{x+2}{(1+x)^2}}$.

~~2a)~~ :

3b).

x	-1		0		$+\infty$
$\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}$		$-$	$0.$	$+$	
variations de f :	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

→ $f'(0) = 0$.

(je me suis trompé de question, les variations de $f'(x)$. se trouvent après cette question)

$\cancel{2a).\ f'(x) = \ln(1+x) + \frac{x}{1+x}\ /\ f'(0) = \ln(1) + 0 = \boxed{0}}$

~~x~~	~~-1~~	~~-2~~	~~$+\infty$~~
~~$x+2$~~		~~0~~	

$\cancel{\to x+2 = 0 \iff x = -2.}$

$\cancel{\to (x+1)^2 = 0}$

$\cancel{x^2 + 2x + 1 = 0}$

$\cancel{\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 1 = 0}$

$\cancel{x_1 = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2} = -1}$

2c)

x	-1 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$x+2$.	$+$
$(1+x)^2$	$+$
$f''(x)$.	$+$
$f'(x)$.	$-\infty \nearrow +\infty$.

$\to x+2 > 0$ quand $x \geq -1$.

$\to (1+x)^2 > 0$ car c'est un carré.

- $\lim\limits_{x \to -1} \underbrace{\ln(1+x)}_{\to -\infty} + \underbrace{\frac{x}{1+x}}_{\to 0} = \boxed{-\infty}$ (par somme).

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \underbrace{\ln(1+x)}_{\to +\infty} + \underbrace{\frac{x}{1+x}}_{\to 1} = \boxed{+\infty}$ (par somme)

~~Par la convexité : f est concave~~

Prénom (s) AXEL

18.5 / 20

ecricome Épreuve : Mathématiques T

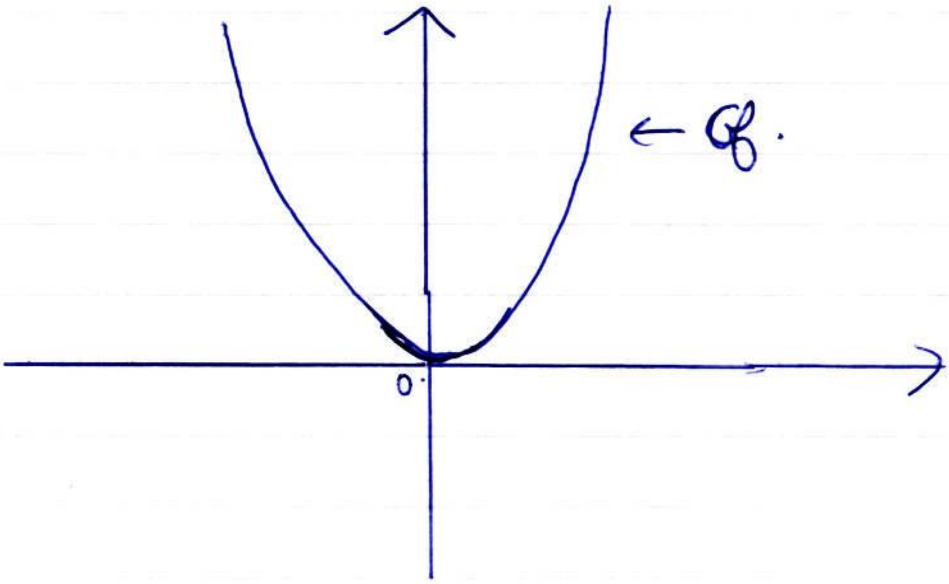
Sujet ☒ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 04 / 06

Numéro de table 002

4).



5). $I = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x\ln(1+x)dx.$

on pose : $u' = x$, $u = \frac{x^2}{2}$, $v = \ln(1+x)$, $v' = \frac{1}{1+x}$.

ainsi : $\int_0^1 f(x)dx = \left[\frac{x^2}{2}\times\ln(1+x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2+2x}dx$

$= \frac{1}{2}\times\ln(1+1) - (0) - \int_0^1 \frac{x^2}{2+2x} \cancel{= \frac{\ln(2)}{2} - \int_0^1 \frac{x^2}{2x+1}}$

$= \frac{\ln(2)}{2} - \int_0^1 \frac{1}{2}\times\frac{x^2}{1+x} = \boxed{\frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.5 / 20

5b). $x-1+\frac{1}{x+1} = \frac{x-1(x+1)}{x+1}+\frac{1}{x+1} = \frac{x^2+x-x-1+1}{x+1}$

$= \frac{x^2}{x+1}$

5c). $\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx = \int_0^1 x-1\,dx + \int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx.$

$= \left[\frac{x^2}{2}-x\right]_0^1 + \left[\ln(x+1)\right]_0^1.$

$= \left(\frac{1}{2}-1-0\right) + \ln 2 - \ln(1). = \frac{-1}{2}+\ln(2) = \boxed{\ln(2)-\frac{1}{2}}$

5d). $I = \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2}\left(\ln(2)-\frac{1}{2}\right) = \frac{\ln(2)}{2} - \frac{\ln(2)}{2} + \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{4}}$

6).
```
function y = f(x)
        y = x^n * log(1+x).
end function.
for n = [~~1~~; 5; 10; 20; 50].
    x = linspace (0, 1, 100).
fplot2d ( ~~xy~~ 0, 100).
end.
```

7a). On constate que In est une fonction qui, lorsque le n augmente, tendra vers $+\infty$ plus rapidement.

7 b). grâce au graphique, on déduit, que $\lim_{n \to +\infty} I_n = \cancel{+\infty}$

8 a). → on a : $0 \leq x \leq 1.$

$$1 \leq 1+x \leq 2. \quad +1$$

$$\ln(1) \leq \ln(1+x) \leq \ln(2) \quad \text{on ajoute la fonction } \ln.$$

$$0 \leq \ln(1+x) \leq \ln(2).$$

$$x^n 0 \leq x^n \ln(1+x) \leq x^n \ln(2) \quad \text{on multiplie par } x^n.$$

$$\boxed{0 \leq x^n \ln(1+x) \leq x^n \ln(2)}$$

8 b). on a : $0 \leq x^n \ln(1+x) \leq x^n \ln(2).$ on intègre entre 0 et 1

$$\int_0^1 0 \, dx \leq \int_0^1 x^n \ln(1+x) dx \leq \int_0^1 x^n \ln(2) dx$$

$$0 \leq I_n \leq \int_0^1 x^n \ln(2) \, dx$$

→ on calcule $\int_0^1 x^n \ln(2) dx = \ln(2) \int_0^1 x^n dx = \ln 2 \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$

$$= \ln(2) \left(\frac{1}{n+1} - 0\right) = \boxed{\frac{\ln(2)}{n+1}}$$

on a donc bien $\boxed{0 \leq I_n \leq \frac{\ln(2)}{n+1}}$

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n \Rightarrow$ ~~lim~~ on sait que : $\lim\limits_{n \to +\infty} 0 = 0$.

$\cdot \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\ln(2)}{n+1} = 0$, par croissance comparée.

→ en appliquant le théorème des gendarmes, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} 0 \leq \lim\limits_{n \to +\infty} I_n \leq \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\ln(2)}{n+1}$

$\boxed{\rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0.}$

Exercice 3 :

1). → sur $]-\infty ; 0[$, f est nulle, donc continue.
→ sur $[0 ; 2a]$, $f(x) = \frac{x}{2a^2}$, c'est un quotient d'une fonction affine et d'une constante, qui sont les deux continues.

de plus, on a $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} 0 = 0 \;/\; f(0) = \frac{0}{2a} = 0$.

→ comme la limite en 0 et $f(0) = 0$, on ~~a donc~~ sait alors que f est continue en 0.

pour la continuité en $2a$:

→ sur $[0 ; 2a]$, f est continue (d'après (1))
→ sur $]2a ; +\infty[$, $f(x) = 1$, donc elle est continue.

~~de plus, on a $\lim\limits_{x \to 2a} 1 = 1 \;/\; f(2a) = \frac{2a\,x}{2a^2}$.~~

Prénom (s) AXEL

18.5 / 20

ecricome Épreuve : Mathématiques T.

Sujet ☒ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 05 / 06

Numéro de table 002

de plus, on a : $\lim\limits_{x \to 2a} a = 0$ / $f(2a) = \frac{2a}{2a^2} = \frac{1}{2a}$.

→ f est continue par morceaux en $2a$.

2) ① Montrons que f est continue : d'après (1), f est continue par morceaux.

② Montrons que f est positive :

→ sur $]-\infty ; 0[$, f est nulle donc positive.

→ sur $[0 ; 2a]$, $f(x) = \frac{x}{2a^2}$ et pour tout $x \geq 0$, $f(x) \geq 0$.

→ sur $]2a ; +\infty[$, $f(x) = 0$, donc positive.

alors f est positive sur $\mathbb{R}$.

③ Montrons que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge et vaut 1 :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{2a} \frac{x}{2a^2}dx + \int_{0}^{+\infty} 0dx$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.5 / 20

$\rightarrow \int_{-\infty}^{0} 0dx = 0,$ et $\int_{2a}^{+\infty} 0dx = 0.$

$\rightarrow \int_{0}^{2a} \frac{x}{2a^2} dx = \frac{1}{2a^2} \int_{0}^{2a} x = \frac{1}{2a^2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{0}^{2a}.$

$= \frac{1}{2a^2} \left(\frac{(2a)^2}{2} \right) = \frac{1}{2a^2} \left(\frac{4a^2}{2} \right) = \frac{4a^2}{4a^2} = \boxed{1}$

$\rightarrow$ donc $\underset{\text{converge et vaut.}}{f(x)} = 0 + 1 + 0 = \boxed{1}$

f est une densité de probabilité.

3a). $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt.$

$\rightarrow$ si $x < 0$, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = \boxed{0.}$

$\rightarrow$ si $0 \leq x \leq 2a$, $F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{x} \frac{t}{2a^2} dt$

$= \frac{1}{2a^2} \left[\frac{t^2}{2} \right]_{0}^{x} = \frac{1}{2a^2} \left(\frac{x^2}{2} \right) = \boxed{\frac{x^2}{4a^2}}$

$\rightarrow$ si $x > 2a$, $F(x) = \boxed{1}$

$\rightarrow$ on a bien :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x^2}{4a^2} & \text{si } 0 \leq x \leq 2a \\ 1 & \text{si } x > 2a. \end{cases}$$

3b). $P_{[X > \frac{a}{2}]}(X \leq a) = \dfrac{P\left(\frac{a}{2} < X \leq a\right)}{P(X > \frac{a}{2})}$.

$\rightarrow$ on a : $P\left(\frac{a}{2} < X \leq a\right) = F(a) - F\left(\frac{a}{2}\right) =$

$$= \frac{a^2}{4a^2} - \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2}{4a^2} = \frac{1}{4} - \frac{\frac{a^2}{4}}{\frac{4a^2}{1}} = \frac{1}{4} - \frac{a^2}{16a^2}.$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$$

$\rightarrow$ et $P\left(X > \frac{a}{2}\right) = 1 - F\left(\frac{a}{2}\right) = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$

alors $P_{[X > \frac{a}{2}]}(X \leq a) = \dfrac{\frac{3}{16}}{\frac{15}{16}} = \dfrac{16 \times 3}{16 \times 5} = \boxed{\dfrac{3}{5}}$

4) $E(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} x 0\,dx + \int_{0}^{2a} x \times \frac{x}{2a^2}\,dx + \int_{2a}^{+\infty} 0\,dx$

$$= \frac{1}{2a^2} \int_0^{2a} x^2 = \frac{1}{2a^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{2a} = \frac{1}{2a^2}\left(\frac{(2a)^3}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{2a^2}\left(\frac{8a^3}{3}\right) = \frac{8a^3}{6a^2} = \frac{4a^3}{3a^2} = \boxed{\frac{4a}{3}}$$

5) $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$:

→ on a : $E(X) = \frac{4a}{3}$, donc $E(X)^2 = \left(\frac{4a}{3}\right)^2 = \boxed{\frac{16a^2}{9}}$

→ pour calculer $E(X^2)$, on ~~fait~~ calcule : $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx$.

$= \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{2a} x^2 \times \frac{x}{2a^2}\,dx + \int_{2a}^{+\infty} 0\,dx$.

$= \frac{1}{2a^2} \int_0^{2a} x^3 = \frac{1}{2a^2}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^{2a} = \frac{1}{2a^2}\left(\frac{(2a)^4}{4}\right)$

$= \frac{1}{2a^2}\left(\frac{16a^4}{4}\right) = \frac{16a^4}{8a^2} = \frac{2a^4}{a^2} = \boxed{2a^2} = E(X^2)$

→ on peut calculer $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.

$= 2a^2 - \frac{16a^2}{9} = \frac{18a^2 - 16a^2}{9}$

$= \boxed{\frac{2a^2}{9}}$

6).a) soit $G(Y) = P(Y \leq x)$. on a :

$P(X^2 \leq x) \Leftrightarrow P(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x})$.

~~→ on a, pour $x < 0$~~,

$G(x) = F(\sqrt{x}) - F(-\sqrt{x})$ et comme ~~Ax~~ $-\sqrt{x} < 0$, $G(x) = F(\sqrt{x})$..

ainsi :
- → ~~sur~~ si $x < 0$, $G(x) = 0$.
- → si $0 \leq x \leq 4a^2$, $G(x) = \frac{x}{4a^2}$.
- → si $x > 4a^2$, $G(x) = 1$.

donc → $G(x) = \frac{x}{4a^2}$ sur $[0, 4a^2]$.

Prénom (s) AXEL

18.5 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques T.

Sujet ☒ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 06 / 06

Numéro de table 002

6b) Y suit une loi uniforme.

6c) La commande rand() * 4 * a^2 simule ~~un réel~~ la fonction de répartition d'un réel situé sur l'intervalle [0, 1], lorsque $0 \leq x \leq 4a^2$

7a) ~~Tk~~ $b(T_n) = E(T_n) - a$.

et $E(T_n) = E\left(\frac{3}{4n} \sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{3}{4n} \sum_{k=0}^{n} E(X_k)$ (par linéarité).

$= \frac{3}{4n} \times E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \frac{3}{4n} \times \frac{4a}{3} n.$

$= \frac{3}{4n} \times \frac{4na}{3} = \frac{3a}{3} = a.$

$\rightarrow b(T_n) = a - a = 0$, donc T_n est un estimateur sans biais de A.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.5 / 20