ECRICOME PREPA 2022 - ECT - Technologique

Mathématiques option technologique Mathématiques

HUGO

Note de délibération : 19.3 / 20

Prénom (s) HUGO

19.3 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques I

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 01 / 07

Numéro de table 2829

Exercice 1:

1)

a) Calculons $P \times Q$:

$$PQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\underline{= 3I}$$

b) On obtient d'après la question 1.a : $PQ = 3I$
on peut donc en deduire et P est inversible si elle verifié

$$\underbrace{PQ\frac{1}{3}}_{} = I \qquad P \times P^{-1} = I$$

$$P \times P^{-1} = I$$

Donc $\underline{P^{-1} = \frac{1}{3} Q}$ soit $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.3 / 20

2.) a)

$\forall n \in \mathbb{N}$:

Soit $X_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} a_n + \frac{1}{4} b_n + \frac{1}{4} c_n \\ \frac{1}{4} a_n + \frac{1}{2} b_n + \frac{1}{4} c_n \\ \frac{1}{4} a_n + \frac{1}{4} b_n + \frac{1}{2} c_n \end{pmatrix}$$

et $M \times X_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1/2\, a_n + 1/4\, b_n + 1/4\, c_n \\ 1/4\, a_n + 1/2\, b_n + 1/4\, c_n \\ 1/4\, a_n + 1/4\, b_n + 1/2\, c_n \end{pmatrix} = X_{n+1}$$

Donc $X_{n+1} = M X_n$

b)

Posons H_n : $X^n = M^n X_0$

Initialisation : Soit $n \geq 0$

$X_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $M^0 X_0 = I \times X_0$
$= X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2

Donc H_0 est vrai pour $n = 0$

<u>Hérédité</u> : Supposons H_n vrai pour un certain rang n montrons que H_{n+1} est vrai

D'après la question 2c nous avons : $X_{n+1} = MX_n$

On peut déduire :

$$X_{n+1} = MX_n$$

$$X_{n+1} = M \times M^n X_0 \quad \text{(- hypothèse de récurrence)}$$

$$X_{n+1} = M^{n+1} X_0$$

Donc H_{n+1} est vraie

<u>Conclusion</u> : Donc d'après le principe de récurrence H_n est vrai $\forall n \in \mathbb{N}$.

3)

a)

<u>Calculons : $4M - I$:</u> $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculons $4M - 4I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Donc $(4M-I)(4M-4I) =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \underline{O_3}$$

b)

On peut deduire de la question precedente que $(4X-1)(4X-4)$ est un polynôme annulateur de M

Les racines du polynome sont donc les valeurs propres possibles de M:

$4x - 1 = 0$ et $4x - 4 = 0$

$4x = 1$ $\qquad$ $4x = 4$

$x = \frac{1}{4}$ $\qquad$ $x = 1$

Donc $\underline{\frac{1}{4}}$ $\underline{\text{et } 1}$ sont des valeurs propres possible de M

4) a)

Montrons :

$M = PDP^{-1}$

$MP = PD$

$$MP = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 0 \\ 1 & -1/4 & 1/4 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Prénom (s) HUGO

19.3 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques T

Sujet 1 ou 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 02/07

Numéro de table 2829

Nous pouvons donc deduire

que $PD = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 0 \\ 1 & -1/4 & 1/4 \\ 1 & 0 & -1/4 \end{pmatrix}$

Par identification des coefficient on obtient

$a = 1$

$b = 1/4$ donc $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

$c = 1/4$

b)

On peut poser $M^n = PD^nP^{-1}$

avec $D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & (1/4)^n & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{1}{4})^n \end{pmatrix}$

car diagonale

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.3 / 20

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix} \times P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \left(\frac{1}{4}\right)^n & 0 \\ 1 & -\left(\frac{1}{4}\right)^n & \left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1 & 0 & -\left(\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix} \times P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \left(\frac{1}{4}\right)^n & 0 \\ 1 & -\left(\frac{1}{4}\right)^n & \left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1 & 0 & -\left(\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1+2\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1-\frac{1}{4}^n & 1+2\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1+2\left(\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix}$$

d)

Posons $\forall n$: $\begin{cases} a_n = \frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{4^n}\right) \\ b_n = \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right) \\ c_n = \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right) \end{cases}$

Initialisation : soit $n=0$, $\begin{cases} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{cases} = \begin{cases} 1 \\ 0 \\ 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} 1/3\left(1+\frac{2}{4^0}\right) \\ 1/3\left(1-\frac{1}{4^0}\right) \\ 1/3\left(1-\frac{1}{4^0}\right) \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{3}\times 3 \\ \frac{1}{3}\times 0 \\ \frac{1}{3}\times 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 \\ 0 \\ 0 \end{cases}$ 6

Donc H_0 est vrai pour $n = 0$

Hérédité : Supposons H_n vraie pour un certain rang n montrons que H_{n+1} est vraie.

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + \frac{1}{4} b_n + \frac{1}{4} c_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{4} a_n + \frac{1}{2} b_n + \frac{1}{4} c_n \\ c_{n+1} = \frac{1}{4} a_n + \frac{1}{4} b_n + \frac{1}{2} c_n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{4^n}\right)\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right)\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right)\right) \\ b_n = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{4^n}\right)\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right)\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right)\right) \\ c_n = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{4^n}\right)\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right)\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right)\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{6}\left(1 + \frac{2}{4^n}\right) + \frac{1}{12}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right) + \frac{1}{12}\left(1 - \frac{4}{4^n}\right) \\ b_{n+1} = \frac{1}{12}\left(1 + \frac{2}{4^n}\right) + \frac{1}{12}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right) + \frac{1}{12}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right) \\ c_{n+1} = \frac{1}{12}\left(1 + \frac{2}{4^n}\right) + \frac{1}{12}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right) + \frac{1}{12}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

Initialisation :

e)

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{4^n}\right) = \frac{1}{3}$$ (par somme et produit)

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right) = \frac{1}{3}$$ (par somme et produit)

5)

```
   n = 0
   a = 1  ; b = 0
while : a =< 0,334 ; b =< 0,333
      n = n+1
      a = 1/3 *(1+ 2/4^n)
      b = 1/3 *(1 - 1/4^n)
end
disp(a)
disp(b)
```

Prénom (s) HUGO

19.3 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques T

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 03 / 07

Numéro de table 2829

Partie B

6)

$P(A_0)$ est la probabilité que le pion soit sur la case 0 au rang 0.
donc $\underline{P(A_0) = 1}$

$P(B_0)$ est la probabilité que le pion soit sur la case 1 au rang 0
donc $\underline{P(B_0) = 0}$

$P(C_0)$ est la probabilité que le pion soit sur la case 2 au rang 0
donc $\underline{P(C_0) = 0}$

$P(A_1)$ est la probabilité que le pion soit sur la case 0 au rang 1 donc soi en ayant $k=0$ ou $k=3$
donc

$P(A_1) = 1 \times \frac{2}{4} + \frac{1}{2} \ldots$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.3 / 20

$P(B_1)$ est la probabilité que le pion soit sur la
la case 1 au rang 1 donc en ayant $k = 1$
Donc $P(B_1) = 1 \times \frac{1}{4}$
$= \frac{1}{4}$

$P(C_1)$ est la probabilité que le pion soit sur la case
2 au rang 1 donc en ayant $k = 2$
Donc $P(C_1) = 1 \times \frac{1}{4}$
$= \frac{1}{4}$

7)

- $P_{A_n}(A_{n+1})$: correspond à la probabilité que le pion soit sur la case 0 au rang n+1 sachant qu'il était au rang n

donc au rang n il doit soi avancé de 0 cases ou de 3
or $P(R=0) = \frac{1}{4}$ et $P(R=3) = \frac{1}{4}$

Donc $P_{A_n}(A_{n+1}) = P((R=0) \cup (R=3))$
$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$P_{B_n}(A_{n+1})$: correspond à la probabilité que le pion soit sur la case 0 au rang n+1 sachant qu'il était

au rang n sur la cas 1
Donc il doit avancer de deux case

$P_{B_n}(A_{n+1}) = P(k = 2) = \frac{1}{4}$

• $P_{C_n}(A_{n+1})$ correspond à la probabilite que le pion soit sur la case 0 au rang $n+1$ sachant qu'il était sur la case 2 au rang n il doit donc avancer d'une case

$P_B(A_{n+1}) = P(k=1)$
$= \frac{1}{4}$

b)

Soit A_n ; B_n ; C_n trois évènements qui forment une partition :

$P(A_{n+1}) = P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n) \times P_{C_n}(A_{n+1})$
$= \frac{1}{2} P(A_n) + \frac{1}{4} P(B_n) + \frac{1}{4} P(C_n)$

$P(B_{n+1}) = P(B_n) \times P_{B_n}(B_{n+1}) + P(C_n) \times P_{C_n}(B_{n+1}) + P(A_n) \times P_{A_n}(B_{n+1})$
$= \frac{1}{4} P(A_n) + \frac{1}{\cancel{2}} P(B_n) + \frac{1}{4} P(C_n)$

$P(C_{n+1}) = \cancel{P}(A_n) \times P_{A_n}(C_{n+1}) + P(B_n) \times P_{C_n}(B_{n+1}) + P(C_n) \times P_{C_n}(C_{n+1})$
$= \frac{1}{4} P(A_n) + \frac{1}{4} P(B_n) + \frac{1}{2} P(C_n)$

c)

On à dans la partie A :

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + \frac{1}{4} b_n + \frac{1}{4} c_n \\ b_n = \frac{1}{4} a_n + \frac{1}{2} b_n + \frac{1}{4} c_n \\ c_n = \frac{1}{4} a_n + \frac{1}{4} b_n + \frac{1}{2} c_n \end{cases}$$

En remplaçant $\overbrace{\;}^{\text{respectivement}}$ a_n ; b_n ; c_n par $P(A_n)$; $P(B_n)$; $P(C_n)$

On obtient : $\begin{cases} \frac{1}{2} P(A_n) + \frac{1}{4} P(B_n) + \frac{1}{4} (P(C_n) \\ \frac{1}{4} P(A_n) + \frac{1}{2} P(B_n) + \frac{1}{4} P(C_n) \\ \frac{1}{4} P(A_n) + \frac{1}{4} P(B_n) + \frac{1}{2} P(C_n) \end{cases}$

donc $\begin{cases} P(A_{n+1}) \\ P(B_{n+1}) \\ P(C_{n+1}) \end{cases}$

8)

D'après la question 4 e on peut donc interpréter que :

Plus on va répéter notre expérience aléatoire plus la probabilité de A_n ; B_n ; C_n va tendre vers $\frac{1}{3}$

Prénom (s) HUGO

19.3 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques T

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 04 / 07

Numéro de table 2829

Exercice 1:

1) a)

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim x \ln(1+x)$$

or $\lim_{x \to -1} x = -1$ $\lim_{x \to -1} \ln(1+x) = -\infty$

Donc $\underline{\lim_{x \to -1} f(x) = +\infty}$ (par produit)

On peut déduire que la courbe C_f admet une <u>asymptote verticale</u> en -1

b)

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x \ln(1+x)$$

$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$ $\lim_{x \to +\infty} \ln(1+x) = +\infty$

Donc $\lim f(x) = +\infty$ (par produit)

13

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.3 / 20

c)

$\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique car elle se trouve encadre par deux asymptote une vertical lorsque x tend vers 1 et une oblique lorsque x tend vers $+\infty$

Pour trouver la direction asymptotique on calcule $\frac{f(x)}{x}$

Donc $\frac{f(x)}{x} = \frac{x \ln(1+x)}{x}$

$= \underline{\ln(1+x)}$

Donc $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction $\underline{y = \ln(1+x)}$

2) a)

$\forall x \in]-1; +\infty[$

$f'(x) = 1 \times \ln(1+x) + \frac{1}{1+x} \times x$

$f'(x) = \underline{\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}}$

b)

Partons de $f'(x) = \ln(1+x) + \frac{x}{1+x}$

$$f''(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1 \times (1+x) - (1 \times x)}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{1+x}{(1+x)^2} + \frac{1+x-x}{(1+x)^2}$$

$$= \underline{\frac{2+x}{(1+x)^2}} = \frac{x+2}{(1+x)^2}$$

c) *

x	-1		$+\infty$
$x+2$		$+$	
$(1+x)^2$		$+$	
signe $f''(x)$	$\|\|$	$+$	
variations de f'		$\nearrow$	

* les variations de f' sont données grace a l'étude du signe de sa dérivé

$x + 2 = 0$

$x = -2$

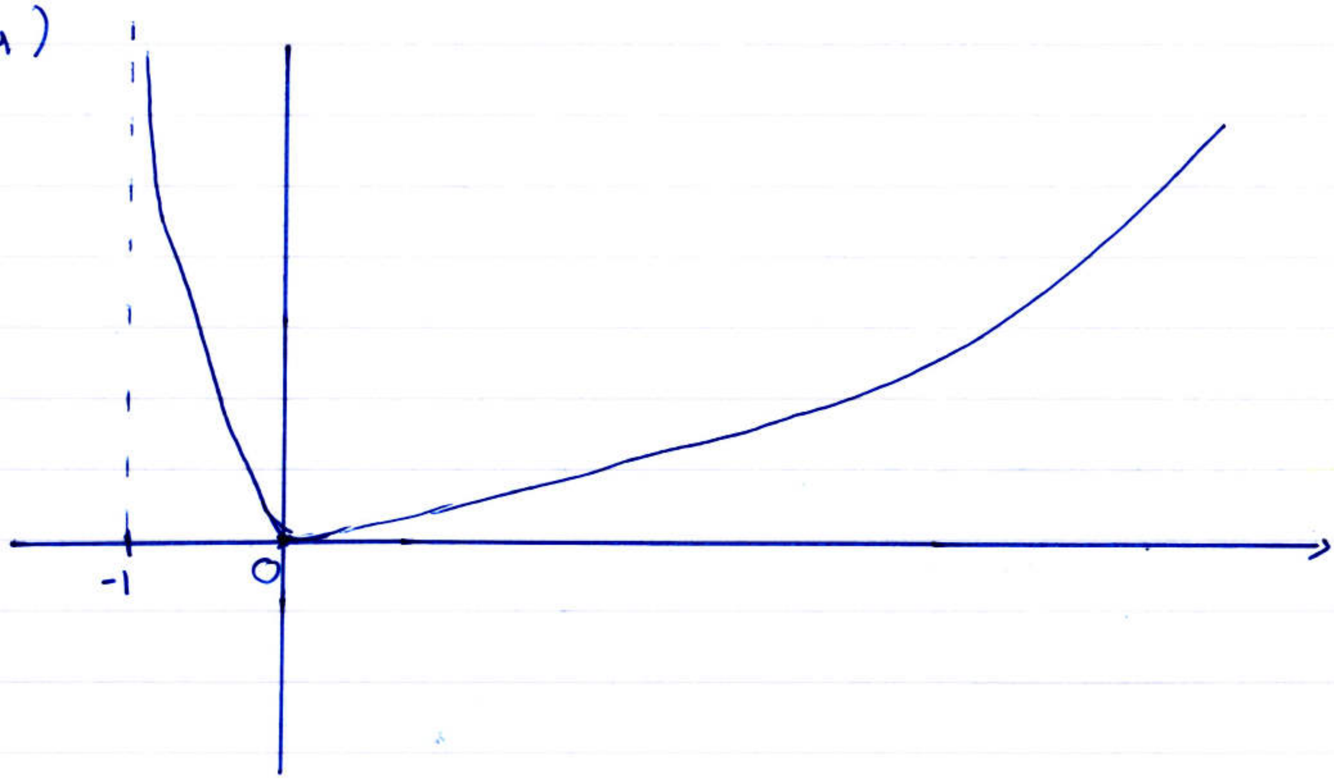
3) a)

$$f'(0) = \ln(1+0) + \frac{0}{1+0} = \ln(1) = \underline{0}$$

Donc pour tout $x > -1$ $f(x)$ est négative sur $]-1;0]$ et positive sur $[0;+\infty[$

x	-1		0		$+\infty$
signe $f'(x)$		$-$	0	$+$	
variations de f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4)



Prénom (s) HUGO

19.3 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques T

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 05 / 07

Numéro de table 2829

5)

a)

$$I = \int_0^1 x \ln(1+x)\,dx$$

posons $u' = x$ $\quad u = \frac{x^2}{2}$

$v = \ln(1+x)$ $\quad v' = \frac{1}{1+x}$

$$I = \left[\frac{x^2}{2} \times \ln(1+x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2} \times \frac{1}{1+x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2} \times \ln(2) - 0 - \int_0^1 \frac{x^2}{2(1+x)}\,dx$$

$$= \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}\,dx$$

b)

Partons de : $x - 1 + \frac{1}{x+1}$

$$\Leftrightarrow \frac{x(x+1)}{x+1} - \frac{x+1}{x+1} + \frac{1}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+x-x-1+1}{x+1} \Leftrightarrow \frac{x^2}{x+1}$$

17

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.3 / 20

Donc $\frac{x^2}{x+1} = x-1+\frac{1}{x+1}$

c) $\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx = \int_0^1 x-1+\frac{1}{x+1}\,dx$

$= \left[\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1) \right]_0^1$

$= \frac{1}{2} - 1 + \ln(2) - 0$

$= -\frac{1}{2} + \ln(2)$

d)
On deduit d'apres la question precedente :

$I = \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} + \ln(2)\right)$

$= \frac{\ln(2)}{2} + \frac{1}{4} - \frac{\ln(2)}{2}$

$= \frac{1}{4}$

Ainsi $I = \frac{1}{4}$

6)

```
    function y = f(x)
 y = x^n * log(1+x)
end function
for n = 1
 x = linspace (0, 1, 100)
 fplot2d (y , f(x))
end
```

7)

a)

In pour tout $n \in \mathbb{N}$ semble monter rapidement pour être majoré par 0,7 et plus n est élevé plus la courbe semble augmenter lentement

b)

Lorsque In tend vers $+\infty$ on peut conjecturer

$$\lim_{n \to +\infty} I_n = 1$$

8)

a) On part de :

$$0 \leq x \leq 1$$

On compose pour prouver l'inegalite

$$0 \leq x \leq 1$$

$$1 \leq x+1 \leq 2$$

$$\ln(1) \leq \ln(x+1) \leq \ln(2)$$

$$0 \leq \ln(x+1) \leq \ln(2)$$

$$0 \leq x^n \ln(x+1) \leq x^n \ln(2)$$

Lorsque on multiplie par x^n - le sens des inegalites est conservé

car $x \in [0;1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$
Donc $x^n \geq 0$

D'après la
8a) on a :

$$0 \leq x^n \ln(1+x) \leq x^n \ln(2)$$

$$\int_0^1 0 \, dx \leq \int_0^1 x^n \ln(1+x) \, dx \leq \int_0^1 x^n \ln(2) \, dx$$

Les inégalités sont conservées par positivité de l'intégrale

$$0 \leq I_n \leq \ln(2) \int_0^1 x^n \, dx$$
$$0 \leq I_n \leq \ln(2) \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$$
$$0 \leq I_n \leq \ln(2) \left[\frac{1}{n+1} - 0\right]$$
$$0 \leq I_n \leq \frac{\ln(2)}{n+1}$$

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} 0 = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\ln(2)}{n+1} = 0$

Or on sait que $0 \leq I_n \leq \frac{\ln(2)}{n+1}$
donc d'après le théorème d'encadrement
on peut déduire que
<u>la limite de I_n est 0</u>

Prénom (s) HUGO

19.3 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques T

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 06 / 07

Numéro de table 2829

Exercice 3

1) f est continue en 0 en effet lorsque $x = 0$ f est égale à 0 or 0 est une fonction constante.

Lorsque x est égale à $2a$ f est égale à : $\frac{2a}{2a^2}$

$= \frac{1}{2a}$

Donc $\frac{1}{2a}$ est continue si $a \neq 0$ or on sait que a est strictement positif donc $\frac{1}{2a}$ est continu

2)

- f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ avec un nombre fini de points de discontinuité et les limites à gauche et à droite qui converges vers une limite finies.
- f est positif sur $\mathbb{R}$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)_{dx} = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{2a} \frac{x}{2a^2}\,dx + \int_{2a}^{+\infty} 0\,dx$

(par relation de Chasles)

21

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.3 / 20

$$\cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 0 + \int_0^{2a} \frac{x}{2a^2}dx + 0.$$

$$= \frac{1}{2a^2}\int_0^{2a} x\,dx$$

$$= \frac{1}{2a^2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{2a}$$

$$= \frac{1}{2a^2}\left[\frac{(2a)^2}{2} - 0\right]$$

$$= \frac{1}{2a^2}\left[\frac{4a^2}{2}\right]$$

$$= \frac{1 \times 4a^2}{4a^2} = 1$$

Donc $f(x)$ converge en 1

par morceaux

Ainsi f est continue ; positive et converge vers 1 il s'agit donc d'une densité de probabilité

3)

$F(X)$ est défini sur $\mathbb{R}$ car elle admet aucune valeur interdite en effet :

$0 \Rightarrow$ est continue

$\frac{x^2}{4a^2} \Rightarrow$ est continue car $4a^2 \neq 0$ car a strictement positif

$1 \Rightarrow$ est également continue

(22)

b)
$$P_{(X>\frac{a}{2})}(X<a) = \frac{P(X>\frac{a}{2} \cap X\leq a)}{P(X>\frac{a}{2})}$$

$$= \frac{(1-P(X<\frac{a}{2}))\times P(X\leq a)}{1-P(X<\frac{a}{2})}$$

$$= \frac{\left(1-\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2}{4a^2}\right)\times\frac{a^2}{4a^2}}{\left(1-\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2}{4a^2}\right)}$$

$$= \frac{a^2}{4a^2} = \frac{1}{4}$$

Donc $P_{(X>\frac{a}{2})}(X\leq a) = \frac{1}{4}$

4)
Pour determiner la variance de X
on calcule :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) = \int_{-\infty}^{0} x\,0\,dx + \int_{0}^{2a} x\frac{x}{2a^2}\,dx \int_{0}^{2a} x\,0\,dx$$ (par relation de chasles)

$$= \frac{1}{2a^2}\int_{0}^{2x} x^2\,dx$$

$$= \frac{1}{2a^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{2a}$$

$$= \frac{(2a)^3}{2a^2}\times\frac{1}{3} = \frac{8a}{2\times3} = \underline{\frac{4a}{3}}$$

Donc $E(X) = \frac{4a}{3}$

5) Comme X admet une esperance alors elle admet aussi une variance.

D'après la formule de König-Huygens :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$V(X) = \int_0^{2a} x^2 \times \frac{x}{2a^2} dx - \left(\frac{4a}{3}\right)^2 \quad \text{(d'après les q° précédentes)}$$

$$= \frac{1}{2a^2} \times \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^{2a} - \frac{16a^2}{9}$$

$$= \frac{(2a)^4}{2a^2 \times 4} - \frac{16a^2}{9}$$

$$= \frac{16a^4}{2a^2 \times 4} - \frac{16a^2}{9}$$

$$= \frac{16}{8}a^2 - \frac{16a^2}{9}$$

$$= 2a^2 - \frac{16a^2}{9}$$

$$= \frac{36a^2 - 32a^2}{18} = \frac{4a^2}{18}$$

$$\underline{V(X) = \frac{2a^2}{9}}$$

6)

a) $G_Y(x) = F_X(\sqrt{x})$

$$\underline{\text{Donc } G_Y(x) =} \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x}{4a^2} & 0 \leq x \leq \sqrt{2a} \\ 1 & x > \sqrt{2a} \end{cases}$$

car $P(X \leq y)$

$\Leftrightarrow P(X^2 \leq x)$

$P(X \leq \sqrt{x})$ donc $P(Y \leq Y) = P(X \leq \sqrt{x})$

Prénom (s) HUGO

19.3 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques T

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 07 / 07

Numéro de table 2829

b) X

c)
rand( ) * 4 * a ^ 2
simule un nombre entre 0 et 1 qui sera multiplié par $4a^2$.

d) X

7)
a)

$$b(T_n) = E(T_n) - a$$

$$= E\left(\frac{3}{4n} \sum_{k=1}^{n} X_k\right) - a$$

$$= \frac{3}{4n} n E(X_k) - a$$ car X suivent tous la même loi

$$\frac{3}{4} E(X) - a$$

$$= \frac{\cancel{3}}{\cancel{4}} \times \frac{\cancel{4}a}{\cancel{3}} - a = a - a = 0$$

(25)

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.3 / 20

Donc T_n est bien un estimateur sans biais de θ

b)

$$R_a(T_n) = 0^2 + V(\cancel{X}_n)$$
$$= 0 + V\left(\frac{3}{4n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right)$$
$$= \frac{9}{16n^2} V(X_n)$$
$$= \frac{9}{16n^2} \times \frac{2a^2}{9}$$
$$= \frac{2a^2}{16n^2} = \frac{a^2}{8n^2}$$

Donc le risque quadratique est $\frac{a^2}{8n^2}$

c)

```
n = length(X) // longueur de X
T_n = mean(x) - a
disp(T_n)
```