ECRICOME PREPA 2022 - ECT - Technologique

Mathématiques option technologique Mathématiques

ESTELLE

Note de délibération : 20 / 20

Prénom (s) ESTELLE

20 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques option technologique Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction. Feuille 01 / 05

Numéro de table 007

Exercice 1 :

1) a) $PQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3I$

b) $PQ = 3I$

$P\frac{1}{3}Q = I$ Donc $P$ est inversible et $P^{-1} = \frac{1}{3}Q$.

2) a) $MX_n = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2a_n + b_n + c_n \\ a_n + 2b_n + c_n \\ a_n + b_n + 2c_n \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}$

Donc $MX_n = X_{n+1}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

b) Montrons par récurrence que $X_n = M^n X_0$.

- Si $n=0$.

$X_n = X_0$

$M^n X_0 = M^0 X_0 = I X_0 = X_0$

La propriété est vraie au rang 0.

- On suppose que $X_n = M^n X_0$ et on démontre que $X_{n+1} = M^{n+1} X_0$.

$X_n = M^n X_0$

$M X_n = M M^n X_0$

$X_{n+1} = M^{n+1} X_0$

La propriété est vraie au rang $n+1$ donc elle est vraie pour tout $n$.

3) a) $(4M - I)(4M - 4I) =$

$$\left[4 \times \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \times \left[4 \times \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Les valeurs propres possibles sont à chercher parmi les racines d'un polynôme annulateur. $(4M-I)(4M-4I)$ est un polynôme annulateur de la matrice $M$.

Alors $Q(x) = (4x-1)(4x-4)$

$4x-1=0$ ou $4x-4=0$.

$4x=1$ $\qquad$ $4x=4$

$x=\frac{1}{4}$ $\qquad$ $x=1$.

Les éventuelles valeurs propres de $M$ sont $\frac{1}{4}$ et $1$.

4) a) Si $M = PDP^{-1}$ alors $D = P^{-1}MP$.

· <u>Calcul de $D$.</u>

$$D = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \times \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \times \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

b) ~~D est une matrice diagonale donc~~ $\cancel{D^n = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 12^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}}$

$M^n = PD^nP^{-1}$

c) ~~$D^n$~~ ~~On po~~

$D$ ~~est~~ une matrice diagonale donc $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix}$

On pose $a = (1/4)^n$.

$M^n = P D^n P^{-1}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \times \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & -a & a \\ 1 & 0 & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1+2a & 1-a & 1-a \\ 1-2a+a & 1+a+a & 1+a-2a \\ 1-a & 1-a & 1+2a \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1+2a & 1-a & 1-a \\ 1-a & 1+2a & 1-a \\ 1-a & 1-a & 1+2a \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1+2\times\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1+2\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1+2\left(\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix}$$

Prénom (s) CSTELLE

20 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques option T

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 02 / 08

Numéro de table 007

d) Nous avons vu que $X_n = M^n X_0$ via 2°a.

Donc $M^n X_0 =$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1+2a & 1-a & 1-a \\ 1-a & 1+2a & 1-a \\ 1-a & 1-a & 1+2a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1+2a \\ 1-a \\ 1-a \end{pmatrix}.$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1+2\times\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix}$$

Donc $a_n = \frac{1}{3}\left(1+2\times\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) = \frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{4^n}\right)$

$b_n = c_n = \cancel{1\left(\frac{1}{4}\right)^n} \ \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right).$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

c) $-1 < 2/4 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2}{4^n} = 0$

Donc an converge et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{4^n}\right) = \frac{1}{3}$

$-1 < 1/4 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{4^n} = 0$. alors $\lim \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right) = \frac{1}{3}$

alors bn et cn converge vers $\frac{1}{3}$.

5) b = 0

```
b = 0
while  a >= 0.334 & b <= 0.333
        n = n+1
        b = 1/3 * (1 - 1/4^n)
disp (n)
```

6) $P(A_0) = 1$. $\qquad P(A_1) = 1/2$

$P(B_0) = 0 \qquad P(B_1) = 1/4$

$P(C_0) = 0 \qquad P(C_1) = 1/4$

7) a) Si le joueur tire le chiffre 0 ou le 3 il reviendra sur la position A donc il a deux fois plus de chances alors $P_{A_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{2}$

$P_{B_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{4}$ et $P_{C_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{4}$

b) $\{A_n ; B_n ; C_n\}$ forme un système complet, selon la formule des probabilités totales :

$P(A_{n+1}) = P_{A_n}(A_{n+1}) \times P(A_n) + P_{B_n}(A_{n+1}) \times P(B_n) + P_{C_n}(A_{n+1}) \times P(C_n)$.

$a_{n+1} = \frac{1}{2} \times a_n + \frac{1}{4} \times b_n + \frac{1}{4} \times c_n$.

Analogiquement :

$P(B_{n+1}) = P_{A_n}(B_{n+1}) \times P(A_n) + P_{B_n}(B_{n+1}) \times P(B_n) + P_{C_n}(B_{n+1}) \times P(C_n)$

$b_{n+1} = \frac{1}{4} \times a_n + \frac{1}{2} \times b_n + \frac{1}{4} \times c_n$.

$P(C_{n+1}) = P_{A_n}(C_{n+1}) \times P(A_n) + P_{B_n}(C_{n+1}) \times P(B_n) + P_{C_n}(C_{n+1}) \times P(C_n)$

$c_{n+1} = \frac{1}{4} \times a_n + \frac{1}{4} \times b_n + \frac{1}{2} \times c_n$.

c) Nous avons vu que les probabilités de $a_{n+1}$, $b_{n+1}$, $c_{n+1}$ sont identiques à elles données dans la partie A alors il est clair que

$P(A_n) = a_n = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{4^n}\right)$.

$P(B_n) = P(C_n) = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right)$.

8) Si on répète un très grand nombre de fois l'expérience, on aura 1 chance sur 3 d'être en position A. B ou C.

Exercice 2 :

1) a) $\lim_{x \to -1} (1 + x) = 0$ donc $\lim_{x \to -1} \ln(1 + x) = -\infty$

$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to -1} \ln(1 + x) = -\infty \\ \qquad \otimes \\ \lim_{x \to -1} x = -1 \end{array}\right\} \lim_{x \to -1} f(x) = +\infty$

La droite d'équation $x = -1$ est asymptote

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} 1+x = \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x+1) = +\infty$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x+1) = +\infty \\ \qquad\qquad\qquad \otimes \\ \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

c) Pour étudier une branche parabolique on pose $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty. \\ \qquad\qquad\qquad \otimes \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} =$$

2) a) $f(x) = x \times \ln(1+x)$ est de la forme $u \times v$.

Donc $u(x) = x$ $\qquad v(x) = \ln(1+x)$

$\qquad u'(x) = 1$ $\qquad v'(x) = \frac{1}{1+x}$

$$f'(x) = 1 \times \ln(1+x) + x \times \left(\frac{1}{1+x}\right)$$
$$= \ln(1+x) + \frac{x}{x+1}$$

b) $$f''(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1 \times (x+1) - x \times 1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{1}{1+x} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x+1+1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x+2}{(x+1)^2}$$ $(x+1)^2 > 0$ donc est du signe de $x+2$.

Prénom (s) ESTELLE

20 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques option Technologique

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

**Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.**

Feuille 03 / 05

Numéro de table 007

$x+2=0$

$x=-2$ or $-2 \notin D_f$ donc $f''$ est convexe.

c)

| $x$ | $-1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'$ | $+$ | |

car f'est convexe

3) a) $f'(0) = \ln(1+0) + \frac{0}{0+1}$

$= \ln(1) = 0.$

~~$\forall x > -1 : f'(x) > 0.$~~ $f'(x) : \forall x > -1$ est positif

b)

| $x$ | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

$f(0) = 0 \times \ln(1+0).$

4) $\emptyset$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

5) a) $I = \int_0^1 f(x)\,dx$ se calcule par partie avec

$U'(x) = x$ $\qquad U(x) = \frac{1}{2}x^2$

$V(x) = \ln(1+x)$ $\qquad V'(x) = \frac{1}{x+1}$

$$I = \left[\frac{1}{2}x^2 \times \ln(1+x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}x^2 \times \frac{1}{x+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2} \times 1^2 \times \ln(2) - 0 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx$$

$$= \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx$$

b) $\frac{x^2}{x+1} = \frac{x^2 - 1 + 1}{x+1} = \frac{x^2 - 1^2 + 1}{x+1} = \frac{(x-1)(x+1)+1}{x+1}.$

$\frac{x-1}{x+1} \times \frac{x+1}{x+1} + \frac{1}{x+1} = \frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{x+1}$

c) $\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx = \int_0^1 x - 1 + \frac{1}{x+1}\,dx$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 - x + \ln(x+1)\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} \times 1 - 1 + \ln(1+1) - \left(\frac{1}{2} \times 0 - 0 + \ln(1)\right)$$

$$= -\frac{1}{2} + \ln(2).$$

d) $I = \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2} + \ln(2)\right).$

$= \frac{\ln(2)}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\ln(2).$

6) y= x ^ n * log (1+x).
n= 1; 5; 10; 20; 50
f plot 2d ( y ; n).

7) a) La courbe de l'intégrale In quand on fait tendre n vers un grand nombre s'apparente à une exponentielle.

b) $\lim_{n \to +\infty} I_n = 0,7$

8) a)

$0 \leq x \leq 1$

$0 \leq x+1 \leq 2.$

$0 \leq \ln(x+1) \leq \ln(2)$

$0 \leq x^n \times \ln(x+1) \leq x^n \times \ln(2).$

b)

$0 \leq x^n \times \ln(x+1) \leq x^n \times \ln(2)$

$\int_0^1 0\,dx \leq \int_0^1 x^n \ln(x+1)\,dx \leq \int_0^1 x^n \times \ln(2)\,dx$

$0 \leq I_n \leq \left[\frac{1}{n+1} \times x^{n+1} \times \ln(2)\right]_0^1$

$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1} \times 1^{n+1} \times \ln(2) - \frac{1}{n+1} \times 0^{n+1} \times \ln(2).$

$0 \leq I_n \leq \frac{\ln(2)}{n+1}$

c) Etudions la limite de $\frac{\ln(2)}{n+1}$.

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(2)}{n+1} = \ln(2).$$

Alors $\lim_{n \to +\infty} I_n$ est comprise entre 0 et $\ln(2)$.

Prénom (s) ESTELLE

20 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématique option Technologique

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 04 / 05

Numéro de table 007



Exercice 3 :

1) $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0.$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$

$f(0) = \frac{0}{2a^2} = 0.$ Donc $f$ est continue en 0.

· Continuité en $2a$.

$\lim_{x \to 2a^-} f(x) = \frac{1}{a}$

$\lim_{x \to 2a^+} f(x) = 0$

$f(2a) = \frac{2a}{2a^2} = \frac{1}{a}$ Donc $f$ n'est pas continue en $2a$.

2) * Sur $]-\infty; 0[ \cup ]2a; +\infty[$ : $f(x) = 0$ donc $f(x) \geq 0$.

Sur $[0; 2a]$ : $f(x) = \frac{x}{2a^2}$ 2 et $a > 0$ car a est un réel positif et $x$ sur $[0; 2a] > 0$ donc $f(x) \geq 0$.

Alors $f(x)$ est positive sur $\mathbb{R}$.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE



* $f$ est continue hormis en $2a$.

* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{2a} \frac{t}{2a^2}\,dt + \int_{2a}^{+\infty} 0\,dt. = \int_{0}^{2a} \frac{t}{2a^2}\,dt.$

$= \left[\frac{1}{2a^2} \times \frac{1}{2} t^2\right]_0^{2a} = \left[\frac{t^2}{4a^2}\right]_0^{2a} = \frac{(2a)^2}{4a^2} - \frac{0^2}{4a^2} = \frac{4a^2}{4a^2} = 1$

Donc $f$ est une densité de probabilité.

3) a) * 1er cas : si $x < 0$.

$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0.$

* 2e cas si $0 \leq x \leq 2a$.

$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{x} \frac{t}{2a^2}\,dt = \left[\frac{t^2}{4a^2}\right]_0^{x} = \frac{x^2}{4a^2}$

* 3e cas si $x > 2a$.

$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{2a} \frac{t}{2a^2}\,dt + \int_{2a}^{+\infty} 0\,dt = 1$ via 2e.

Bilan:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^2}{4a^2} & \text{si } 0 \leq x \leq 2a \\ 1 & \text{si } x > 2a \end{cases}$$

b) $P_{(X>\frac{a}{2})}(X \leq a) = \dfrac{P[(X>\frac{a}{2}) \cap (X \leq a)]}{P(X>\frac{a}{2})}$

$$= \frac{P(\frac{a}{2} < X \leq a)}{P(X > \frac{a}{2})}$$

$$= \frac{F(a) - F(\frac{a}{2})}{1 - P(X \leq \frac{a}{2})}$$

$$= \frac{\frac{a^2}{4a^2} - \frac{(\frac{a}{2})^2}{4a^2}}{1 - \frac{(\frac{a}{2})^2}{4a^2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{4} - \frac{a^2}{4} \times \frac{1}{4a^2}}{1 - \frac{a^2}{2} \times \frac{1}{4a^2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{16}}{1 - \frac{1}{16}}$$

$$= \frac{\frac{3}{16}}{\frac{15}{16}}$$

$$= \frac{3}{16} \times \frac{16}{15} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

4) $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \times f(x)\,dx.$

Sous réserve de convergence:

$E(X) = \int_{-\infty}^{0} t \times 0\,dt + \int_{0}^{2a} t \times \frac{t}{2a^2}\,dt + \int_{2a}^{+\infty} 0 \times t\,dt. = \int_{0}^{2a} \frac{t^2}{2a^2}\,dt.$

$$= \left[ \frac{1}{2a^2} \times \frac{1}{3} t^3 \right]_0^{2a} = \left[ \frac{t^3}{6a^2} \right]_0^{2a} = \frac{(2a)^3}{6a^2} - \frac{0^3}{6a^2}$$

$$= \frac{8a^3}{6a^2}$$

$$= \frac{4a}{3}$$

5) $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \times f(x) \, dx.$

Sous réserve de convergence :

$$E(X^2) = \int_0^{2a} t^2 \times \frac{t}{2a^2} \, dt = \left[ \frac{t^4}{8a^2} \right]_0^{2a} = \frac{(2a)^4}{8a^2} - \frac{0^4}{8a^2} = \frac{16a^4}{8a^2} = 2a^2$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

$$= 2a^2 - \left(\frac{4a}{3}\right)^2$$

$$= 2a^2 - \frac{16a^2}{9}$$

$$= \frac{18a^2 - 16a^2}{9} = \frac{2a^2}{9}$$

X admet une variance et $V(X) = \frac{2a^2}{9}$

6) a) $G(x) = P(Y \leq x)$

$$= P(X^2 \leq x).$$

$$= P(X \leq \sqrt{x}).$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } \sqrt{x} < 0 \\ \frac{\sqrt{x}^2}{4a^2} & \text{si } 0 \leq \sqrt{x} \leq 2a \\ 1 & \text{si } \sqrt{x} > 2a \end{cases}$$

Prénom (s) ESTELLE

20 / 20

Écricome Épreuve : Mathématiques option technologique

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 *(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)*

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 05 / 05

Numéro de table 007

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{4a^2} & \text{si } 0 \leq x \leq 4a^2 \\ 1 & \text{si } x > 4a^2 \end{cases}$$

b) $Y \hookrightarrow U([0;4a^2])$.

c)

d)

7) a) Montrons que $T_n$ est un estimateur sans biais de $a$.

$b(T_n) = E(T_n) - a$.

$= E\left(\frac{3}{4n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right)$

$= \frac{3}{4n} \times E(X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n)$ - par linéarité de l'espérance

$= \frac{3}{4n} \times n\, E(X_n)$ - car les $X_i$ suivent tous la même loi.

$= \frac{3}{4} \times \frac{4a}{3} - a$

$= a - a = 0.$ Donc $T_n$ est un estimateur sans biais de A.

b) $R(T_n) = b(T_n)^2 - V(T_n).$

On il n'y a pas de biais donc $R(T_n) = V(T_n).$

$R(T_n) = V\left(\frac{3}{4n} \sum_{k=1}^{n} X_k\right)$

$= \left(\frac{3}{4n}\right)^2 \times V(X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n)$ par indépendance

$= \frac{9}{16n^2} \times n\, V(X)$ car $X_i$ suivent la même loi que $X$.

$= \frac{9}{16n} \times \frac{2a^2}{9} = \frac{2a^2}{16n}$