ECRICOME PREPA 2022 - ECT - Technologique

Mathématiques option technologique Mathématiques

DAMIEN

Note de délibération : 19.5 / 20

Prénom (s) DAMIEN, JORIS

19.5 / 20

Écricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 01 / 07

Numéro de table 009

EXERCICE 1 :

Partie A :

On pose $M = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On note $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et $c_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ c_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n \end{cases}$$

On pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.5 / 20

1a) Calculons PQ :

$$PQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \boxed{3I}$$

1b) D'après 1a., on a $PQ = 3I$, d'où $\frac{1}{3}PQ = I$.

On en déduit donc que P est inversible et $\boxed{P^{-1} = \frac{1}{3}Q,}$ d'où $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

2a) On a $X_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix}$. Calculons MX_n :

$$MX_n = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2a_n + b_n + c_n \\ \cancel{b_n + 2b_n} \\ \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2a_n + b_n + c_n \\ a_n + 2b_n + c_n \\ a_n + b_n + 2c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}.$$

D'où $\boxed{X_{n+1} = MX_n.}$

2b) Par récurrence, on a :

. Hypothèse : Posons H_n : " $X_n = M^n X_0$ ".

. <u>Initialisation :</u> Pour $n=0$; $M^0 X_0 = I X_0 = X_0$.

Donc <u>H_0 est vraie.</u>

. <u>Hérédité :</u> Supposons que H_n soit vraie pour un certain rang n, c'est-à-dire ~~M^n~~ $X_n = M^n X_0$.

Montrons que H_{n+1} est vraie, c'est-à-dire $X_{n+1} = M^{n+1} X_0$. On a :

$X_{n+1} = M X_n$ <u>d'après 2a.</u>

$\Rightarrow X_{n+1} = M M^n X_0$ <u>d'après l'hypothèse de récurrence.</u>

$\Rightarrow X_{n+1} = M^{n+1} X_0$.

Donc <u>H_{n+1} est vraie.</u>

. <u>Conclusion :</u> $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{H_n \text{ est vraie}}$.

3a) ~~Développons $(4M-I)(4M-4I)$:~~

~~$(4M-I)(4M-4I) = 16M^2 - 16M - 4M$~~

~~Calculons $(4M-I)(4M-4I)$:~~

$$\cancel{(4M-I)(4M-4I) = \frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix} 8 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 4 \\ 4 & 4 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \times \frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix} 8 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 4 \\ 4 & 4 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\right]}$$

$$\cancel{= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 4 & 7 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \end{pmatrix} \times \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}}$$

Calculons $4M - I$:

$$4M - I = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Calculons $4M - 4I$:

$$4M - 4I = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{7}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

Calculons $(4M - I)(4M - 4I)$:

$$(4M - I)(4M - 4I) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{7}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{7}{2} \end{pmatrix} = 0_3$$

D'où $\boxed{(4M - I)(4M - 4I) = 0_3.}$

3b) D'après 3a, on a $(4M - I)(4M - 4I) = 0_3$.

Ainsi $P(X) = (4X - 1)(4X - 4)$ est un polynôme annulateur de M.

On en déduit que $\boxed{\frac{1}{4} \text{ et } 1}$ sont les valeurs propres possibles de M.

Prénom (s) DAMIEN, JORIS

19.5 / 20

Écricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 02 / 07

Numéro de table 009

4a) D'après 1b., on a $P^{-1} = \frac{1}{3} Q$. Donc P est inversible.

C'est pourquoi avec $M = PDP^{-1}$ avec D diagonale et $MP = PD$, on en déduit que M est diagonalisable.

Donc il va y avoir les valeurs propres de M, sur la diagonale de D, trouvées en 3b.

D'où $\cancel{D = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$ $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4b) D'après 4a., on a $M = PDP^{-1}$, d'où $\boxed{M^n = PD^nP^{-1}.}$

4c) D'après 4b., on a admis que $M^n = PD^nP^{-1}$.

Comme D est diagonale, $\cancel{D^n = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{4}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$

$D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.5 / 20

4c) Calculons M^n:

~~$M^n = PD^nP^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \left(\frac{1}{4}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$~~

~~$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \left(\frac{1}{4}\right)^n & 1 & 0 \\ \left(\frac{1}{4}\right)^n & -1 & 0 \\ \left(\frac{1}{4}\right)^n & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \left(\frac{1}{4}\right)^n + 2 \end{pmatrix}$~~

$$M^n = PD^nP^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & \left(\frac{1}{4}\right)^n & 0 \\ 1 & -\left(\frac{1}{4}\right)^n & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

~~$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix}$~~

Ma matrice D ne doit pas être exacte donc j'admet que $M^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1+2\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1+2\left(\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix}$.

4d) D'après 2b., on a $X_n = M^n X_0$, sachant que l'on a admis M^n en 4c.

L'énoncé nous indique que $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

Calculons $M^n X_0$:

$$M^n X_0 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1+2\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1+2\left(\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix}.$$

On a donc $X_n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix}.$

D'où $\begin{cases} a_n = \frac{1}{3}\left(1+2\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) \\ b_n = c_n = \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_n = \frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{4^n}\right) \\ b_n = c_n = \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right) \end{cases}$

4e) Calculons les limites des trois suites :

- $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{4^n}\right) = \boxed{\frac{1}{3} \text{ par produit}}$

↳ Car $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\frac{2}{4^n} = 1$ avec $\frac{2}{4} \in \left]-1;1\right[$.

- $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \lim\limits_{n\to+\infty} c_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right) = \boxed{\frac{1}{3} \text{ par produit}}$

↳ Car $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-\frac{1}{4^n} = 1$ avec $\frac{1}{4} \in \left]-1;1\right[$.

Donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \lim\limits_{n\to+\infty} c_n}$

5) Complétons le script Scilab :

```
n = 0
a = 1 ; b = [0]
while
    n =
    a = 1/3 * (1+2/4^n)
    b = [1/3 * (1 - 1/4^n)]
end
disp [(n)]
```

Partie B :

On note, $\forall n \in \mathbb{N}$, A_n : « à l'issue du $n^{ième}$ coup, le pion est sur la case 0 », B_n : « il est sur la case 1 » et C_n : « il est sur la case 2 ».

6) A_0 est l'événement certain, donc $\boxed{P(A_0) = 1.}$
B_0 et C_0 sont les événements impossibles, donc
$\boxed{P(B_0) = P(C_0) = 0.}$

$P(A_1)$ est la probabilité que le pion soit sur la case 1 au premier coup, d'où $\boxed{P(A_1) = \frac{1}{2}.}$

$P(B_1)$ est la probabilité que le pion soit sur la case ~~1~~ au premier coup, d'où $\boxed{P(B_1) = \frac{1}{4}.}$

Prénom (s) DAMIEN, JORIS

19.5 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 03 / 07

Numéro de table 009

6) $P(C_1)$ est la probabilité que le pion soit sur la case 2 au premier coup, d'où $\boxed{P(C_1) = \frac{1}{4}}$.

7a) $P_{A_n}(A_{n+1})$ est la probabilité que le pion est sur la case 0 au rang $n+1$ sachant qu'il y était au rang n.

Comme le joueur peut tirer un numéro compris entre 0 et 3 ~~, s'il est~~ de manière équiprobable, s'il est sur la case 0 en n, il doit tirer soit 0, soit 3 pour y être en $n+1$, d'où

$\boxed{P_{A_n}(A_{n+1}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}}$.

Comme $P_{A_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{2}$, on en déduit aisément que $\boxed{P_{B_n}(A_{n+1}) = P_{C_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{4}}$.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.5 / 20

7b) D'après la formule des probabilités totales dans la partition a_n, b_n et c_n, on a :

- $P(A_{n+1}) = P_{A_n}(A_{n+1}) \times P(A_n) + P_{B_n}(A_{n+1}) \times P(B_n) + P_{C_n}(A_{n+1}) \times P(C_n) = \boxed{\frac{1}{2}P(A_n) + \frac{1}{4}P(B_n) + \frac{1}{4}P(C_n).}$

- $P(B_{n+1}) = P_{A_n}(B_{n+1}) \times P(A_n) + P_{B_n}(B_{n+1}) \times P(B_n) + P_{C_n}(B_{n+1}) \times P(C_n) = \boxed{\frac{1}{4}P(A_n) + \frac{1}{2}P(B_n) + \frac{1}{4}P(C_n).}$

- $P(C_{n+1}) = P_{A_n}(C_{n+1}) \times P(A_n) + P_{B_n}(C_{n+1}) \times P(B_n) + P_{C_n}(C_{n+1}) \times P(C_n) = \boxed{\frac{1}{4}P(A_n) + \frac{1}{4}P(B_n) + \frac{1}{2}P(C_n).}$

7c) D'après la Partie A, on remarque que $P(A_{n+1}) = a_{n+1}$, $P(B_{n+1}) = b_{n+1}$ et $P(C_{n+1}) = c_{n+1}$.

D'après 4d. de la Partie A, on a :

- $P(A_n) = a_n = \boxed{\frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{4^n}\right).}$

- $P(B_n) = b_n = \boxed{\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right).}$

- $P(C_n) = c_n = \boxed{\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right).}$

8) D'après 4e., on a $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \lim\limits_{n \to +\infty} b_n = \lim\limits_{n \to +\infty} c_n = \frac{1}{3}$.

On en déduit donc que $\lim\limits_{n \to +\infty} P(A_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} P(B_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} P(C_n) = \frac{1}{3}$.

Ceci signifie que $P(A_n)$, $P(B_n)$ et $P(C_n)$ se rapproche de la valeur $\frac{1}{3}$ que n est très grand, ce qui est logique car ces évènements sont équiprobables.

EXERCICE 2 :

$\forall x \in]-1 ; +\infty[$, on pose $f(x) = x \ln(1+x)$.

1a) Calculons la limite de f en -1 :

$\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} x \ln(1+x) = \boxed{+\infty \text{ par produit.}}$

↳ Car $\lim\limits_{x \to -1} 1+x = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$ par composition.

Donc $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = -1$.

1b) Calculons la limite de f en $+\infty$:

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x \ln(1+x) = \boxed{+\infty \text{ par produit.}}$

1c) D'après 1b., $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Donc f admet une branche infinie.

Ainsi, $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x \ln(1+x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \ln(1+x) = \boxed{+\infty \text{ par composition.}}$

↳ Car $\lim_{x \to +\infty} 1+x = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$.

Donc on en déduit que $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des ordonnées (O_y).

2a) $\forall x \in]-1; +\infty[$, f est dérivable. Donc, sa dérivée, notée f', est définie sur $]-1; +\infty[$. Calculons $f'(x)$:

$$f'(x) = (x \ln(1+x))'$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} x + 1 \ln(1+x) = \frac{x}{1+x} + \ln(1+x)$$

Donc $\forall x \in]-1; +\infty[$, $\boxed{f'(x) = \frac{x}{1+x} + \ln(1+x)}$

2b) $\forall x \in]-1; +\infty[$, f' est dérivable. Donc, sa dérivée, notée f'', est définie sur $]-1; +\infty[$. Calculons $f''(x)$:

$$f''(x) = \left(\frac{x}{1+x} + \ln(1+x)\right)''$$

$$f''(x) = \frac{1+x-x+1+x}{(1+x)^2} = \frac{x+2}{(1+x)^2}.$$

Prénom (s) DAMIEN, JORIS

19.5 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 04 / 07

Numéro de table 009

2b) Donc $\forall x \in]-1, +\infty[$, $\boxed{f''(x) = \frac{x+2}{(1+x)^2}}$

2c) D'après 2b, $f''(x) = \frac{x+2}{(1+x)^2}$.

On a ~~$(1+x)^2 \geq 0$~~ $(1+x)^2 > 0$ $\forall x \in]-1; +\infty[$ car un carré est toujours positif.

Donc f'' est du signe de $x+2$. Mais, $\forall x \in]-1; +\infty[$, on remarque que ~~$x+2$~~ $x+2 > 0$. Ainsi f'' est de signe positif sur $]-1, +\infty[$ et ~~est~~ f' donc strictement croissante sur cet intervalle.

3a) Calculons $f'(0)$:

$f'(0) = \frac{0}{1+0} + \ln(1+0) = \boxed{\ln(1) = 0.}$

On remarque donc que comme $f'(0) = 0$, alors sur $]-1; 0]$, $f'(x) \leq 0$ et sur $]0; +\infty[$, $f'(x) > 0$.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.5 / 20

3b) D'après les questions précédentes, on obtient le tableau de variations suivant de f sur $]-1 ; +\infty[$:

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

5) On pose $I = \int_0^1 f(x)\,dx$.

5a) Par intégration par partie, on a :

$$I = \int_0^1 x\ln(1+x)\,dx \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l|l} u(x) = \ln(x+1) & v'(x) = x \\ u'(x) = \frac{1}{1+x} & v(x) = \frac{x^2}{2}. \end{array}$$

$$= \left[\frac{x^2\ln(1+x)}{2}\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}\,dx$$

$$= \boxed{\frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx.}$$

5b) $\forall x \in [0;1]$, calculons $x-1+\frac{1}{x+1}$:

$$x-1+\frac{1}{x+1} = \frac{(x-1)(x+1)+1}{x+1} = \frac{x^2-1+1}{x+1} = \frac{x^2}{x+1}.$$

Donc $\forall x \in [0;1]$, $\boxed{\frac{x^2}{x+1} = x-1+\frac{1}{x+1}.}$

5c) D'après 5b, $\frac{x^2}{x+1} = x-1+\frac{1}{x+1}$.

$$\text{Donc } \int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx = \int_0^1 x-1+\frac{1}{x+1}\,dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1|\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} - 1 + \ln(2) = \boxed{\ln(2) - \frac{1}{2}.}$$

5d) D'après 5a., $I = \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx$ et d'après 5c., $\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx = \ln(2) - \frac{1}{2}$.

On en déduit donc que $I = \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2}\left(\ln(2) - \frac{1}{2}\right) = \frac{\ln(2)}{2} + \frac{1}{4} - \frac{\ln(2)}{2} = \boxed{\frac{1}{4}}$.

6) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in]-1;+\infty[$, on pose $f_n(x) = x^n \ln(1+x)$.

D'où $I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$.

Complétons le script Scilab :

```
function y = f(x)
  y = [x * log(1+x)]
endfunction
for ~~n = x * log(~~ n=[1.]
    x = linspace(0,1,100)
    fplot2d [(n, style=1)]
end
```

7a) D'après le graphique, on remarque que I_n est semblable à l'aire d'un triangle rectangle.

7b) D'après le graphique, on peut conjecturer que $\lim_{n \to +\infty} I_n = \boxed{0}$.

Prénom (s) DAMIEN, JORIS

19.5 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 05 / 07

Numéro de table 009

8a) $\forall x \in [0;1]$, on a :

$$\cancel{0 \leqslant x \leqslant 1}$$
$$\cancel{\Leftrightarrow 1 \leqslant \ln(1+x) \leqslant 2}$$
$$\cancel{x^m \leqslant x^m \ln(1+x) \leqslant}$$
$$\cancel{\Leftrightarrow \ln(1) \leqslant}$$

$$0 \leqslant x \leqslant 1$$
$$\Leftrightarrow 1 \leqslant x+1 \leqslant 2$$
$$\Leftrightarrow \ln(1) \leqslant \ln(1+x) \leqslant \ln(2)$$
$$\Leftrightarrow x^m \times 0 \leqslant x^m \ln(1+x) \leqslant x^m \ln(2)$$
$$\Leftrightarrow 0 \leqslant x^m \ln(1+x) \leqslant x^m \ln(2)$$

Donc $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{0 \leqslant x^m \ln(1+x) \leqslant x^m \ln(2)}$

8b) D'après 8a., on a $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant x^m \ln(1+x) \leqslant x^m \ln(2)$.

D'où :

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.5 / 20

$$\int_0^1 0 \, dx \leqslant \int_0^1 x^n \ln(1+x)\, dx \leqslant \int_0^1 x^n \ln(2)\, dx$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \leqslant I_n \leqslant \ln(2) \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{\ln(2)}{n+1}.$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{0 \leqslant I_n \leqslant \frac{\ln(2)}{n+1}.}$

8c) D'après 8b., on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{\ln(2)}{n+1}$.

Calculons la limite de 0 et de $\frac{\ln(2)}{n+1}$ en $+\infty$:

- $\lim\limits_{n \to +\infty} 0 = 0$,
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\ln(2)}{n+1} = 0$ par quotient.

D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} 0 = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\ln(2)}{n+1} = \boxed{0.}$

On en déduit donc que $\lim I_n =$ $\boxed{0 \text{ par encadrement.}}$
et ce, d'après le théorème des gendarmes.

EXERCICE 3 :

Soit $a > 0$.

On pose la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{2a^2} & \text{si } 0 \leq x \leq 2a \\ 0 & \text{si } x > 2a \end{cases}.$$

1) Calculons la limite de f en 0 :

- $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} 0 = \underline{0}$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x}{2a^2} = \underline{0 \text{ par quotient}}$

Donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \boxed{0}$

Calculons $f(0)$:

$f(0) = \boxed{0}$ ou $f(0) = \frac{0}{2a^2} = \boxed{0.}$

Ainsi, comme $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$, f est
<u>continue en 0.</u>

Calculons la limite de f en 2a :

- $\lim\limits_{x \to 2a^-} \frac{x}{2a^2} = \boxed{\frac{1}{a} \text{ par quotient.}}$

- $\lim\limits_{x \to 2a^+} 0 = \boxed{0.}$

Ainsi, comme $\lim\limits_{x \to 2a^-} \neq \lim\limits_{x \to 2a^+}$, f n'est pas continue en 2a.

2). La positivité :

↳ $\frac{x}{2a^2} \geqslant 0$ sur $[0 ; 2a]$.

↳ Donc f est positive sur $\mathbb{R}$.

- La continuité :

↳ D'après 1, f est continue en 0. Elle est donc continue par morceaux en 0.

↳ D'après 1., f n'est pas continue en 2a. En revanche, elle est continue par morceaux en 2a.

↳ Donc f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

- La convergence :

↳ On a $\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx$ et $\int_{2a}^{+\infty} f(x)\,dx$ qui convergent vers 0.

Prénom (s) DAMIEN, JORIS

19.5 / 20

Ecricome Épreuve : Mathémathiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 06 / 07

Numéro de table 009

2) ↳ $\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^{2a} \frac{x}{2a^2}\,dx$

$$= \frac{1}{2a^2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{2a}$$

$$= \frac{1}{2a^2}\left(\frac{4a^2}{2} - 0\right) = \frac{4a^2}{4a^2} = \boxed{1.}$$

↳ Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge vers 1.

On en déduit que f est une densité de probabilité.

On note X une variable aléatoire de densité f.

3a) La fonction de répartition $F(x)$ est :

. Pour $x < 0$: $\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = 0.$

. Pour $0 \leqslant x \leqslant 2a$: $\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \int_0^x f(t)\,dt =$

$\int_0^x \frac{t}{2a^2}\,dt = \frac{1}{2a^2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x = \frac{1}{2a^2}\left(\frac{x^2}{2} - 0\right) = \frac{x^2}{4a^2}.$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.5 / 20

- Pour $x > 2a$: $\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{2a} f(t)\,dt + \int_{2a}^{x} f(t)\,dt =$

$\int_{0}^{2a} \frac{x}{2a^2}\,dx = \underline{1 \text{ d'après } 2.}$

D'où : $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^2}{4a^2} & \text{si } 0 \leq x \leq 2a \\ 0 & \text{si } x > 2a \end{cases}$

3B) Calculons $P_{[X > \frac{a}{2}]}(X \geq$ $P_{[X > \frac{a}{2}]}(X \leq a)$:

$$P_{[X > \frac{a}{2}]}(X \leq a) = \frac{P([X > \frac{a}{2}] \cap [X \leq a])}{P(X > \frac{a}{2})} = \frac{P(X \leq a)}{P(X > \frac{a}{2})}$$

$$= \frac{P(X \leq a)}{1 - P(X \leq \frac{a}{2})} = \frac{F(a)}{1 - F(\frac{a}{2})} \boxed{= \frac{1}{2a(1 - \frac{a}{4a^2})}}$$

4) Calculons $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$:

↳ $\int_{-\infty}^{0} x f(x)\,dx = \underline{0}$

↳ $\int_{0}^{2a} x f(x)\,dx = \int_{0}^{2a} \frac{x^2}{2a^2}\,dx = \frac{1}{2a^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{2a}$

$= \frac{1}{2a^2}\left(\frac{8a^3}{3} - 0\right) = \frac{8a^3}{6a^2} = \underline{\frac{4a}{3}}$

↳ $\int_{2a}^{+\infty} x f(x)\,dx = \underline{0.}$

Donc on en déduit que X admet une espérance et $E(X) = \frac{4a}{3}$ car $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$ converge ~~vers 0~~ vers $\frac{4a}{3}$.

5) Déterminons $E(X^2)$ avec le calcul $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx$.

↳ $\int_{-\infty}^{0} x^2 f(x)\,dx = \underline{0}$.

↳ $\int_{0}^{2a} x^2 f(x)\,dx = \int_0^{2a} \frac{x^3}{2a^2}\,dx = \frac{1}{2a^2}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^{2a}$

$$= \frac{16a^4}{8a^2} = \underline{2a^2}.$$

↳ $\int_{2a}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = \underline{0}$.

Donc X admet un moyen 2 et $E(X^2) = 2a^2$.
$E(X)$ et $E(X^2)$ existent donc $V(X)$ existe.
Ainsi, d'après la formule de Koenig-Huygens :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 2a^2 - \frac{16a^2}{9}$$

$$= \frac{18a^2 - 16a^2}{9} = \boxed{\frac{2a^2}{9}}.$$

6a) On note $Y = X^2$ et G la fonction de répartition de Y.

D'où : $G(x) = P(Y \leqslant x) = P(X^2 \leqslant x)$
$= P(X \leqslant \sqrt{x})$ ou $P(X \leqslant -\sqrt{x})$.

En reprenant $F(x)$ de 3a., on en déduit que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\sqrt{x} < 0 \\ \frac{\sqrt{x}}{2a^2} & \text{si } 0 \leqslant \sqrt{x} \leqslant 2a \\ 0 & \text{si } \sqrt{x} > 2a \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{\sqrt{x}}{2a^2} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 4a^2 \\ 0 & \text{si } x > 4a^2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{4a^2} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 4a^2 \\ 0 & \text{si } x > 4a^2 \end{cases}$$

6b) D'après 6a., $G(x)$ est la fonction de répartition d'une loi uniforme sur $[0 ; 4a^2]$.

Donc $Y \hookrightarrow \mathcal{U}[0 ; 4a^2]$.

6c) Si rand() simule le choix aléatoire d'un réel $\in [0 ; 1]$, rand()*4*a^2 simule le choix aléatoire d'un réel $\in [0 ; 4a^2]$.

6d) D'après la question précédente, pour simuler X, le script Scilab est rand()*(4*a^2)^1/2

Prénom (s) DAMIEN, JORIS

19.5 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 07 / 07

Numéro de table 009

7a) On pose $T_n = \frac{3}{4n} \sum_{k=1}^{n} X_k$.

On a $E(T_n) = \frac{3}{4n} \times nE(X_1) = \frac{3E(X_1)}{4}$

$= \frac{12a}{12} = a$.

D'où $b_a(T_n) = a - a = \boxed{0}$.

Donc T_n est un estimateur sans biais de a.

7b) On a $V(T_n) = \frac{9}{16n^2} \times nV(X_1) = \frac{9V(X_1)}{16n}$

$= \frac{18a^2}{16 \times 9n}$

D'où $r_a(T_n) = 0^2 + \frac{18a^2}{16 \times 9n} = \frac{18a^2}{16 \times 9n}$

$= \frac{2a^2}{16n} = \boxed{\frac{a^2}{8n}}$.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.5 / 20

7c) Complétons le script Scilab :

```
n = length (X) // longueur de X
T_n = mean(n) - m
disp (T_n)
```