ECRICOME PREPA 2022 - ECS - Scientifique

Mathématiques option scientifique Mathématiques

DANIEL

Note de délibération : 18.52 / 20

Prénom (s) DANIEL

18.52 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques Option Scientifique Sujet ☑ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 01 / 13

Numéro de table 13

Exercice 1 :

1.a) Soit $x \in \mathbb{R}$

$$t_k(x) = \frac{x^k}{k!} = \frac{x \cdot x^{k-1}}{k\,(k-1)!} = \frac{x}{k}\, t_{k-1}(x)$$

b)

```
function S=f(n,x)
t = 1 // t = t_0(x)
S = 1 // S= f(0,x)
for k = 1:n
t = t*(x/k)
S = S + t
end
endfunction
```

2) f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ par opérations et : $\forall x \in \mathbb{R}_+$,

$$f_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k\, x^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k-1}}{k-1} \geqslant 1 > 0$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.52 / 20

Donc f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et elle y est continue donc par théorème de la bijection elle réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $[f_n(0) ; \lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x)[$

$= [1 ; +\infty[$.

Donc par définition d'une bijection comme (d'après l'énoncé) $a \in [1 ; +\infty[$, il existe bien un unique $x \in \mathbb{R}_+$ tel que $f_n(x) = a$.

3.a) Soit $n \geq 1$

$$f_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$= f_n(x) + \underbrace{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}_{\geq 0}$$

$$\geq f_n(x) \qquad (x \geq 0)$$

donc $(f_n(x))_{n \geq 1}$ est croissante.

Comme la la série de terme général $\frac{x^k}{k!}$ converge

On a : $\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \exp(x)$

~~comparaison~~

$\cancel{f_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^x}$

c). Ainsi comme $(f_n(x))_{n \geq 1}$ est croissante d'après la question 3.c) on a :

Soit $n \geq 1$

$f_n(u_n) \leq f_{n+1}(u_n) \qquad (u_n \geq 0)$

donc $a \leq f_{n+1}(u_n)$ d'après 2.

donc $f_{n+1}(u_{n+1}) \leq f_{n+1}(u_n)$

donc $u_{n+1} \leq u_n$ car f_{n+1} est strictement croissante.

Donc $(u_n)_{n \geq 1}$ est décroissante

3 c) D'après 2. $\forall n \geq 1$, $u_n \geq 1$

D'après 3.b) $(u_n)_{n \geq 1}$ est décroissante

Donc le théorème de la limite monotone nous assure que $(u_n)_{n \geq 1}$ converge

4.a) Soit $n \geqslant 1$

~~$(U_n)_{n \geqslant 1}$ est décroissante et converge vers une limite que l'on note l.~~

~~Ainsi, $\forall n \geqslant 1$, $U_n \geqslant l$.~~

~~Or $\forall x \in \mathbb{R}_+$ $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$~~

~~Or la serie de terme général $\frac{x^k}{k!}$~~

~~converge (car c'est une série exponentielle) et vaut e^x.~~

On a montré que $(f_n(x))_{n \geqslant 1}$ est croissante.

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}_+$

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) \geqslant f_n(x)$$

c'est à dire que $\forall x \in \mathbb{R}_+$

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \geqslant f_n(x)$$

Prénom (s) DANIEL

18.52 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques Option Scientifique

Sujet ☒ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 02 / 13

Numéro de table 13

Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+$,

$e^x \geqslant f_n(x)$.

Or $U_n \in \mathbb{R}_+^*$ donc

$e^{U_n} \geqslant f_n(U_n) = a$

donc $U_n \geqslant \ln(a)$ par croissance de $t \longmapsto \ln(t)$ sur $\mathbb{R}_+^*$

4.b) Par définition de K on a :
$\forall n \geqslant 1$,

$U_n \geqslant K > 0$.

donc par croissance de f_n

$f_n(U_n) \geqslant f_n(K)$ donc $a \geqslant f_n(K)$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.52 / 20

Donc par conservation des inégalités par passage à la limite et comme la série $\frac{K^n}{n!}$ converge et vaut e^K (en tant que série exponentielle on a bien :

$$a \geqslant e^K \quad \left(\lim_{n \to +\infty} a = a \right)$$

4.c)

5.a) On a d'après 2, $\forall n \geq 1$ $u_n \geqslant 1$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+$, on a donc par croissance de f_n :

$$f_n(1) \leq f_n(u_n) \leq \lim_{x \to +\infty} f_n(x)$$

5.b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$|R_n(u_n)| = \int_0^{u_n} \frac{e^t (u_n - t)^n}{n!} dt$$

Or $\forall t \in [0, u_n]$

$0 < t \leq u_n \leq M$. $(u_n \leq |u_n|)$

donc par croissance de exp on a :

$\forall t \in [0; u_n]$, $e^t \leq e^M$

De plus, $\forall t \in [0; u_n]$

$0 \leq u_n - t \leq u_n \leq M$.

Donc comme $e^M \geq 0$ on a :

$\forall\, t \in [0 ; u_n]$,

$$\frac{e^t (u_n - t)^n}{n!} \leq \frac{e^M M^n}{n!}$$

Donc par croissance de l'intégrale on a :

$$R_n(u_n) \leq \int_0^{u_n} \frac{e^M M^n}{n!}\, dt$$

$$= \frac{u_n e^M M^n}{n!}$$

$$\leq \frac{M e^M M^n}{n!} \quad (\text{car } u_n \leq M)$$

$$\leq \frac{e^M M^{n+1}}{n!} \cdot \frac{1}{n+1} \quad \left(\frac{1}{n+1} \leq 1\right)$$

$$= \frac{e^M M^{n+1}}{(n+1)!}$$

Prénom (s) DANIEL 18.52 / 20

écricome Épreuve : Mathématiques Option Scientifique Sujet ☑ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction. Feuille 03 / 13

Numéro de table 13

c) Donc, comme $\forall n \geq 1$ $n^2 > 0$ on a ;

$0 \leq n^2 |R_n(u_n)| \leq n^2 \frac{e^M M^{n+1}}{(n+1)!}$

Or $\frac{n^2 e^M M^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

par croissances comparées donc par théorème d'encadrement

$n^2 R_n(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

D'où $R_n(u_n) \underset{n \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

6.a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Posons $g : t \longmapsto e^t$.

g est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.52 / 20

et pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$
$g^{(k)}(t) = e^t$

Ainsi la formule de Taylor avec reste intégral nous assure que :

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} g^{(n+1)}(t)\,dt$$

Donc

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k \cdot 1}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t\,dt$$

D'où $e^x = f_n(x) + R_n(x)$

b) Soit $n \geq 1$
Le résultat de la 6.a) étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, il l'est pour u_n.

Donc $e^{u_n} = f_n(u_n) + R_n(u_n)$

donc $e^{u_n} = a + R_n(u_n)$

donc $u_n = \ln(a) + \ln(R_n(u_n))$ $(R_n(u_n) > 0)$

Or $0 \leq n^2 \ln(R_n(u_n)) \leq \dfrac{n^2 M(n+1)\ln(M)}{(n+1)!} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ (5.b)

Donc $\ln(R_n(u_n)) = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

donc $u_n = \ln(a) + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

7a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$

En reprenant les mêmes notations qu'en 6.b), g est de classe C^{n+2} sur $\mathbb{R}$ et comme $g^{(n+2)}(t) = e^t$, la formule de Taylor avec reste intégral nous assure toujours que :

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{g^{(k)}(t)}{k!} x^k + \int_0^x e^t \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} g^{(n+2)}(t)$$

d'où $e^x = f_n(x) + \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \displaystyle\int_0^x \frac{e^t (x-t)^{n+1}}{(n+1)!} dt$

b) ~~Or $\int_0^x e^t (x-t)^{n+1}$~~ Soit $n \geq 1$. Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{(n+1)!}{u_n^{n+1}} \int_0^x \frac{e^t (x-t)^{n+1}}{(n+1)!} dt = \frac{\int_0^x e^t (x-t)^{n+1}}{u_n^{n+1}}$$

$$= \int_0^x e^t \left(\frac{x-t}{u_n}\right)^{n+1}$$

L'égalité de 7-a) étant vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$ et donc pour u_n on a :

$$e^{u_n} = f_n(u_n) + \frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^{u_n} e^t \left(\frac{(u_n - t)}{(u_n)}\right)^{n+1} dt$$

c) $U_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ln(a)$

donc $\frac{(n+1)!}{(\ln(a))^{n+1}} \cdot \frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} = \left(\frac{u_n}{\ln(a)}\right)^{n+1}$

$$= \exp\left((n+1) \ln\left(\frac{u_n}{\ln(a)}\right)\right)$$

De plus, $\frac{(\ln(a))^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ par croissances comparées

Donc en admettant que $\frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} \sim \frac{\ln(a)^{n+1}}{(n+1)!}$

$\frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Prénom (s) DANIEL

18.52 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☑ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 04 / 13

Numéro de table 13

7.d) En procédant comme en 6.b) grâce à 7.a) on a :

$$u_n = \ln(a) + \frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc $u_n - \ln(a) = \dfrac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

$$\sim \frac{\ln(a)^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{d'après 7.c)}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.52 / 20

1.a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{rg}(A - \lambda I_3) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 4 & -2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} = \mathrm{rg} \\ L_1 \leftarrow L_3 \\ L_2 \leftarrow L_1 \\ L_3 \leftarrow L_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2-\lambda \\ -\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} = \mathrm{rg} \\ L_2 \leftarrow \\ L_2 + \lambda L_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2-\lambda \\ 0 & 1+4\lambda & -1+\lambda(-2-\lambda) \\ 0 & 2-\lambda & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \underset{L_3 \leftarrow L_2 + 4L_3}{\mathrm{rg}} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2-\lambda \\ 0 & 1+4\lambda & -1+\lambda(-2-\lambda) \\ 0 & 9 & -1+\lambda(-2-\lambda) \end{pmatrix}$$

$$\cancel{= \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2-\lambda \\ 0 & 1+4\lambda & -1+\lambda(-2-\lambda) \\ 0 & 9 & -1+\lambda(-2-\lambda) \end{pmatrix}}$$

$$= \underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\mathrm{rg}} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2-\lambda \\ 0 & 9 & -1+\lambda(-2-\lambda) \\ 0 & 1+4\lambda & -1+\lambda(-2-\lambda) \end{pmatrix}$$

$$= \underset{L_3 \leftarrow 9L_3 - (1+4\lambda)L_2}{\mathrm{rg}} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2-\lambda \\ 0 & 9 & -1+\lambda(-2-\lambda) \\ 0 & 0 & (8+4\lambda)(-1+\lambda(-2-\lambda)) \end{pmatrix}$$

Donc $\lambda \in Sp(A) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 0 \\ \text{ou } 9 = 0 \\ \text{ou } (8-4\lambda) \times (-1+\lambda(-2-\lambda)) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow (8+4\lambda)(-(\lambda^2+1)) = 0$

$\Leftrightarrow$ $\lambda = 2$ ou $\lambda = -1$

d'où -1 et 2 sont valeurs propres de f.

Soit $X \in M_{3,1}(\mathbb{R})$ / $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$AX = -X \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 - x_3 = -x_1 \\ 2x_2 = -x_2 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -x_3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = +x_3 \\ x_2 = 0. \end{cases}$

donc $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}((1,0,+1))$

Prénom (s) DANIEL

18.52 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☑ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 05 / 13

Numéro de table 13

$$AX = 2X \iff \begin{cases} x_2 - x_3 = 2x_1 \\ 2x_2 = 2x_2 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 2x_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 = x_2 \\ x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 9x_2 - 9x_3 = 0 \end{cases}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.52 / 20

$c=1$ $\begin{cases} x_2 = x_3 \\ -2x_1 = 0 \end{cases}$

donc $\ker(f - 2\,Id_E) = \underline{\mathrm{Vect}\,(0,1,1)}$

6) $\mathrm{Tr}(A) = 0$.

Si f est diagonalisable alors A l'est aussi donc, il existe $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$

telle que $A = PDP^{-1}$, $P \in GL_3(\mathbb{R})$

Donc $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(D)$

Or $\mathrm{Tr}(D) = 1$ car on a trouvé que les valeurs propres de A sont -1 et 2 et $2 - 1 = 1 \neq 0$.

Donc <u>f n'est pas diagonalisable</u>

2. Soit $x \in \ker(f + Id)$

Alors $(f + Id)(x) = 0$

donc $(f + Id) \circ (f + Id)(x) = 0$

Donc $\ker(f + Id) \subset \ker((f + Id)^2)$

3. Soit $x \in \mathbb{R}^3$.

Analyse : Supposons qu'il existe (a, b)
$\in \ker(f - 2Id) \times \ker((f + Id)^2)$ /

$x = a + b$

~~Alors~~ $\cancel{f(x) = 2a + f(b)}$

~~donc~~ $\cancel{f^2(x) = 2f(a) + f^2(b)}$

$\cancel{= 4a - 2b f(b) + b^2}$

~~Donc~~ $\cancel{f^2(x) - 2f(x) = -2b f(b) + b^2 - 2f(b)}$

$= \cancel{b^2 - 2f(b)(b+1)}$

$$(f+Id)^2(x) = (f+Id)^2(a) + 0$$
$$= (f+Id)(f(a)+a)$$
$$= f^2(a) + f(a) + f(a) + a$$
$$= f^2(a) + 2f(a) + a$$
$$= f(2a) + 2f(a) + a$$
$$= 4a + 4a + a$$
$$= 9a.$$

Donc $a = \frac{1}{9}\left(f^2(x) + 2f(x) + x\right)$

$b = x - \frac{1}{9}\left(f^2(x) + 2f(x) + x\right).$

On a montré que si la décomposition existe, elle est unique

Synthèse : Posons $a = \frac{1}{9}\left(f^2(x) + 2f(x) + x\right)$ et $b = x - a$

$$f(a) - 2a = (f - 2Id)(a) = \frac{1}{9}(f - 2Id)(f+Id)(f+Id)(x)$$

$$= 0 \text{ d'après } 1)$$

et $(f+Id)^2(b) = (f+Id)^2(x) - (f+Id)^2(a)$

$$= 0.$$

Donc $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f - 2Id) \oplus \mathrm{Ker}((f+Id)^2)$

Prénom (s) DANIEC

18.52 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☒ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 06 / 13

Numéro de table 13

4. Soit $x \in F$.

Alors $f(x) = 2x$.

$$f^2(x) = f(f(x)) = f(2x) = 2f(x)$$

donc $f(x) \in F$

donc F est stable par f.

· Soit $x \in G$.

Alors $(f+Id)^2(x) = 0$.

$$(f+Id)^2(f(x)) = (f+Id)(f^2(x) + f(x))$$

$$= f(f^2(x) + f(x)) + f^2(x) + f(x)$$

$$= f^3(x) + f^2(x) + f^2(x) + f(x)$$

$$= f((f+Id)^2(x)) = 0.$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.52 / 20

donc $f(x) \in G$ donc

G est stable par f

5. ~~-1 est valeur propre de f donc racine de $P(f)$~~

Soit $x \in \mathbb{R}^3$

$P(f)(x) = (f + Id)^2 \circ (f - 2Id)(x)$

$= (f + Id)^2 \circ (f - 2Id)(a) + (f + Id)^2 \circ (f - 2Id)(b)$

avec $(a ; b) \in F \times G$ d'après 3

$= 0 + (f + Id)^2 \circ (f - 2Id)(b)$

$= (f - 2Id) \circ (f + Id)^2 (b)$

$= 0$

Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}^3$

$P(f)$ est l'endomorphisme nul

6. $\pi_1 \circ \pi_2 = \frac{1}{9}(f + Id)^2 \circ \left(-\frac{1}{9}\right)(f + Id)\circ(f - Id)$.

Or $\forall k \in \mathbb{N}$ $\quad f^k \circ Id = Id \circ f^k$

et pour $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, $f^i \circ f^j = f^j \circ f^i$
donc on a bien

$$\pi_1 \circ \pi_2 = \pi_2 \circ \pi_1$$

7.a) $\pi_2 \circ \pi_1 = -\frac{1}{9}(f + 4Id) \circ (f - 2Id) \circ \left(\frac{1}{9}(f + Id)^2\right)$

$$= \frac{-1}{81}(f + 4Id) \circ (f - 2Id) \circ (f^2 + 2f + Id)$$

$$= -\frac{1}{81}(f + 4Id) \circ (f^3 + 2f^2 + f - 2f^2 - 4f - 2Id)$$

$$= \frac{-1}{81}(f + 4Id) \circ (f^3 - 3f - 2Id)$$

$$= -\frac{1}{81}(f^4 - 3f^2 - 2f + 4f^3 - 12f - 8Id)$$

$$= \frac{-1}{81}(f^4 + f^3 - 14f - 8Id)$$

$$= -\frac{1}{81}$$

7.b)

8.a) $\pi_1 + \pi_2 = \frac{1}{9}\left(f^2 + 2f + \mathrm{Id}\right) - \frac{1}{9}\left(f^2 + 2f + 8\mathrm{Id}\right)$

$$= \frac{\mathrm{Id} + 8\mathrm{Id}}{9}$$

$$= \frac{9\mathrm{Id}}{9}$$

$$= \mathrm{Id}$$

Prénom (s) DANIEL

18.52 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☒ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 07 / 13

Numéro de table 13

8. b)

9. On aurait du montrer aux questions d'avant.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.52 / 20

10. D'après 8.a)

$\pi_2 = \pi_1 - Id$

Donc $Im(\pi_2) = Im(\pi_1 - Id)$

Or $Im(\pi_2) = ker(\pi_1)$

Donc $Im(\pi_1 - Id) = ker(\pi_1)$

11. D'après 10, π_2 est un projecteur

Soit $x \in \mathbb{R}^3 = F \oplus G$ (3)

$$\pi_2(x) = -\frac{1}{9}(f + 4Id) \circ (f - 2Id)(a+b)$$

avec $(a, b) \in F \times G$

$$= -\frac{1}{9}(f + 4Id) \circ (f - 2Id)(b) + 0$$

$$= -\frac{1}{9}\left(f^2 + 2Id - 8Id\right)(b)$$

$$= -\frac{1}{9}\left((f + Id)^2 - 9Id\right)(b)$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{9}(f + Id)^2(b)}_{=0} + \frac{9Id}{Id}(b)$$

$$= b$$

donc π_2 est bien le projecteur sur G parallèlement à F.

12. Soit $x \in \mathbb{R}^3$.

$g = 2\pi_1 - \pi_2$

$\cancel{= 2u_1 + Id - \pi_1}$

$= 2\pi_1 - (Id - \pi_1) = 3\pi_1 - Id$

$= \frac{1}{3}(f + Id)^2 - Id$

$g = Q(f)$ avec $Q(X) = \underline{\frac{(X+1)^2}{3} - 1}$

$h = f - g$

$= f - \frac{(f+Id)^2}{3} + 1 = \underline{\frac{2f^2}{3} + \frac{f}{3} + \cancel{\frac{4}{3}}\ \frac{2}{3}}$

$\cancel{= -\frac{f^2}{9} + \frac{7f}{9}} + \frac{8}{9}$

$h = T(f)$ avec $T(X) = \underline{\frac{-X^2}{3} + \frac{X}{3} - \frac{4}{3}}$

Prénom (s) DANIEL

18.52 / 20

Écricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☑ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 08 / 13

Numéro de table 13

13. Soit $x \in \mathbb{R}^n$

$g(x) + x = (2\pi_1 - \pi_2)(x) + x$

$= 3\pi_1(x) - x + x$

$= 3\pi_1(x)$

Or π_1 est un projecteur

donc $\mathrm{Im}(\pi_1) = \ker(\pi_1 - Id)$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.52 / 20

14. $(f - 2Id) \circ \pi_1 + (f + Id) \circ \pi_2$

$$= \frac{1}{9}\left((f-2Id) \circ (f+Id)^2 - (f+Id) \circ (f+4Id) \circ (f-2Id) \right)$$

$$= \frac{1}{9}\left((f-2Id) \circ (f+Id) \circ (f+Id - f + 4Id) \right)$$

$$= \frac{1}{9}\left((f-2Id) \circ (f+Id) \circ (3Id) \right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(f^2 - f - 2Id \right)$$

15. On a alors $f = h + g$

Avec h et g qui commutent et h nilpotente (question 14) et g diagonalisable (question 13)

Problème :

Partie I :

1.a) $F_{\mu,a}$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ par composition, car exp est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F_{\mu,a}'(x) =$

$$\frac{x}{a}\left(\exp\left(\frac{\mu - x}{a}\right)\right) \cdot \exp\left(-\exp\left(\frac{\mu - x}{a}\right)\right)$$

$\forall x \in \mathbb{R}$ on a :

$$f'_{\mu,a}(x) = \left(\frac{1}{a} \left(\exp\left(\frac{\mu - x}{a} \right) + \frac{x^2}{a^2} \left(\exp\left(\frac{\mu - x}{a} \right) \right) \right) \right.$$

$$\times \exp\left(- \exp\left(\frac{\mu - x}{a} \right) \right)$$

$$+ \frac{x}{a} \left(- \exp\left(\frac{\mu - x}{a} \right) \exp\left(- \exp\left(\frac{\mu - x}{a} \right) \right) \right)$$

$$= \exp\left(+ \exp\left(\frac{\mu - x}{a} \right) \right) \times \cancel{\left(\frac{1}{a} \left(- \exp\left(\frac{\mu - x}{a} \right. \right. \right.} + x$$

$$\times \left(+ \exp\left(\frac{\mu - x}{a} \right) \right) \left(\frac{1}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x}{a} \right)$$

~~1.6) Ainsi, on a le tableau de variations suivant~~

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{2}}{2}$		0		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$f'_{\mu,a}(x)$		$-$	|		$+$		|	$-$	
$f_{\mu,a}(x)$			$+$		ϕ		$-$		
$F_{\mu,a}(x)$									

Prénom (s) DANIEL

18.52 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☒ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 08 / 13

Numéro de table 13

Ainsi, · $F_{\mu,a}$ est croissante sur $\mathbb{R}$

· $F_{\mu,a}$ est convexe sur $\cancel{\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]}$ $\mathbb{R}$

· $\frac{\mu-x}{a} \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$

donc par composition $\exp\left(\frac{\mu-x}{a}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

donc $F_{\mu,a}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$ par composition

· $\frac{\mu-x}{a} \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$ donc $\exp\left(\frac{\mu-x}{a}\right) \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.52 / 20

donc $-\exp\left(\frac{\mu - x}{a}\right) \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$

donc $F_{\mu,a}(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$

1. c) D'après ce qui précède $F_{\mu,a}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et elle y est continue donc d'après le théorème de la bijection, $F_{\mu,a}$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0;1[$ (d'après 1.b).

Soit $y \in]0;1[$ soit $x \in \mathbb{R}$

$$y = F_{0,1}(x) \iff y = \exp(-\exp(x))$$

$$\iff \ln(y) = -e^x$$

$$\iff -\ln(y) = e^x$$

$$\iff x = \ln(-\ln(y))$$

(avec $y \in]0;1[$ donc $-\ln(y) > 0$)

Ainsi : $\forall x \in]0;1[$, $G(x) = -\ln(\ln(x))$

2.a) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mu,a}(t)\,dt$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a} \exp\left(\frac{\mu - t}{a}\right) \cdot \exp\left(-\exp\left(\frac{\mu - t}{a}\right)\right) dt.$$

Soit $A > 0$
Soit $B < 0$

$$\int_B^A f_{\mu,a}(t)\,dt = \left[F_{\mu,a}(t) \right]_B^A$$

$$= F_{\mu,a}(A) - F_{\mu,a}(B)$$

Or $F_{\mu,a}(A) \xrightarrow[A \to +\infty]{} 1$

$F_{\mu,a}(B) \xrightarrow[B \to -\infty]{} 0$

donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mu,a}(t)\,dt$ converge et vaut 1

De plus $f_{\mu,a}$ est continue et positive donc c'est bien une densité.

- $F_{\mu,a}(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 1$ · $F_{\mu,a}(t) \xrightarrow[t \to -\infty]{} 0$

- $F_{\mu,a}$ est croissante, continue et de classe $\mathcal{C}^1$

Donc c'est bien ~~la~~ fonction de répartition associée à $f_{\mu,a}$ (car $F_{\mu,a}' = f_{\mu,a}$)

3. Soit $t \in \mathbb{R}$

$$P(X \leq t) = P(aZ + \mu \leq t)$$

$$= P(aZ \leq t - \mu)$$

$$= P\left(Z \leq \frac{t-\mu}{a}\right) \quad (a > 0)$$

$$= \exp\left(-\exp\left(-\left(\frac{t-\mu}{a}\right)\right)\right)$$

car Z suit une loi de Gumbel de paramètre (0,1)

$$= \exp\left(-\exp\left(\frac{\mu-t}{a}\right)\right)$$

Prénom (s) DANIEL

18.52 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☑ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 40 / 13

Numéro de table 13

Donc X suit une loi de Gumbel de paramètres (μ, a)

4.a) Soit $t \in \mathbb{R}$

$$P(Y \leq t) = P(-\ln(-\ln(U)) \leq t)$$

$$= P(\ln(-\ln(U)) \geq -t)$$

$$= P(-\ln(U) \geq e^{-t})$$

$$= P(\ln(U) \leq -e^{-t})$$

$$= P(U \leq \exp(-e^{-t}))$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.52 / 20

Or $\exp(-\exp(-t)) \in [0;1]$. donc

$P(Y \leq t) = \exp(e^{-t})$

donc Y suit une loi de Gumbel de paramètre $(0,1)$

6).
```
function g = gumbel(mu,a)
g = -log(log(rand()))
endfunction.
```

5.a) $u \longmapsto \ln(u)e^{-u}$ est continue sur $]0;+\infty[$. donc l'intégrale est impropre en 0 et en $+\infty$.

En 0 : $|\ln(u)e^{-u}|$

En $+\infty$:

5.b). $\int_0^1 \ln(-\ln(t))\,dt$ est de la même

nature que $\int_{+\infty}^0 \ln(u)\,(-e^{-u}\,du)$

$= \int_0^{+\infty} \ln(u)\,e^{-u}\,du$

Donc d'après 5.a) l'intégrale converge

c). Z admet une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mu,a}(t)\left(\frac{t-\mu}{a}\right)dt$ converge

Soit $A > 0$
$B < 0$

$$\cancel{\int_B^A \left(\frac{x-\mu}{a}\right) \exp\left(-\exp\left(\frac{\mu-x}{a}\right)\right) dx}$$

$$\cancel{= \int_{\exp(-\exp(B))}^{\exp(-\exp(A))} \exp\left(-\exp\right.}$$

$$\int_B^A \left(\frac{x-\mu}{a}\right) \exp\left(-\exp\left(\frac{\mu-x}{a}\right)\right) dx$$

$$= \int_{\exp(\exp(-B))}^{\exp(\exp(-A))} \left(\frac{x-\mu}{a}\right)$$

Prénom (s) DANIEL

18.52 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☒ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 11 / 13

Numéro de table 13

d) donc $E(Z) = \gamma$

c'est à dire $E\left(\frac{X-\mu}{a}\right) = \gamma$

donc X admet une espérance

et $\frac{E(X)-\mu}{a} = \gamma$

donc $\underline{E(X) = a\gamma + \mu}$

6.a) $Z(\Omega) \subset \mathbb{R}$
$-Z(\Omega) \subset \mathbb{R}$

Soit $t \in \mathbb{R}$

$P(-Z \leq t) = P(Z \geq -t)$

$= 1 - P(Z \leq -t)$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.52 / 20

En dérivant on obtient ~~qu'une densité~~
~~de~~

$f_{-Z}(t) = F_{0,1}'(-t) \geqslant 0$

dans F_{-Z} est croissante sur $\mathbb{R}$

F_{-Z} est continue sur $\mathbb{R}$ par opération

F_{-Z} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

donc $-Z$ est une variable aléatoire à densité

~~$\forall t \in \mathbb{R}$~~

une densité de $-Z$ est donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f_{-Z}(t) = F_{0,1}'(-t)$$
$$= -t\exp(t) \cdot \exp(-\exp(t))$$

~~6.6) Soit $x \in \mathbb{R}$~~

~~$u \longmapsto u e^{-(e^{-x}+1)u}$ est continue sur $[0 ; +\infty[$~~
~~donc l'intégrale est impropre en $+\infty$.~~

~~$\forall u \in [0 ; +\infty[$~~

~~$u e^{-(e^{-x}+1)u} \leq u e^{-u e^{-x}}$ $= \cancel{E(Z) = \gamma}$~~

~~Or $\int_0^{+\infty} u e^{-u} du = [$~~

~~Or $\int_{-\infty}^{+\infty} u e^{-e^{-x}} dx =$~~

6.6)

6.c) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{0,1}(x-t)\, g(t)\, dt$

est de même nature que $(u = e^t)$

$\int_0^{+\infty} f_{0,1}(x-\ln(u))\, g(\ln(u))\, dt$.

6.d) Y et Z sont indépendants donc
d'après le lemme des coalitions Y et $-Z$
le sont aussi.
De plus, une densité de Y est bornée
Donc $Y-Z$ est une variable à densité
et une densité de $Y-Z$ est donnée par:

$\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\cancel{f_{Y-Z}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(t)\, f_{-Z}(x-t)\, dt}$$

$$\cancel{= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{0,1}(t)\, f_{0,1}(t-x)\, dt}$$

Prénom (s) DANIEL

18.52 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☑ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 12 / 13

Numéro de table 13

$f_{Y-Z}(x)$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(x-t) f_{-Z}(t)\,dt$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{0,1}(x-t)\, g(t)\,dt$

$= \int_{-\infty}^{+\infty}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.52 / 20

7.a) Supposons que

$V_n \xrightarrow{P} V$

$W_n \xrightarrow{P} W$.

Soit $\varepsilon > 0$.

$P\cancel{(|\alpha V_n + \beta W_n| \geq \varepsilon)}$

$$P(|\alpha V_n + \beta W_n - (\alpha V + \beta W)| \geq \varepsilon)$$

$$\leq P(|\alpha V_n - \alpha V| \geq \varepsilon)$$

$$+ P(\beta W_n - \beta W \geq \varepsilon).$$

En effet, Soit ~~$\omega \in [|\alpha V_n - \alpha V| < \varepsilon] \cap [|\beta W_n - \beta W| < \varepsilon]$~~

~~Alors~~ Soit $\omega \in [|\alpha V_n - \alpha V| < \varepsilon/2] \cap [|\beta W_n - \beta W| < \varepsilon/2]$

Alors $\begin{cases} |\alpha V_n(\omega) - \alpha V(\omega)| < \varepsilon/2 \\ |\beta W_n(\omega) - \beta W(\omega)| < \varepsilon/2 \end{cases}$

Donc $\left| \alpha V_n(\omega) + \beta W_n(\omega) - (\alpha V(\omega) + \beta W(\omega)) \right|$

$\leq \left| \alpha V_n(\omega) - \alpha V(\omega) \right| + \left| \beta W_n(\omega) + \beta W(\omega) \right|$

par inégalité triangulaire

$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$

donc $\omega \in [\alpha V_n + \beta W_n - (\alpha V + \beta W) < \varepsilon]$

On a donc montré par contraposée que

$[\alpha V_n + \beta W_n - (\alpha V + \beta W) \geq \varepsilon]$

$\subset [|\alpha V_n - \alpha V| \geq \varepsilon] \cup [|\beta W_n - \beta W \geq \varepsilon]$

et pour tous événements A et B on a :

$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$

Supposons que α et β sont non nuls

De plus, $P(|\alpha V_n + \alpha V| \geq \varepsilon)$

$= P\left(|\alpha||V_n - V| \geq \varepsilon\right)$

$= P\left(|V_n - V| \geq \frac{\varepsilon}{|\alpha|}\right) \quad (|\alpha| > 0)$

Or $P\left(|V_n - V| \geq \frac{\varepsilon}{|\alpha|}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Donc $P(|\alpha V_n - \alpha V| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

De même $P(|\beta W_n - \beta W| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Donc par opérations

$P(|\alpha V_n + \beta W_n - (\alpha V + \beta W)| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

- Pour $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$ le résultat reste trivial

Donc $\alpha V_n + \beta W_n \xrightarrow{P} \alpha V + \beta W$

6) - $(X_n)_{n \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes admettant une même espérance $E(X_1)$ et une variance $\sigma^2 > 0$. (admis par l'énoncé).

donc d'après la loi faible des grands nombres

$M_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \xrightarrow{P} E(X_1)$

- Par lemme des coalitions, $(X_n^2)_{n \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, admettant une ~~momont d'ordre~~ espérance et une variance strictement positive

Prénom (s) DANIEL 18.52 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques Sujet ☐ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction. Feuille 13 / 13

Numéro de table 13

Donc d'après la loi faible des grands nombres

$$C_n \xrightarrow{P} E(X_n^2)$$

c) ~~An~~

$$\cancel{A_n = \frac{1}{\sqrt{c}} \sqrt{C_n - M_n^2}}$$

$$\cancel{= \frac{1}{\sqrt{c}} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \right)^2 \right)}$$

$$\cancel{= \frac{1}{\sqrt{c}} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{2}{n} \sum_{1 \leq i < j \leq n} X_i X_j \right)}$$

An est une fonction des X_i qui ne dépend pas de a donc An est un estimateur de a.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.52 / 20

d) d'après 7.a) $S_n \xrightarrow{P} f(x_1) - \gamma a$ (7.c)

$= a\gamma + \mu - \gamma a$

$= \mu$

d-c S_n est un estimateur convergent de μ

8.a)
```
function A = estimateur_a(x)
M = sum(x)
C = sum(x^2)
A = 1/sqrt(c) * sqrt(C - M^2)
end function.
```

8.b)