ECRICOME PREPA 2022 - ECT - Technologique

Mathématiques option technologique Mathématiques

HARENA

Note de délibération : 19.9 / 20

Prénom (s) HARENA

19.9 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématique

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 1 / 6

Numéro de table 24

Exercice 1

1a) $PQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

b). Selon 1a), $PQ = 3I$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3} PQ = I$

$\Leftrightarrow P\left(\frac{1}{3}Q\right) = I.$

Or l'inversibilité d'une matrice est défini par la relation :

$PP^{-1} = I.$

De ce fait, on peut en déduire que $P^{-1} = \frac{1}{3}Q$ et donc que P est inversible.

2 a) $X_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n \end{pmatrix}$

$MX_n = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}.$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.9 / 20

Soit $MX_n = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$

$$MX_n = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2a_n + b_n + c_n \\ a_n + 2b_n + c_n \\ a_n + b_n + 2c_n \end{pmatrix}$$

$$MX_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{4}b_n + c_n \\ \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n \end{pmatrix}$$

Les résultats sont identique. Donc :

$$X_{n+1} = MX_n$$

2b). Montrons par récurrence que : $X_n = M^n X_0$.

Initialisation : pour $n = 0$

$X_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$

$M^0 X_0 = IX_0 = X_0 \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$

Donc vrai pour $n = 0$ car $X_0 = M^0 X_0$

Hérédité : pour $n \in \mathbb{N}$.

Supposons que : $X_n = M^n X_0$

Montrons que : $X_{n+1} = M^{n+1} X_0$.

$X_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = MX_n$ selon 2a).

Or par hypothèse de récurrence :

$MX_n = M(M^n X_0)$

$MX_n = M^{n+1} X_0 = X_{n+1}$

Donc c'est vrai par $n+1$.

En conclusion, d'après le principe de récurrence, pour $n \in \mathbb{N}$.

$X_n = M^n X_0.$

3a) $(4M - I)(4M - 4I) = 4M \times 4M - 4M \times 4I - 4M + 4I.$

$= 16M^2 - 16M - 4M + 4I$

faux $= 16M^2 - 20M + 4I.$

Posons un polynôme annulateur $P = 16X^2 - 20X + 4.$

$\Delta = (-20)^2 - 4 \times 16$

Calculons : $(4M - I)(4M - 4I)$

$$4M - I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$4M - 4I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Ainsi. $$(4M - I)(4M - 4I) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(4M - I)(4M - 4I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$(4M - I)(4M - 4I) = 0.$

Donc $(4M - I)(4M - 4I)$ est bien la matrice nulle

b) Puisque $(4M - I)(4M - 4I) = 0$

~~Les~~ Posons un polynôme $P = (4X-1)(4X-4)$.

Les solutions sont : $4x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 4x = 1$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{4} 1 = \frac{1}{4}$

Et $4x - 4 = 0$

$4x = 4$

$X = 1$

Ainsi les valeurs propres d'une matrice sont parmi les racines de son polynôme annulateur, or P est un polynôme annulateur de M. Donc les valeurs propres possibles sont $\frac{1}{4}$ et 1.

4a) La Matrice D contient les valeurs propres de M :

Les valeurs propres sont $\frac{1}{4}$ et 1 :

(*) Démonstration

Donc $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

b) $M^n = P D^n P^{-1}$.

(*) 4a (suite) Pour savoir quelles valeurs correspondent à quels vecteurs, il faut calculer la matrice M avec les vecteurs V_1, V_2 et V_3 pour savoir la place des valeurs propres dans la Matrice D. De ce fait :

$$MV_1 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 V_1.$$

$$MV_2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} V_2.$$

$$MV_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} V_3.$$

Prénom (s) HARENA

19.9 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématique

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 2 / 6

Numéro de table 24

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \left(\frac{1}{4}\right)^n & 0 \\ 1 & -\left(\frac{1}{4}\right)^n & \left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1 & 0 & -\left(\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n & \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n & \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix}.$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 + 2\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n & 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n & 1 - 2\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n & 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n & 1 + 2\left(\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix}$$

d) Puisque M^n est défini précédement et que $X_n = M^n X_0$.

Donc $X_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Alors : $X_n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 + 2\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n & 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n & 1 + 2\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n & 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n & 1 + 2\left(\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$X_n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 + 2\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix}.$

Or $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. Donc par $\forall n \in \mathbb{N}$,

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.9 / 20

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\left(1+2\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) \\ \frac{1}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) \\ \frac{1}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{4^n}\right) \\ \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right) \\ \frac{1}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4^n}\right)\right). \end{pmatrix}$$

Donc par $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\left\{\begin{array}{l} a_n = \frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{4^n}\right) \\ b_n = \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right) \\ c_n = \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right) \end{array}\right.$$

4) . $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{4^n} = 0$ car $4^n > 2$. Donc par opérations sur les limites :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{3}.$$

De même $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{4^n} = 0$. Donc par opérations sur les limits :

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = \frac{1}{3}.$$

Donc. toutes les suites convergent et vaut $1/3$

5). $n=0$

$a=1$; $b=0$

while $a >= 0{,}334$; $b <= 0.333$.

$n = n+1$.

$a = 1/3 * (1 + 2/4\hat{}n)$

$b = 1/3 * (1 - 1/4\hat{}n)$.

end

disp (n). .

Partie B :

6- A_0 signifie qu'on a pas encore bougé le pion. Donc, puisque en $n = 0$, le pion est obligatoirement en 0 :

$$P(A_0) = 1.$$

Ainsi, $P(B_0) = P(C_0) = 1$

A_1 signifie que le pion est resté sur la case 0 en $n=1$.
$P(A_1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ car on peut avoir tiré le chiffre 0 de probabilité $\frac{1}{4}$ ou avoir tiré le chiffre 3 (de probabilité $\frac{1}{4}$) qui nous permet après 1 tour de retourner sur la case départ.

$P(B_1) = \frac{1}{4}$ car on a une chance sur quatre de tirer 1.

De même $P(C_1) = \frac{1}{4}$.

7a) Comme on l'a vu précédemment, à partir de la case 0 en n, on ne peut aller à 0 que si et seulement si on reste sur place ou on fait 1 tour complet, c'est à dire tirer le chiffre 0 ou 3 qui sont de même probabilité $\frac{1}{4}$.

Donc comme la réponse en b). $P_{A_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

En n, si on est sur la case 1, on ne peut aller en 0 que si on tire le chiffre 2 par nt de probabilité $\frac{1}{4}$.

De ce fait, $P_{B_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{4}$.

En n, si on est sur la case 2, on ne peut aller en 0 que si on tire le chiffre 1 par nt de probabilité $\frac{1}{4}$.

De ce fait, $P_{C_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{4}$

c). On reconnait des systèmes complets d'événement entre A_n, B_n et C_n ; ainsi, par la formule des probabilités totale :

- $P(A_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(A_{n+1})$.
$= \frac{1}{2}P(A_n) + \frac{1}{4}P(B_n) + \frac{1}{4}P(C_n)$.

- $P(B_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(B_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(B_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(B_{n+1})$.
$= \frac{1}{4}P(A_n) + \frac{1}{2}P(B_n) + \frac{1}{4}P(C_n)$.

- $P(C_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(C_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(C_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(C_{n+1})$.

$= \frac{1}{4}P(A_n) + \frac{1}{4}P(B_n) + \frac{1}{2}P(C_n)$.

Pour $P(B_n)P_{B_n}(B_{n+1})$ et $P(C_n)P_{C_n}(C_{n+1})$, les probabilités sont $\frac{1}{2}$ en suivant le même procédé que $P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1})$ expliqué précédemment.

Prénom (s) HARENA

19.9 / 20

Écricome Épreuve : Mathématique

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 3 / 6

Numéro de table 24

(Suite partie B).

c). On reconnait les mêmes valeurs des suites a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1} et $P(A_{n+1})$, $P(B_{n+1})$, $P(C_{n+1})$. On peut en déduire que :

- $P(A_{n+1}) = a_{n+1}$ et donc $a_n = P(A_n)$
- $P(B_{n+1}) = b_{n+1}$ et donc $b_n = P(B_n)$
- $P(C_{n+1}) = c_{n+1}$ et donc $c_n = P(C_n)$

8- Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \lim\limits_{n\to+\infty} c_n = \frac{1}{3}$.

Cela revient à dire finalement qu'en $+\infty$, après de multiple répétition de cette expérience, le pion a finalement la même probabilité (c'est à dire $\frac{1}{3}$) de tomber sur la case 0, 1 ou 2. On reconnait une équiprobabilité des trois évènements qui revient à dire qu'il existe une variable aléatoire, regroupant A_n, B_n et C_n et qui suit à une loi uniforme de paramètre $\frac{1}{3}$.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.9 / 20

Exercice 3.

1- $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$

$\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{2a^2} = 0$

Donc f est continue en 0.

$\lim_{x \to 2a^-} f(x) = \frac{\cancel{2}\cancel{a}}{\cancel{2}\cancel{a}^2} = \frac{1}{a}$.

$\lim_{x \to 2a^+} f(x) = 0$

Non, la fonction est discontinue en 2a.

2. ⊛ pour $x < 0$, $f(x) = 0$
pour $x \geq 2a$, $f(x) = 0$
pour $x \in [0; 2a]$, puisque $x \geq 0$ et $2a \geq x \geq 0$, $\frac{x}{2a^2} \geq 0$
et donc $f(x) \geq 0$
→ Donc pour $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$.

⊛ la fonction est discontinue en 2a selon 1)
→ Donc f est discontinue sur $\mathbb{R}$.

(*) $\int_{-\infty}^{0} f(x)dx = \int_{2a}^{+\infty} f(x)dx = 0$ car f est nulles pour $x<0$ et $x>2a$.

pour $x \in [0;2a]$, $\int_0^{2a} f(x)dx = \int_0^{2a} \frac{x}{2a^2} = \frac{1}{2a^2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{2a}$

$$\int_0^{2a} f(x)dx = \frac{1}{2a^2}\left(\frac{(2a)^2}{\cancel{2}} - 0\right)$$

$$\int_0^{2a} f(x)dx = \frac{1}{\cancel{2a^2}} \times \frac{\cancel{2a^2}}{1} = 1.$$

Par la relation de Chasles :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_0^{2a} f(x)dx + \int_{2a}^{+\infty} f(x)dx$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 0 + 1 + 0$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

→ Donc l'intégrale converge et vaut 1.

⇒ Donc f est une densité de probabilités les 3 conditions étant remplies.

5a) On sait que $f(x) = F'(x)$ et : $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = P(X \leq x)$

(*) pour $x<0$, $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$
$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} f(t)dt - \int_x^0 f(t)dt$$
$$F(x) = 0$$

(*) pour $x \in [0;2a]$, $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$
$$F(x) = \int_0^x \frac{t}{2a^2}dt$$
$$F(x) = \frac{1}{2a^2} \times \frac{x^2}{2}$$ en se basant sur la question 2).

Donc pour $x \in [0; 2a]$: $F(x) = \frac{x^2}{2a^2}$.

⊛ pour $x < 2a$, $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = 1$ car c'est la somme de toutes les probabilités. Donc :

pour X, VA définie sur $\mathbb{R}$:

$$\boxed{F(x) : \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^2}{2a^2} & \text{si } 0 \leq x \leq 2a \\ 1 & \text{si } x > 2a \end{cases}}$$

3.b). $P_{(X > \frac{a}{2})}(X \leq a) = \frac{P(X > \frac{a}{2} \cap X \leq a)}{P(X > \frac{a}{2})}$ selon la formule des probabilités conditionnelles :

↳ Or $P(X > \frac{a}{2} \cap X \leq a) = P(\frac{a}{2} < X \leq a) = F(a) - F(\frac{a}{2})$.

Ainsi $P(X > \frac{a}{2} \cap X \leq a) = \frac{\cancel{a^2}}{4\cancel{a^2}} - \frac{(\frac{a}{2})^2}{4a^2} = \frac{1}{4} - \frac{\cancel{a^2}}{4} \times \frac{1}{4\cancel{a^2}} = \frac{1}{4} - \frac{1}{16}$

$P(X > \frac{a}{2} \cap X \leq a) = \frac{3}{16}$.

↳ Mais aussi $P(X > \frac{a}{2}) = 1 - P(X \leq \frac{a}{2}) = 1 - F(\frac{a}{2})$.

$= 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$.

$$\boxed{\text{Donc } P_{(X > a/2)}(X \leq a) = \frac{\frac{3}{\cancel{16}}}{\frac{15}{\cancel{16}}} = \frac{1}{5}}$$

(Question 4 feuille suivante).

Prénom (s) KARENA 19.9 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématique

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 4 / 6

Numéro de table

4- $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$.

$E(X) = \int_0^{2a} x\left(\frac{x}{2a^2}\right)$ car $f(x) = 0$ pour $x < 0$ et $x > 2a$.

$E(X) = \frac{1}{2a^2}\int_0^{2a} x^2\,dx = \frac{1}{2a^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{2a} = \frac{1}{2a^2}\left(\frac{(2a)^3}{3} - 0\right)$.

$E(X) = \frac{1}{2a^2} \times \frac{8a^3}{3} = \frac{4a}{3}$

Donc $E(X) = \frac{4a}{3}$

5- $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx$

$E(X^2) = \int_0^{2a} x^2\left(\frac{x}{2a^2}\right)dx$ car $f(x) = 0$ pour $x < 0$ et $x > 2a$.

$E(X^2) = \frac{1}{2a^2}\int_0^{2a} x^3\,dx = \frac{1}{2a^2}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^{2a} = \frac{1}{2a^2}\left(\frac{(2a)^4}{4}\right)$.

$E(X^2) = \frac{1}{2a^2} \times \frac{16a^4}{4} = \frac{8a^2}{4}$

Ainsi $E(X^2)$ converge et vaut $\frac{8a^2}{4}$ ce qui justifie

l'existence de $V(X)$.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.9 / 20

Selon Koenig-Huygens : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

De ce fait : $V(X) = \frac{8a^2}{4} - \left(\frac{4a}{3}\right)^2 = \frac{8a^2}{4} - \frac{16a^2}{9}$

$$V(X) = \frac{72a^2 - 64a^2}{36} = \frac{8a^2}{36} = \frac{2a^2}{9}$$

Donc $V(X) = \frac{2a^2}{9}$

6-a) $G(x) = P(Y \leq x) = P(X^2 \leq x) = P(X \leq \sqrt{x}) = F(\sqrt{x})$.

Or pour $x \in [0; 4a^2]$, $F(\sqrt{x}) = \frac{(\sqrt{x})^2}{4a^2} = \frac{x}{4a^2}$.

Or comme $F(\sqrt{x}) = G(x)$.

Donc pour $x \in [0; 4a^2]$, $G(x) = \frac{x}{4a^2}$

b) Si pour $x \in [0; 4a^2]$, $G(x) = \frac{x}{4a^2}$. On peut en déduire que Y suit une

pour $x \in [0; 4a^2]$.

c) Cette commande signifie qu'on doit simuler le choix aléatoire d'un réel uniformément entre 0 et $4a^2$.

d) . Script Scilab permettant de réaliser la VA X

```
rand (k) * 4 * a^2.
  If  k >= 0; k <= 2a.
    X =
  If  k < 0; k > 2a.
    X = 0.
 end
disp (X)
```

7-a) $E(T_n) = E\left(\frac{3}{4n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{3}{4n}\sum_{k=1}^{n} E(X_k).$

Comme $X_1, X_2 \dots X_n$ sont des VA indépendantes suivant toute la même loi que X :

$$E(T_n) = \frac{3}{4n} \times nE(X)$$

$$E(T_n) = \frac{\cancel{3}}{4\cancel{n}} \times \cancel{n}\frac{4a}{\cancel{3}} = a.$$

Or selon la formule du biais de l'estimateur :

$$b(T_n) = E(T_n) - a = a - a = 0.$$

Comme $b(T_n) = 0$, T_n est un estimateur sans biais de a

b). $r(T_n) = V(T_n) + b(T_n)$

$r(T_n) = V(T_n)$ car $b(T_n) = 0$ selon 7a).

Donc $r(T_n) = \frac{2a^2}{9}$

c). n= length(X) // longueur X

$I_n = (3/(4*n)) * (\text{sum}(1;n)X)$.

disp ( ).

Exercice 2

1a) $\lim_{x \to -1} \ln(1+x) = \lim_{X \to 0} \ln(X) = -\infty$.

Par opérations sur les limites :

$$\lim_{x \to -1} x\ln(1+x) = +\infty.$$

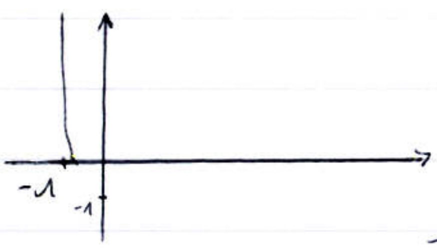
Quand x tend vers -1, il y a une asymptote verticale.

b). $\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} \ln(1+x) = +\infty$.

$\Big\}\ \lim_{x \to +\infty} x\ln(1+x) = +\infty$

c) Puisque en -1 et en $+\infty$, la limite de la fonction est $+\infty$, on peut supposer qu'il existe une branche parabolique dirigée vers le haut de cette sorte : $\cup$.



$\Big\}$ Faux

2a) $f'(x) = x\ln'(1+x)$

$f'(x) = \ln(1+x) + x \times \frac{1}{1+x} = \ln(1+x) + \frac{x}{1+x}$.

Prénom (s) H A R E N A

19.9 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématique

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 5 / 6

Numéro de table 21.

b) $f'(x) = \ln(1+x) + \frac{x}{1+x}$.

$$f''(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1+x - x \times 1}{(1+x)^2}$$

$$f''(x) = \frac{1(1+x)}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+x)^2}$$

$$f''(x) = \frac{x+2}{(1+x)^2}$$

c). sur $]-1;+\infty[$, f' est toujours croissante ce qui vient à dire que sur $]-1;+\infty[$, f est convexe. En effet, $x+2 \geq 0$ pour $x \geq -2$ or x est constamment supérieur à -2 sur $]-1;+\infty[$. Mais aussi $(1+x)^2 > 0$. Donc $f''(x) \geq 0$ pour $x \in]-1;+\infty[$. ce qui vient clarifier la croissance de $f'(x)$ sur $]-1;+\infty[$.

3a) $f'(0) = \ln(1) + \frac{0}{1+x} = 0$.

pour $x > -1$, $f'(x)$ est positive entre $[0;+\infty[$ et négative entre $]-1;0]$.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

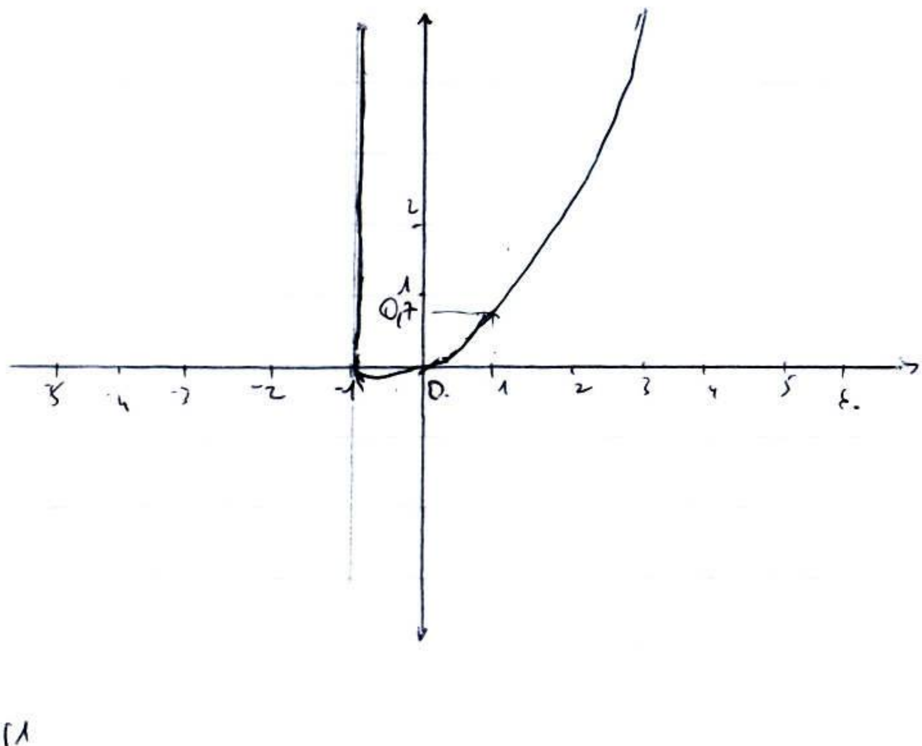
19.9 / 20

3 b).

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$			convexe		
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

croissant

4-



5- a) $I = \int_0^1 f(x)dx$

$I = \int_0^1 x\ln(1+x)\,dx$. Par intégrations par parties :

$I = \left[\frac{x^2}{2} \ln(1+x) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2} \times \frac{1}{1+x}\,dx$.

$I = \ln(2) \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 \times \frac{1}{x+1}\,dx$

Donc $I = \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx.$

5-b) $x - 1 + \frac{1}{x+1} = \frac{x(x+1) - (x+1) + 1}{x+1} = \frac{x^2 + \cancel{x} - \cancel{x} - \cancel{1} + \cancel{1}}{x+1} = \frac{x^2}{x+1}.$

Donc. $x - 1 + \frac{1}{x+1} = \frac{x^2}{x+1}$

5-c) $\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx = \int_0^1 x - 1 + \frac{1}{x+1}\,dx$ selon 5b).

$\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1) \right]_0^1$

$\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx = \frac{1}{2} - 1 + \ln(2).$

5-d). $I = \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx.$

$I = \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1 + \ln(2) \right)$

$I = \cancel{\frac{\ln(2)}{2}} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \cancel{\frac{\ln(2)}{2}}.$

$I = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

Donc $I = \frac{1}{4}$

6). function : y = f(x)

y = (x ∧ n) * log (1 + x).

end function.

for n = 1 ; 5 ; 10 ; 20 ; 50.

x = linspace (0, 1, 100).

plot2d (1 , f(x)).

end.

7a) À partir du graphique ci dessus, on peut en déduire qu'en $+\infty$, l'intégrale In converge et admet une asymptote horizontale et fn admet une asymptote verticale.

7-b) On peut voir que plus n augmente, plus fn tend et se rapproche de l'asymptote verticale égale à $x=1$.
Or $f(1) = 0$ pour $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
Ainsi, la limite de In tend vers 0 en $+\infty$.

8a) pour $x \in [0, 1]$:

$0 \leq x \leq 1$

$\Leftrightarrow 1 \leq x+1 \leq 2$.

$\Leftrightarrow \ln(1) = 0 \leq \ln(x+1) \leq \ln(2)$

$\Leftrightarrow x^n \times 0 \leq x^n \ln(x+1) \leq x^n \times \ln(2)$ par multiplication de chaques termes avec x^n.

Donc $0 \leq x^n \ln(x+1) \leq x^n \ln(2)$.

8-b) Selon 8) $0 \leq x^n \ln(x+1) \leq x^n \ln(2)$.

par croissance de l'intégrale $\Leftrightarrow \int_0^1 0 \, dx \leq \int_0^1 x^n \ln(x+1) \leq \int_0^1 x^n \ln(2)$

$\Leftrightarrow 0 \leq In \leq \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \ln(2) \right]_0^1$

Donc $\Leftrightarrow 0 \leq In \leq \frac{1 \times}{n+1} \ln(2)$.

De ce fait, pour $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

et $0 \leq In \leq \frac{\ln(2)}{n+1}$

Prénom (s) H A R E N A

19.9 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématique

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 6 / 6

Numéro de table 24.

8-c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(2)}{n+1} = 0$

Or $I_n \geq 0$ et $I_n \leq \frac{\ln(2)}{n+1}$.

Par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.9 / 20