ECRICOME PREPA 2022 - ECT - Technologique

Mathématiques option technologique Mathématiques

NORA

Note de délibération : 17.9 / 20

Prénom (s) NORA

17.9 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématique

Sujet 1 ou 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 01 / 04

Numéro de table 09

Commencez à composer dès la première page...

Exercice 1 : PARTIE A :

1. a : $PQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = 3I = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

b : P est inversible si $P \times P^{-1} = I$

On sait que $PQ = 3I$ donc $P \frac{1}{3} Q = I$

$P^{-1} = \frac{1}{3} Q$

2. a : $X_{n+1} = MX_n$ car

$X_{n+1} = MX_n$ soit $X_{n+1} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ ou encore $X_{n+1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2a_n + b_n + c_n \\ a_n + 2b_n + c_n \\ a_n + b_n + c_n \end{pmatrix}$

et on sait que $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ donc $X_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix}$

ou encore $X_{n+1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} a_n + \frac{1}{4} b_n + \frac{1}{4} c_n \\ 1/4\, a_n + \frac{1}{2} b_n + 1/4\, c_n \\ 1/4\, a_n + \frac{1}{4} b_n + \frac{1}{2} c_n \end{pmatrix}$

et $\begin{pmatrix} 1/2\, a_n + 1/4\, b_n + \frac{1}{4} c_n \\ 1/4\, a_n + 1/2\, b_n + 1/4\, c_n \\ 1/4\, a_n + \frac{1}{4} b_n + 1/2\, c_n \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2a_n + b_n + c_n \\ a_n + 2b_n + c_n \\ a_n + b_n + c_n \end{pmatrix}$ donc $X_{n+1} = MX_n$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

17.9 / 20

b: Soit P_n l'égalité $X_n = M^n X_0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Initialisation :

$n = 0$

$$X_0 = M^0 X_0 \qquad X_0 = I X_0 \qquad X_0 = X_0$$

P_0 est vrai

Hérédité :

Soit n un entier quelconque

Supposons que P_n soit vrai et montrons que P_{n+1} soit encore vrai, c'est-à-dire :

$$X_{n+1} = M^{n+1} X_0$$

donc $$X_{n+1} = M^{n+1} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$$

or on sait que $X_{n+1} = M X_n$ donc

$$M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^{n+1} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$$

et d'après l'hypothèse de récurrence $X_n = M^n X_0$ donc

$$M M^n X_0 = M^{n+1} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$$

$$M^{n+1} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = M^{n+1} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$$

P_{n+1} est encore vrai

Conclusion : D'après le théorème de récurrence, $X_n = M^n X_0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

3. a : $(4M - I) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$(4M - 4I) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

$(4M - I) \times (4M - 4I) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = O_3$ $\square$

b : $(4M - I) \times (4M - 4I) = 16M^2 - 20M + 4I$

$\Delta = 144$, après calcul, les racines du polynome sont
$x_1 = 1$ $x_2 = \frac{1}{4}$

donc les valeurs propres possibles de M sont 1 et $1/4$.

4. a : Si $M = PDP^{-1}$ alors $D = P^{-1}MP$

$P^{-1}MP = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

b: $M^n = PD^nP^{-1}$

d: $a_n = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{4^n}\right)$ et $b_n = c_n = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right)$ car

$X_n = M^n(X_0)$ (démontré en 2.b) donc

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 + 2\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix}$$ ou encore $$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{4^n}\right) \\ \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right) \\ \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right) \end{pmatrix}$$

donc $a_n = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{4^n}\right)$ $b_n = c_n = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right)$

e: $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \frac{1}{3}$ car $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{2}{4^n}\right) = 1$ } Par produit, $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \frac{1}{3}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = c_n = \frac{1}{3}$ car $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{4^n}\right) = 1$ } Par produit, $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = c_n = \frac{1}{3}$

5:
```
n = 0
a = 1        b = 0
while  a ≤ 0,334   b ≥ 0,333
  n = n + 1
  a = 1/3 * (1 + 2/4^n)
  b = 1/3 * (1 - 1/4^n)
end
disp(a, b)
```

Prénom (s) NORA

17.9 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématique

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 02 / 04

Numéro de table 09

Commencez à composer dès la première page.

PARTIE B :

6 : $P(A_0)=1$ $P(B_0)=0$ $P(C_0)=0$

$P(A_1)=\frac{2}{4}$ $P(B_1)=\frac{1}{4}$ $P(C_1)=\frac{1}{4}$

7. a : $P_{A_n}(A_{n+1})=\frac{1}{2}$ car $P_{A_n}(A_{n+1})$ correspond à la probabilité d'être sur la case 0 ... sachant que l'on était sur la case 0. Pour cela, il y a 2 chaces sur 4 car il nous faut tirer soit le numéro 0 pour y rester, soit le numéro 3 pour faire un tour et retomber sur la case 0.

$P_{B_n}(A_{n+1})=\frac{1}{4}$ $P_{C_n}(A_{n+1})=\frac{1}{4}$

b : Selon la formule des probabilités totales :

$P(A_{n+1})=P(A_n\cap B_n\cap C_n)$
$P(B_{n+1})=P(A_n\cap B_n\cap C_n)$
$P(C_{n+1})=P(A_n\cap B_n\cap C_n)$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

17.9 / 20

et selon la formule des probabilités composées :

$P(A_{n+1}) = P_{A_n}(A_{n+1}) \times P(A_n) + P_{B_n}(A_{n+1}) \times P(B_n) + P_{C_n}(A_{n+1}) \times P(C_n)$

$P(A_{n+1}) = \frac{1}{2} P(A_n) + \frac{1}{4} P(B_n) + \frac{1}{4} P(C_n)$

$P(B_{n+1}) = P_{A_n}(B_{n+1}) \times P(A_n) + P_{B_n}(B_{n+1}) \times P(B_n) + P_{C_n}(B_{n+1}) \times P(C_n)$

$P(B_{n+1}) = \frac{1}{4} P(A_n) + \frac{1}{2} P(B_n) + \frac{1}{4} P(C_n)$

$P(C_{n+1}) = P_{A_n}(C_{n+1}) \times P(A_n) + P_{B_n}(C_{n+1}) \times P(B_n) + P_{C_n}(C_{n+1}) \times P(C_n)$

$P(C_{n+1}) = \frac{1}{4} P(A_n) + \frac{1}{4} P(B_n) + \frac{1}{2} P(C_n)$

c: On déduit que $P(A_n) = a_n$ $P(B_n) = b_n$ $P(C_n) = c_n$

donc $P(A_n) = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{4^n}\right)$ $P(B_n) = P(C_n) = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right)$

car on constate que $P(A_{n+1}) = a_{n+1}$
$P(B_{n+1}) = b_{n+1}$
$P(C_{n+1}) = c_{n+1}$

8: Lorsque tire plusieur fois, il y a 1/3 de tomber sur la case, 0, 1, 3 c'est à dire que leur probabilité sont similaire (lors de plusieurs tirages).

Exercice 2 : $f(x) = x \ln(1+x)$

$x \in]-1, +\infty[$

1.a : $\lim\limits_{x \to -1} f = +\infty$ car

$\lim\limits_{x \to -1} x = -1$ $\lim\limits_{x \to -1} 1+x = 0$ $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$

Par produit, $\lim\limits_{x \to -1} f = +\infty$ on en déduit que C_f admet une asymptote verticale $x = -1$

b : $\lim\limits_{x \to +\infty} f = +\infty$ car

$\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} 1+x = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$

Par produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} f = +\infty$

c : Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} f = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -1} f = +\infty$ alors la courbe admet une branche parabolique Ox.

2.a : f est dérivable en tant que produit de fonctions dérivables (admis) sur l'intervalle $]-1, +\infty[$.

$u'v + v'u = 1 \times \ln(1+x) + \frac{1}{1+x} \times x$

$f'(x) = \ln(1+x) + \frac{x}{1+x}$

b: f' est dérivable en tant que somme de fonctions dérivables.

$$u'+v' = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{x+1+1}{(1+x)^2} = \frac{x+2}{(1+x)^2}$$

$$f'' = \frac{x+2}{(1+x)^2}$$

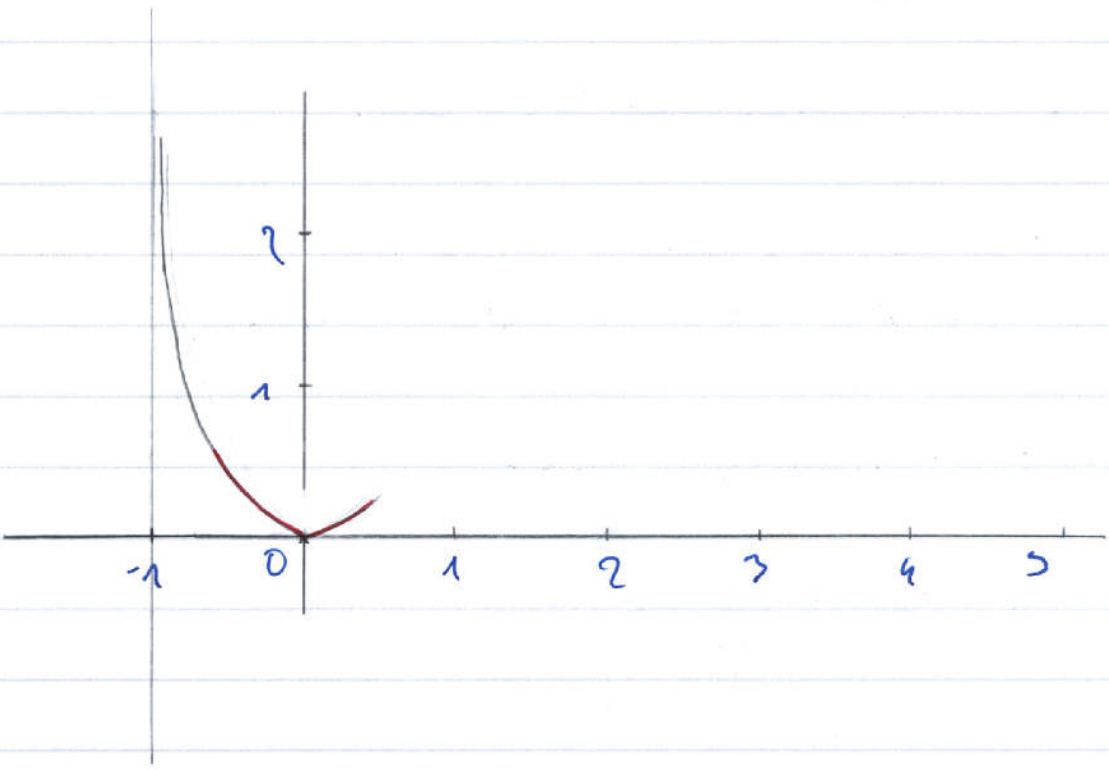
c: Comme $f''>0$ sur $]-1;+\infty[$
alors f' est croissante sur $]-1;+\infty[$.

3.a: $f'(0)=0$ alors $\forall x>-1$ $f'(x)\geq 0$ lorsque $x\in[0;+\infty[$
et $f'(x)<0$ lorsque $x\in]-1;0[$.

b:

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4.



Prénom (s) NORA

17.9 / 20

Ecricome Épreuve : Mathèmatique

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 03 / 04

Numéro de table 09

5. $I = \int_0^1 f(x)\,dx$

a. $I = \int_0^1 x\ln(1+x)\,dx$

$$\begin{cases} u(x) = \ln(1+x) & u'(x) = \dfrac{1}{1+x} \\ v'(x) = x & v(x) = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$$

Par intégration par parties :

$$I = \int_0^1 f(x)\,dx = \left[\ln(1+x) \times \frac{x^2}{2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{1+x} \times \frac{x^2}{2}\,dx$$

$$= \left[\ln(1+x) \times \frac{x^2}{2}\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}\,dx$$

$$= \ln(2) \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}\,dx$$

$$= \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}\,dx$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

17.9 / 20

c: $\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx = \int_0^1 x - 1 + \frac{1}{x+1}\,dx$

$= \left[\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1)\right]_0^1$

$= \frac{1}{2} - 1 + \ln(2)$ $\quad \int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx = \frac{1}{2} - 1 + \ln(2)$

d: $I = \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1 + \ln(2)\right)$

$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} + 1 - \ln(2) + \ln(2)\right)$

$= -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}$ $\quad I = \frac{1}{4}$

6.
```
function y = f(x)
    y = (x^n) * log(1+x)
endfunction
  for n = 1:50
      x = linspace(0, 1, 100)
  fplot2d(f(x), x)
  end
```

7.b: On peut cojectner grâce au graphique que $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 1$

8.a: $0 \leq x \leq 1$ $\quad$ $0 \leq 1+x \leq 2$ $\quad$ $0 \leq \ln(1+x) \leq \ln(2)$

$0 \leq x^n \ln(1+x) \leq x^n \ln(2)$ $\quad \forall x \in [0, 1]$

(car $n \in \mathbb{N}$)

b: Par croissance de l'intégral $0 \leq x^n \ln(1+x) \leq x^n \ln(2) =$

$\int_0^1 0\, dx \leq \int_0^1 x^n \ln(1+x)\, dx \leq \int_0^1 x^n \ln(2)\, dx$

et

$\int_0^1 0\, dx = 0$

$\int_0^1 x^n \ln(1+x) dx = I_n$

$\int_0^1 x^n \ln(2)\, dx = \ln(2) \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{\ln(2)}{n+1}$ donc

$$0 \leq I_n \leq \frac{\ln(2)}{n+1}$$

c: $0 \leq I_n \leq \frac{\ln(2)}{n+1}$

Selon le théorème des gendarmes

$\lim\limits_{n \to +\infty} 0 = 0$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\ln(2)}{n+1} = 0$

ALORS $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$

Exercice 3 :

1 : $\lim\limits_{x\to 0^+} f = 0$ $\quad \lim\limits_{x\to 0} f = 0$ $\quad \lim\limits_{x\to 0^-} f = 0$ donc f est continue en 0.

$\lim\limits_{x\to 2a^-} f = \frac{1}{2a}$ $\quad \lim\limits_{x\to 2a} f = \frac{1}{2a}$ $\quad \lim\limits_{x\to 2a^+} f = 0$ donc f n'est pas continue en $2a$.

2 : f est continue par morceaux en tant que fonction nulle sur $]-\infty ; 0[$ et sur $]2a ; +\infty[$ et fonction rationnelle sur $[0 ; 2a]$.

f admet un point de discontinuité en $2a$.

f est positive
f est convergente car $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 0$

car $\int_x^0 0\,dx = 0$ $\quad \int_{2a}^{x} 0\,dx = 0$ $\quad \int_0^{2a} \frac{x^2}{4a^2}\,dx = 1$

Par somme, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$. $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} f = 1$

f est une densité de probabilité.

3. a : $F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{2a^2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{2a}$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^2}{4a^2} & \text{si } 0 \leq x \leq 2a \\ 1 & \text{si } x > 2a \end{cases}$$

donc la fonction de répartition F de X est bien défini par cela. $\square$

Prénom (s) NORA

17.9 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématique

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 04 / 04

Numéro de table

b: $P_{[X>\frac{a}{2}]}(X \leq a) = \dfrac{P([a/2 < X \leq a])}{P([X > \frac{a}{2}])}$

$= \dfrac{F(a) - F(\frac{a}{2})}{1 - F(\frac{a}{2})}$

$F(a) = \dfrac{a^2}{4a^2} = \dfrac{1}{4}$ $\quad F(\frac{a}{2}) = \dfrac{(\frac{a}{2})^2}{4a^2} = \dfrac{a^2}{4} \times \dfrac{1}{4a^2} = \dfrac{1}{16}$

$= \dfrac{1/4 - 1/16}{\frac{15}{16}} = \dfrac{3}{16} \times \dfrac{16}{15} = \dfrac{1}{5}$

$P_{[X>\frac{a}{2}]}(X \leq a) = \dfrac{1}{5}$

4. Comme X admet une densité de probabilité, alors il admet une espérance.

$\displaystyle\int_0^{2a} x \times \frac{x}{2a^2}\,dx = \frac{1}{2a^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{2a} = \frac{(2a)^3}{6a^2} = \frac{8a^3}{6a^2} = \frac{8a}{6} = \frac{4a}{3}$

$E(X) = \dfrac{4a}{3}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

17.9 / 20

5. X admet une variance car il admet une espérance.

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

$E(X^2) = \int_0^{2a} x^2 \times \frac{x}{2a^2} dx = \frac{1}{2a^2}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^{2a} = \frac{(2a)^4}{8a^2} = \ldots$

$= \frac{16a^4}{8a^2} = \frac{16a^2}{8} = 2a^2$

$E(X)^2 = 2a^2$

$V(X) = 2a^2 - \frac{4a}{3}$ $\qquad V(X) = \frac{14a^2}{9}$

6. $G(x) = P([Y \leq x]) = P([X^2 \leq x]) = P([-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}])$

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sqrt{x} < 0 \text{ et } -\sqrt{x} < 0 \\ \frac{x}{4a^2} & \text{si } 0 \leq \sqrt{x} \leq 2a \text{ et } 0 \leq -\sqrt{x} \leq 2a \\ 1 & \text{si } \sqrt{x} > 2a \text{ et } -\sqrt{x} > 2a \end{cases}$$

$\left(x \in [0, 4a^2] \rightarrow G(x) = \frac{x}{4a^2} \text{ vérifié}\right)$

b: Y suit une loi uniforme.

c: rand( ) * 4 * a^2 simule le choix aléatoire d'un réel

x lorsque $x \vee [0,1]$ pour $x4a^2$.

7.a: Si T_n est un estimateur sans biais de a alors

$E(T_n) = a$

$$E(T_n) = \frac{3}{4n} \sum_{K=1}^{n} E(X_K)$$

$$= \frac{3}{4n} \sum_{K=1}^{n} \frac{4a}{3} \qquad = \frac{3}{4n} \times \frac{4an}{3} \qquad = a$$

$E(T_n) = a$ donc T_n est un estimateur sans biais de a. $\square$

b: $r(T_n) = b(T_n)^2 + V(T_n)$

$r(T_n) = V(T_n)$ car T_n est un estimateur sans biai

$$V(T_n) = \frac{3}{4n} \sum_{K=1}^{n} V(X_K) \qquad = \frac{3}{4n} \sum_{K=1}^{n} \frac{14a^2}{9} = \frac{3}{4n} \times \frac{14a^2 n}{9}$$

$$V(T_n) = \frac{7a^2}{6}$$

$$r(T_n) = \frac{7a^2}{6}$$

c:
```
n = length (X) // longueur de X
T_n = (3/4*n) * sum(X_n)
disp(approximation (X))
```

Exercice 2 :

1. a : Géométriquement, l'intégrale I_n $\forall n \in \mathbb{N}^*$

se transforme, et devient parallèle à l'axe des ordonné lorsque n tend vers $+\infty$.

5. b : $x - 1 + \frac{1}{x+1} = \frac{x+1(x-1)+1}{x+1} = \frac{x^2}{x+1}$