ECRICOME PREPA 2022 - ECT - Technologique

Mathématiques option technologique Mathématiques

502515

EL KHARROUBI

MANAL

03/03/2003

Note de délibération : 17.5 / 20

Numéro d'inscription 502515

Né(e) le 03/03/2003

Signature M.E

Nom ELKHARROUBI

Prénom (s) HANAL

17.5 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 01/04

Numéro de table 021

∘ Exercice 1 :

1)a) Calculons PQ

$$PQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3I_3$$

b) On a $PQ = 3I_3$

Donc $P\left(\frac{1}{3}Q\right) = I_3$

D'où P est inversible, ainsi $P^{-1} = \frac{1}{3}Q$

2) a) Soit $n \in \mathbb{N}$,

on a $X_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n \end{pmatrix}$

Et $MX_n = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n \end{pmatrix}$

$= X_{n+1}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

17.5 / 20

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N})$, $X_{n+1} = M X_n$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$; Posons P_n : « $M^n X_0$ »

Montrons par récurrence, que pour tout x de $\mathbb{N}$ que P_n est vraie

. Initialisation : $(n=0)$

On a $X_0 = M^0 X_0 = I_3 X_0 = X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Alors la proposition est vraie pour $n = 0$.

. Hérédité : ~~$(n \in \mathbb{N})$~~

Pour $n \in \mathbb{N}$, on suppose que P_n est vraie et on montre que P_{n+1} est vraie ainsi :

On a d'après l'hypothese de recurrence que : $X_n = M^n X_0$

Et d'après la question 2)a) que ~~$(X_{n+1} = M^n X_0)$~~

~~$(X_{n+1} = M X_0)$~~ $X_{n+1} = M X_n$

Donc : $X_{n+1} = M X_n$
$= M . M^n X_0$
$= M^{n+1} X_0$

Donc P_{n+1} est vraie.

Conclusion :

Par principe de recurrence, on a pour tout n de $\mathbb{N}$, que :

$$X_n = M^n X_0$$

3) a) Calculons $(4M - I)(4M - 4I)$

$$4M - I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(4M-4I) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Donc $(4M-I)(4M-4I) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_3$$

b. On a d'après 3/a) que $(4M-I)(4M-4I)$ donc il est claire que le polynôme $P(X) = (4X-1)(4X-4)$ est polynôme annulateur de M, alors les racines de ce dernier seront les valeurs propres possibles de M. D'où :

$$(4X-1)(4X-4) = 0 \iff 4X-1 = 0 \text{ ou } 4X-4 = 0$$
$$\iff X = \frac{1}{4} \text{ ou } X = 1$$

Donc les valeurs propres possibles de M sont : $\frac{1}{4}$, 1.

~~(4)a. $M = PDP^{-1}$)~~

4)a). on a $M = PDP^{-1}$, donc par des relations de multiplication, on trouve :

$$M = PDP^{-1} \iff P^{-1}MP = (P^{-1}P)D(P^{-1}P)$$
$$= I_3 D I_3 = D.$$

Alors $D = P^{-1}MP$.

b) Pour tout n entier naturel, on a $M^n = PD^nP^{-1}$

c) Soit n un entier naturel, alors calculons $M^n = PD^nP^{-1}$

Alors :

$(M^n =)$ $PD^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{4}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{4}\right)^n & \left(\frac{1}{4}\right)^n & 0 \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$

$M = PD^nP^{-1} =$

d) On a d'après la question 2/a/, que $X_n = H^n X_0$

Et d'après 1/c/ que $H^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1+2\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1+2\left(\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix}$

De plus $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Donc $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{4^n}\right) \\ \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right) \\ \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right) \end{pmatrix}$

D'où ~~(Pour)~~ Pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{4^n}\right) \\ b_n = \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right) \\ c_n = \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right) \end{cases}$$

e) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{4^n}\right) = \boxed{\frac{1}{3}}$ (car $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$)

$\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \lim\limits_{n\to+\infty} c_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right) = \boxed{\frac{1}{3}}$ (car $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$)

5. Complétons scilab

2. a = 1 ; b = 0
3. While a >= 0,334 | b_n <= 0,333
4. n = n + 1
6. b = $\frac{1}{3}$ * (1 - (1/4)^ n)
8. disp (n)

. Partie B :

6) Selon le protocole : $P(A_0) = 0$; $P(B_0) = \emptyset$; $P(C_0) = \emptyset$

$P(A_1) = \frac{1}{4}$; $P(B_1) = \frac{1}{4}$; ~~(P(A)~~ $P(C_1) = \frac{1}{4}$

Numéro d'inscription 502515

Né(e) le 03/03/2003

Signature

Nom ELKHARROUBI

Prénom (s) HANAL

17.5 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet 1 ou 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 02/04

Numéro de table 021

7)a) Selon le protocole, on tire k d'une façon équiprobable de l'ensemble $\{0; 1; 2; 3\}$

Et l'évenement $[A_n]$ $[A_{n+1}]$ signifie que à l'issue du $n+1^{ième}$ coup, le pion est sur la case 0 alors qu'il était à $n^{ième}$ coup sur 0.

Donc $P_{A_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{2}$

De plus,

$P_{B_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{4}$ | $P_{C_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{4}$

~~b. On a A_{n+1}, B_{n+1} et C_{n+1} constituent un système complet d'évenement, d'après la formule de probabilité totale, on aura :~~

$$P(A_{n+1}) = P(A_n) \times P_{(A_n)}(A_{n+1}) + P(B_n) \times P_{(B_n)}(A_{n+1}) + P(C_n) \times P_{C_n}(A_{n+1})$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$P(B_{n+1}) = P(A_n) \times P_{(A_n)}(B_{n+1}) + P(B_n) \times P_{(B_n)}(B_{n+1}) + P_{?}(C_n)$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

17.5 / 20

$\times P_{(C_n)}(B_{n+1}) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$

$P(C_{n+1}) = P(A_n) \times P_{(A_n)}(C_{n+1}) + P(B_n) \times P_{(B_n)}(C_{n+1}) + P(C_n) \times P_{(C_n)}(C_{n+1})$

$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{3}}$

b) On a A_{n+1}, B_{n+1} et C_{n+1} constituent un système complet d'événement, alors d'après la formule des probabilité totale ; on a :

$P(A_{n+1}) = P(A_n) \times P_{(A_n)}(A_{n+1}) + P(B_n) \times P_{(B_n)}(A_{n+1}) + P(C_n) \times P_{C_n}(A_{n+1})$

$= P(A_n) \times \frac{1}{2} + P(B_n) \times \frac{1}{4} + P(C_n) \times \frac{1}{4}$

$= \frac{1}{2} P(A_n) + \frac{1}{4} P(B_n) + \frac{1}{4} P(C_n)$

$P(B_{n+1}) = P(A_n) \times P_{(A_n)}(B_{n+1}) + P(B_n) \times P_{(B_n)}(B_{n+1}) + P(C_n) \times P_{(C_n)}(B_{n+1})$

$= \frac{1}{4} P(A_n) + \frac{1}{2} P(B_n) + \frac{1}{4} P(C_n)$

$P(C_{n+1}) = P(A_n) \times P_{(A_n)}(C_{n+1}) + P(B_n) \times P_{(B_n)}(C_{n+1}) + P(C_n) \times P_{(C_n)}(C_{n+1})$

$= \frac{1}{4} P(A_n) + \frac{1}{4} P(B_n) + \frac{1}{2} P(C_n)$

c. On déduit que : $P(A_n) = a_n = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{4^n}\right)$ et $P(B_n) = b_n = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right)$ et $P(C_n) = c_n = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{4^n}\right)$

8. Selon la question 7/c/

$P(A_n)$

- Exercice 2 :

1) a) $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} x \ln(1+x) = -\infty$

Donc $(\mathscr{C}_f)$ admet une asymptôte vertical d'équation $y = -1$.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x \ln(1+x) = +\infty$ (Par croissance comparée)

c) Donc $(\mathscr{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction (OY) au voisinage de $+\infty$ (car $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = +\infty$)

2) a) On a $x \to x \ln(1+x)$ une fonction dérivable sur $]-1;+\infty[$ comme étant un produit de deux fonction dérivable, alors:

$$f'(x) = x' \ln(1+x) + x \frac{1}{1+x} =$$
$$= \ln(1+x) + \frac{x}{1+x} = \frac{(1+x)\ln(1+x) + x}{1+x}$$

b) Soit $x \in]-1;+\infty[$; on a $x \to \ln(x) + \frac{x}{1+x}$ est une fonction dérivable sur $]-1;+\infty[$ comme étant une somme de deux fonctions dérivable, alors:

$$f''(x) = \left(\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}\right)' = \frac{[(1+x)\ln(1+x) + x]'(1+x) - [(1+x)\ln(1+x) + x] \times (1+x)'}{(1+x)^2}$$
$$= \frac{x+2}{(1+x)^2}$$

c) Soit $x \in]-1;+\infty[$; on a $1+x > 0$, alors le signe de f' est celui de $(1+x)\ln(1+x)+x$

Or $\ln(1+x) > 0$; donc $(1+x)\ln(1+x) \geq 0$

D'où $(1+x)\ln(1+x)+x \geq 0$

Donc f'

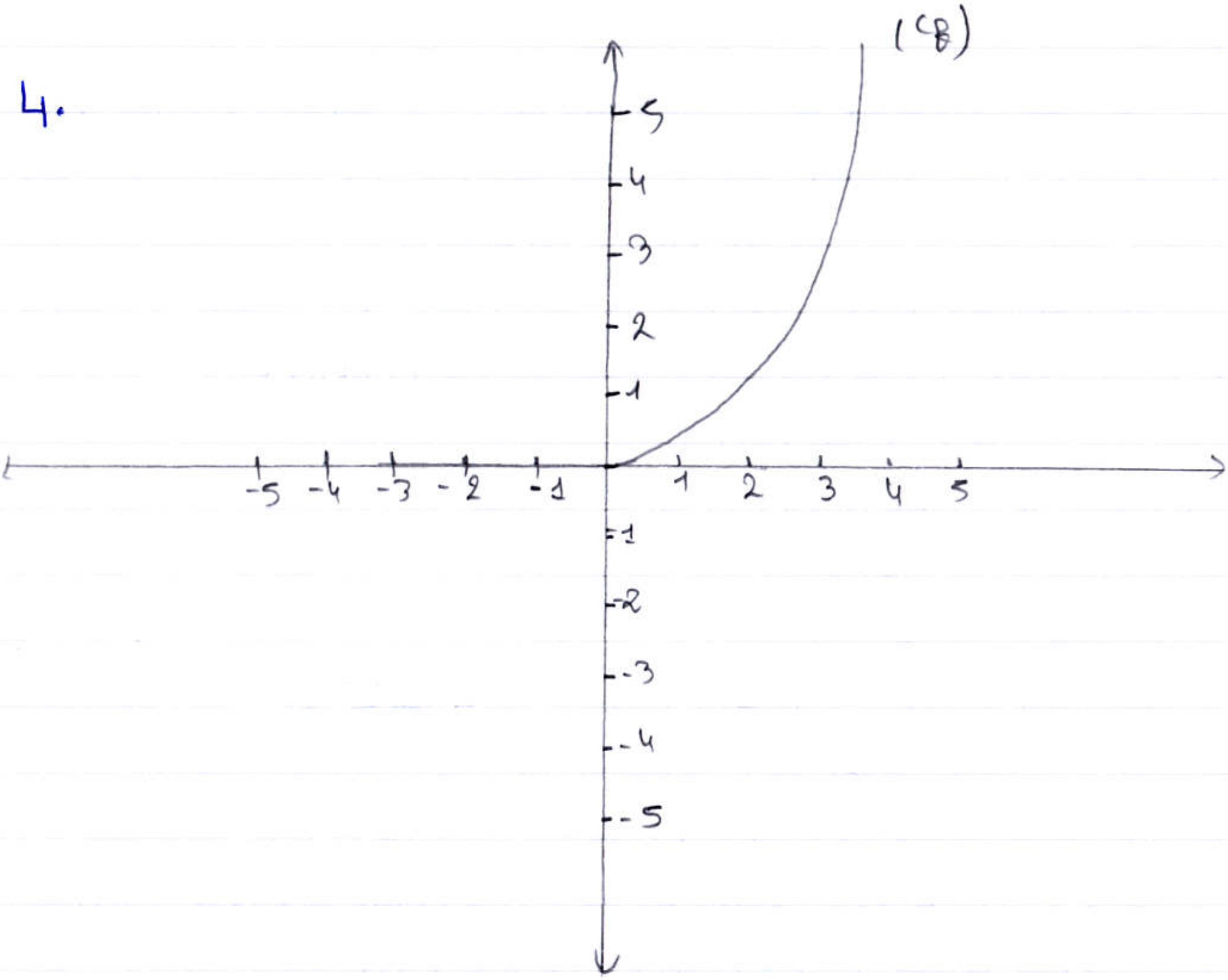
x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

3)a) on a $f'(0) = 0$ et d'après la question 2.c ; on aura
Pour tout $x > -1$; le signe de $f'(x)$ est positive

b)

x	1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4.



5)a. On pose $U(x) = \ln(1+x)$ donc $U'(x) = \frac{1}{1+x}$
Et $V'(x) = x$ donc $V(x) = \frac{x^2}{2}$
On a les fonction U, U', V' et V sont continue sur $[0, 1]$
Alors par intégration par partie, on trouve :

$$I = \left[\ln(1+x) \times \frac{x^2}{2} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{1+x} \times \frac{x^2}{2} \, dx$$

Numéro d'inscription 502515

Né(e) le 03/03/2003

Nom ELKHARROUBI

Prénom (s) HANAL

Signature

17.5 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 01/04

Numéro de table 021

La suite de la question 5/a) exercice 2 :

$$I = \left[\ln(2) \times \frac{1}{2}\right] - \int_0^1 \frac{x^2}{2(1+x)}\,dx$$

$$\left(= \cancel{\ln(2) \times \frac{1}{2} - \int_0^1 \frac{x^2}{}} \right)$$

$$= \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{(1+x)}\,dx.$$

b) Soit $x \in [0; 1]$; on a $x - 1 + \frac{1}{x+1} = \frac{x(x+1)-(x+1)+1}{x+1}$

$$= \frac{x^2 \cancel{+x} \cancel{-x} \cancel{-1} \cancel{+1}}{x+1} = \frac{x^2}{x+1}$$

c) $\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx$:

On a $x \rightarrow \frac{x^2}{x+1}$ est une fonction continue, donc :

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx = \int_0^1 x - 1 + \frac{1}{x+1}\,dx = \int_0^1 x\,dx - \int_0^1 1\,dx$$

$$+ \int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - \left[x\right]_0^1 + \left[\ln(1+x)\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} - 1 + \ln(2) = \frac{1 - 2 + 2\ln(2)}{2}$$

$$= \frac{-1 + 2\ln(2)}{2}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

17.5 / 20

d_ D'aprés 5/a/, 5/b/ et 5/c ; on déduit que :

$$I = \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{-1+2\ln(2)}{2}\right]$$

6. Complétons scilab.

2. y = x^n x log(1+x)

4. n = [1 ; x]

6. fplot2d(n , X)

7. a.

b. D'après le graphique, on déduit que la limite de la suite (I_n) tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.

8) a. Soit $x \in [0; 1]$; on a :

$$0 \leqslant x \leqslant 1$$

D'où : $\boxed{0 \leqslant x^n \leqslant x^n}$ ①

Et $1 \leqslant 1+x \leqslant 2$ alors $\boxed{0 \leqslant \ln(1+x) \leqslant \ln(2)}$ ②

Donc, De ① et ② :

$$0 \leqslant x^n \ln(1+x) \leqslant x^n \ln(2)$$

~~(b) On déduit, donc :~~
~~$(\forall n \in \mathbb{N})$, $0 \leqslant I$~~

b). on a d'après la question précédente que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; \quad 0 \leqslant x^n \ln(1+x) \leqslant x^n \ln(2)$$

Et puisque $x \to x^n \ln(2)$ et $x \to x^n \ln(1+x)$ sont continue sur $[0; 1]$

De plus : par la positivité d'intégrale, on trouve :

$$\int_0^1 0 \, dx \leq \int_0^1 x^n \ln(1+x) \leq \int_0^1 x^n \ln(2) \, dx$$

(ie) $\quad 0 \leq I_n \leq \frac{\ln(2)}{n+1} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$

c) On a $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 0 \leq I_n \leq \frac{\ln(2)}{n+1}$

Et $\lim_{n \to +\infty} 0 = 0$ et $\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(2)}{n+1} = 0$.

Donc par théoreme de gendarme, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} I_n = 0.$$

- Exercice 3 :

1. * Continuité de f en 0 :

On a $f(0) = \frac{0}{2a^2} = 0$ et $\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{2a^2} = 0$ donc f est continue en point 0.

* Continuité de f en $2a$:

On a $f(2a) = \frac{2a}{2a^2} = \frac{1}{a}$ et $\lim_{x \to 2a} \frac{x}{2a^2} = \frac{1}{a}$ donc f est continue en point $2a$.

2. * On a pour $x < 0$ et $x > 2a$, la fonction f est nulle donc elle est positive dans ces deux intérvales.

Et puisque a est un nombre strictement positive, on a pour $0 \leq x \leq 2a$: $f(x) = \frac{x}{2a^2} \geq 0$.

Donc $f(x)$ est positive

* On a d'après la question 1 que f est continue sur $[0 ; 2a]$. Et pour $x > 2a$ et $x < 0$; $f(x)$ est une fonction nulle, alors f est continue sur $]-\infty ; 0[\cap]2a ; +\infty[$. Donc f est continue sur $\mathbb{R}$ par morceau.

* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx = \int_{-\infty}^{0} f(x) dx + \int_0^{2a} f(x) \, dx + \int_{2a}^{+\infty} f(x) \, dx$

$= \int_a^{2a} f(x) \, dx$ (car f est nulle sur $]-\infty ; 0[$ et

$]2a ; +\infty[$). Alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) = \int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^{2a} \frac{x}{2a^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2a^2}\int_0^{2a} x\,dx = \frac{1}{2a^2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{2a}$$

$$= 1.$$

Alors, il est bien vrai que f est une densité

3. a. si $x < 0$; $\int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{x} 0\,dx = 0$

si $0 \leq x \leq 2a$: $\int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx' = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_0^{x} f(x)\,dx$

$$= \int_0^{2a} f(x)\,dx$$

$$= \frac{\cancel{2}}{2a^2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{x}$$

$$= \frac{x^2}{4a^2}$$

• Si $x > 2a$; $\int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_0^{2a} f(x)\,dx + \int_{2a}^{x} f(x)\,dx$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_0^{2a} \frac{x}{2a^2}\,dx + \int_{2a}^{x} 0\,dx$$

$$= 1.$$

Alors $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^2}{4a^2} & \text{si } 0 \leq x \leq 2a \\ 1 & \text{si } x > 2a. \end{cases}$

b) $P_{[X > \frac{a}{2}]}(X \leq a) = \dfrac{P(X \leq a) \times P_{[X \leq a]}[X > \frac{a}{2}]}{P[X > \frac{a}{2}]}$

$$= \frac{P[X > \frac{a}{2})}{P[X > \frac{a}{2}]} = \frac{1 - F(\frac{a}{2})}{1 - F(\frac{a}{2})}$$

Numéro d'inscription 502515

Né(e) le 03/03/2003

Signature H.E

Nom ELKHARROUBI

Prénom (s) MANAL

17.5 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet 1 ou 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 04/04

Numéro de table 021

. La suite d'exercice 3,3 b :

Donc $P_{[X > \frac{a}{2}]}(X \leq a) = \dfrac{1 - \dfrac{(\frac{a}{2})^2}{4a^2}}{1 - \dfrac{(\frac{a}{2})^2}{4a^2}}$

$= \dfrac{1 - \dfrac{(\frac{a}{2})^2}{4a^2}}{1 - \dfrac{(a/2)^2}{4a^2}} = \dfrac{\dfrac{4a^2 - \frac{a^2}{4}}{4a^2}}{\dfrac{4a^2 - \frac{a^2}{4}}{4a^2}}$

4. Pour que X admet une espérence, il faut que : $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx$ converge, alors

$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{0} x f(x)\, dx + \int_{0}^{2a} x f(x)\, dx + \int_{2a}^{+\infty} x f(x)\, dx$

$= \int_{0}^{2a} x f(x)\, dx = \int_{0}^{2a} x \times \frac{x}{2a^2}\, dx$

$= \int_{0}^{2a} \frac{x^2}{2a^2}\, dx = \frac{1}{2a^2} \int_{0}^{2a} x^2\, dx$

$= \frac{1}{2a^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{0}^{2a}$

$= \boxed{\frac{4a}{3}}$

Donc X admet une espérence et $E(X) = \frac{4a}{3}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

17.5 / 20

5. Selon la formule de Huygens :

On a $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

Et :

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_0^{2a} x^2 f(x)\,dx$$

$$= \int_0^{2a} x^2 \times \frac{x}{2a^2}\,dx$$

$$= \int_0^{2a} \frac{x^3}{2a^2}\,dx = \frac{1}{2a^2}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^{2a}$$

$$= \frac{1}{\cancel{2a^2}} \times \frac{\cancel{2a^4}}{4} = \frac{a^2}{4}$$

(6. On a $Y = X^2$; donc pour tout réel x on a)

6. On a G est la fonction de répartition de Y

Et $Y = X^2$

Donc $G(x) = [F(x)]^2$; $G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^4}{4a^4} & \text{si } 0 \leq x \leq 2a \\ 1 & \text{si } x > 2a \end{cases}$

Or puis F est nulle si $x < 0$ Donc pour tout x de $[0 ; 4a^2]$; alors

$$G(x) = \frac{x}{4a^2}$$

b)

c) la commande rand( ) * 4 * a ^ 2 simule la loi de Y.