

Copie anonyme - n°anonymat : 377932



G6-00223
377932
Maths E

Code épreuve : 298

Nombre de pages : 34

Session : 2022

Épreuve de : Maths E EDHEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 1

① • Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $M, N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda M + N) &= J(\lambda M + N) - (\lambda M + N)J \\ &= \lambda JM + JN - \lambda MJ - NJ \\ &= \lambda(JM - MJ) + JN - NJ \\ &= \lambda \varphi(M) + \varphi(N)\end{aligned}$$

d'où φ est une application linéaire

• $\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\varphi(M) = JM - MJ \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par somme et produit de matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

• d'où finalement, φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

② @ Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$$\varphi(M) = JM - MJ$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a+b & a+b \\ c+d & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c-b & d-a \\ a-d & b-c \end{pmatrix}$$

d'où, comme $M = a k_1 + b k_2 + c k_3 + d k_4$, on a :

$$\bullet \varphi(k_1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -k_2 + k_3 \quad \text{avec } a=1 \text{ et } b=c=d=0$$

$$\bullet \varphi(k_2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -k_1 + k_4 \quad \text{avec } b=1 \text{ et } a=c=d=0$$

$$\bullet \varphi(k_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = k_1 - k_4 \quad \text{avec } c=1 \text{ et } a=b=d=0$$

$$\bullet \varphi(k_4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = k_2 - k_3 \quad \text{avec } d=1 \text{ et } a=b=c=0$$

② ⓑ avec $\mathcal{B}_c = (k_1, k_2, k_3, k_4)$

$$A = \text{mat}_{\mathcal{B}_c}(\varphi) = \begin{pmatrix} \varphi(k_1) & \varphi(k_2) & \varphi(k_3) & \varphi(k_4) \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{matrix}$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{c_1} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{c_2} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{c_3} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{c_4}$

Chaque colonne de A représente la combinaison linéaire de $\varphi(k_n)$ en fonction de k_1, k_2, k_3, k_4 (avec $n = \{1, 2, 3, 4\}$).

② ⓐ Comme A est symétrique, ie ${}^t A = A$, donc A est diagonalisable et comme $A = \text{mat}_{\mathcal{B}_c}(\varphi)$, alors φ est diagonalisable.

③ a) $\text{rg } A = 2$ car A est de taille 4 et qu'elle est symétrique.

$$\text{Im}(A) = \text{Vect}(\varphi(k_1), \varphi(k_2), \varphi(k_3), \varphi(k_4))$$

avec B_c une base de $M_2(\mathbb{R})$ et $\varphi \in \mathcal{L}(M_2(\mathbb{R}))$.
et $A = \text{mat}_{B_c}(\varphi)$.

$$= \text{Vect} \left(\underbrace{-k_2 + k_3}_{c_1}, \underbrace{-k_1 + k_4}_{c_2}, \underbrace{k_1 - k_4}_{c_3}, \underbrace{k_2 - k_3}_{c_4} \right)$$

comme $c_4 = -c_1$ et $c_3 = -c_2$:

$$= \text{Vect}(-k_2 + k_3, -k_1 + k_4)$$

De plus, comme, avec $a, b \in \mathbb{R}$,

$$a \cdot c_1 + b \cdot c_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a \cdot (-k_2 + k_3) + b \cdot (-k_1 + k_4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -b = 0 \\ -a = 0 \\ a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 0.$$

d'où $(-k_2 + k_3, -k_1 + k_4)$ est une famille libre de $M_2(\mathbb{R})$

et comme elle génère $\text{Im } A$,

c'est une base de $\text{Im } A$.

③ ① Par le théorème du rang, on a donc :

$$\dim \ker(\varphi) = \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) - \text{rg}(\varphi)$$

comme $A = \text{mat}_{\mathcal{B}_c}(\varphi)$, on a $\text{rg}(\varphi) = \text{rg}(A) = 2$.

d'où :

$$= 4 - 2$$

d'où

$$\boxed{\dim \ker(\varphi) = 2}$$

Pour avoir une base de $\ker(\varphi)$, il faut deux éléments non colinéaires dans $\ker(\varphi)$.

or : • $\varphi(I) = J \cdot I - I \cdot J = J - J = 0$

d'où $I \in \ker(\varphi)$

• $\varphi(J) = J \cdot J - J \cdot J = J^2 - J^2 = 0$

d'où $J \in \ker(\varphi)$

et : • avec $a, b \in \mathbb{R}$, $aI + bJ = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+b & b \\ b & a+b \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ b=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=0.$$

d'où I et J sont non colinéaires.

d'où finalement : $\boxed{(I, J) \text{ est une base de } \ker(\varphi)}$

④ ②

$$\bullet A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 377932

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 298

Nombre de pages : 34

Session : 2022

Épreuve de : Maths E EDHEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$= \begin{pmatrix} 1+1 & 0 & 0 & -1-1 \\ 0 & 1+1 & -1-1 & 0 \\ 0 & -1-1 & 1+1 & 0 \\ -1-1 & 0 & 0 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

• $A^3 = A^2 \cdot A$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -2-2 & 2+2 & 0 \\ -2-2 & 0 & 0 & 2+2 \\ 2+2 & 0 & 0 & -2-2 \\ 0 & 2+2 & -2-2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \end{pmatrix} = 4A$$

d'où $A^3 - 4A = 4A - 4A = 0$

④ ⑤ • Comme $P(X) = X^3 - 4X$ est un polynôme annulateur de A , i.e. $P(A) = 0$, on a donc le $\text{Sp}(A)$ est inclus dans les racines de P .

• $P(X) = 0 \Leftrightarrow X^3 - 4X = 0 \Leftrightarrow X(X^2 - 4) = 0$

$$\Leftrightarrow X(X-2)(X+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow X = 0 \text{ ou } X = 2 \text{ ou } X = -2.$$

Ainsi, les valeurs propres possibles de A sont $0, -2, 2$.

⑤ Le programme scilab renvoie ici le rang de la matrice $A - 2I$ pour R_1 et $A + 2I$ pour R_2 .

$$\text{Ainsi, on obtient } \text{rg}(A - 2I) = 3 \\ \text{et } \text{rg}(A + 2I) = 3.$$

d'après le théorème du rang, on a :

$$\dim(A \pm 2I) = \dim \text{Ker}(A \pm 2I) + \text{rg}(A \pm 2I)$$

$$\text{d'où : } \text{Ker}(A \pm 2I) = 4 - 3 = 1.$$

Ainsi, comme $\text{Ker}(A \pm 2I) \neq \{0\}$, car $\dim \text{Ker}(A \pm 2I) = 1$,

donc 2 et -2 sont des valeurs propres de A avec :

$$E_2(A) = \text{Ker}(A - 2I) \\ \text{et } E_{-2}(A) = \text{Ker}(A + 2I).$$

$$\textcircled{b} \textcircled{a} \textcircled{i} \cdot AX = 2X$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \\ 2t \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -y+z = 2x \\ -x+t = 2y \\ x-t = 2z \\ y-z = 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2x+y \\ t = 2y+x \\ -2y = 2z \\ -2x = 2t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -2y \\ 2y = -2x \\ z = -y \\ t = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ y = -x \\ z = -y = x \\ t = -x = y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ x \\ -x \end{pmatrix}$$

⑥ b i)

d'où: $\text{Ker}(A - 2I) = \text{Vect} \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{X_1} \right)$

et comme $X_1 \neq 0$, c'est une base de $\text{Ker}(A - 2I)$.

d'où $2 \in \text{Sp}(A)$ et $E_2(A) = \text{Ker}(A - 2I) = \text{Vect}(X_1)$

⑥ a ii)

• De même,

$$AX = -2X$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -y+z = -2x \\ -x+t = -2y \\ x-t = -2z \\ y-z = -2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -2x+y \\ t = -2y+x \\ x+2y-x = -2z \\ y+2x-y = -2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -2x+y \\ t = -2y+x \\ z = -y \\ t = -x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2y = -2x \\ -2x = -2y \\ z = -y \\ t = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x = y \\ z = -x \\ t = -x \end{cases} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ x \\ -x \\ -x \end{pmatrix}$$

d'où $\text{Ker}(A+2I) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

(b) (ii)

et comme $X_2 \neq 0$,
c'est une base

de $\text{Ker}(A+2I)$ d'où $-2 \in \text{Sp}(A)$

et $E_{-2}(A) = \text{Ker}(A+2I) = \text{Vect}(X_2)$.

(iii)

comme φ est diagonalisable,

on a $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(\varphi)} \dim E_{\lambda}(\varphi) = \dim M_2(\mathbb{R}) = 4$

avec $\text{Sp}(A) = \text{Sp}(\varphi)$ et $\forall \lambda, \dim E_{\lambda}(A) = \dim E_{\lambda}(\varphi)$,

on a 2 et -2 dans le spectre de A avec la dimension de chacun des ^{sous}-espaces propres égale à 1.
d'où nécessairement, $0 \in \text{Sp}(A) = \text{Sp}(\varphi)$.

d'où : • $AX = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -y+z=0 \\ -x+t=0 \\ x-t=0 \\ -z+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=y \\ t=x \\ x=t \\ y=z \end{cases} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ y \\ x \end{pmatrix}$$

d'où $\text{Ker}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

et comme X_3 et X_4
sont non colinéaires,

ils forment une base de $\text{Ker}(A)$ d'où $0 \in \text{Sp}(A)$

et $E_0(A) = \text{Ker}(A) = \text{Vect}(X_3, X_4)$.

Copie anonyme - n°anonymat : 377932

Emplacement GR Code	Code épreuve : 298	Nombre de pages : 34	Session : 2022
	Épreuve de : Maths E EDITEC .		
	Consignes <ul style="list-style-type: none">• Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer• Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir• Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)• Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)• Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre		

finalément :

$$S_p(\varphi) = \{0, 2, -2\}$$

or $E_0(\varphi) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$

$$E_2(\varphi) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$E_{-2}(\varphi) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \right)$$

Exercice 2

① $p = \text{input}(' \text{entrez la valeur de } p \text{ dans }]0, +[:')$
 $n = \text{input}(' \text{entrez la valeur de } n :')$
 $X = 0$ // on initialise le niveau du joueur à 0.
 $\text{while } X < n \ \& \ \text{rand}() \leq p$ // tant que le joueur n'a pas fini le jeu en complétant tous les niveaux et qu'il gagne
 $X = X + 1$ // alors le joueur accède au niveau suivant
 end
 $\text{disp}(X, ' \text{le niveau du joueur est : }')$

② (a) X_n est le niveau du joueur.

Au minimum, le niveau du joueur est 0 s'il a échoué au niveau 1.

Au maximum, le niveau du joueur est n s'il a réussi les n niveaux du jeu.

Chaque niveau est un entier naturel car les niveaux vont de 1 en 1.
D'où on a $\forall n, X_n(\omega) = [0, n]$

② (b) $\forall n, (X_n = 0)$: le niveau du joueur est 0, donc le joueur échoue au niveau 1.
donc $(X_n = 0) = \bar{R}_1$

Comme la probabilité de passer d'un niveau à un autre est constante et égale à p , on a la probabilité d'accéder au niveau 1 est égale à p .

Ainsi, la probabilité de ne pas accéder au niveau 1 est égale à $1 - p = q$.

$$\text{D'où } \boxed{\forall n, P(X_n = 0) = q}$$

② (c) $(X_n = n)$: le niveau du joueur est n donc il a réussi tous les niveaux 1, ..., n

$$\begin{aligned} \text{d'où } (X_n = n) &= R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n \\ &= \prod_{k=1}^n R_k \end{aligned}$$

En conséquence, comme la probabilité de réussir un niveau est constante pour tous les niveaux, que R_1, \dots, R_n sont indépendants.

D'où par indépendance de R_1, \dots, R_n :

$$\forall n, P(X_n = n) = P\left(\prod_{k=1}^n R_k\right)$$

$$= P(R_1) \times P(R_2) \times \dots \times P(R_n) = \prod_{k=1}^n P(R_k)$$

et comme $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(R_k) = p$:

$$= \prod_{k=1}^n p = p^{n-1+1}$$

$$\text{d'où : } \boxed{\forall n \in \mathbb{N}^+, P(X_n = n) = p^n}$$

② ③ • $\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, (X_n = k)$: le joueur a le niveau k

donc le joueur a réussi les k premiers niveaux
mais a échoué le $(k+1)^{\text{e}}$ niveau.

$$\text{Ainsi : } \forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, (X_n = k) = R_1 \cap \dots \cap R_k \cap \overline{R_{k+1}}$$

Par indépendance de $R_1, \dots, R_k, \overline{R_{k+1}}$, on a donc :

$$\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, P(X_n = k) = P\left(\left(\prod_{i=1}^k R_i\right) \cap \overline{R_{k+1}}\right)$$

$$= P(R_1) \times \dots \times P(R_k) \times P(\overline{R_{k+1}})$$

$$= \left(\prod_{i=1}^k P(R_i)\right) \times P(\overline{R_{k+1}})$$

et comme $\forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, P(R_i) = p$

et $\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, P(\overline{R_{k+1}}) = 1 - P(R_{k+1}) = 1 - p = q$:

$$= \left(\prod_{i=1}^k p\right) \times q \quad \text{d'où :}$$

$$\boxed{\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, P(X_n = k) = q p^k}$$

• pour $k=0$, on trouve

$$q p^0 = q \times 1 = q \\ = P(X_n = 0)$$

Où la relation reste valable pour $n=0$.

$$\textcircled{3} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^n P(X_n = k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} P(X_n = k) + \underbrace{P(X_n = n)}_{\text{terme en } k=n}$$

d'après les questions $\textcircled{2} \textcircled{c}$ et $\textcircled{2} \textcircled{d}$:

$$= \sum_{k=0}^{n-1} qp^k + p^n$$

en reconnaissant une somme géométrique de paramètre $p \neq 1$:

$$= q \times p^0 \times \frac{1 - p^{n-1-0+1}}{1-p} + p^n$$

avec $q = 1-p$

$$= 1 - p^n + p^n = 1.$$

d'où finalement,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^n P(X_n = k) = 1}$$

$\textcircled{4} \textcircled{a}$ $E(X_n)$ existe

$\Leftrightarrow \sum_{k \in X_n(n)} k \cdot P(X_n = k)$ converge absolument

$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^n k \cdot P(X_n = k)$ converge

car $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $k \geq 0$ et par propriété des probabilités, $P(X_n = k) \geq 0$

Copie anonyme - n°anonymat : 377932

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 288

Nombre de pages : 34

Session : 2022

Épreuve de : Maths E EDITEE

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n-1} k \cdot P(X_n=k) + n \cdot P(X_n=n) \quad \text{converge}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n-1} k \cdot q p^k + n \cdot p^n \quad \text{converge}$$

$$\Leftrightarrow q p \sum_{k=0}^{n-1} k p^{k-1} + n \cdot p^n \quad \text{converge}$$

$$\Leftrightarrow q \cdot p \sum_{k=1}^{n-1} k p^{k-1} + n p^n \quad \text{converge} \quad \text{car le terme en 0 de la somme est nul.}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n-1} k p^{k-1} \quad \text{converge}$$

OR on reconnaît la somme de la dérivée partielle d'ordre 1 d'une suite géométrique, i.e. on sait

$$\text{que } \sum_{k=1}^{+\infty} k p^{k-1} \quad \text{converge}$$

et comme on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \sum_{k=1}^{n-1} k p^{k-1} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} k p^{k-1}$$

par encadrement, $\sum_{k=1}^{n-1} k p^{k-1}$ converge d'ici

finallement:

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $E(X_n)$ existe et

$$E(X_n) = \sum_{k=1}^{n-1} k \cdot q p^k + n \cdot p^n.$$

④ ⑤ $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(X_n)$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^{n-1} k q p^k + n p^n \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^{n-1} k q p^k \right) + \lim_{n \rightarrow +\infty} n p^n$$

OR : • $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} k q p^k = q p \sum_{k=1}^{+\infty} k p^{k-1}$

et comme $|p| < 1$:

$$= q p \cdot \frac{1}{(1-p)^2} = q p \frac{1}{q^2}$$

$$= \frac{p}{q}$$

• $\lim_{n \rightarrow +\infty} n p^n = 0$ car $|p| < 1$ et par croissances comparées.

donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E(X_n) = \frac{p}{q}$$

⑤ a) cf. q. ② a), on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, P(X_n = k) = qp^k$$

$$\text{d'où } \boxed{\forall n \geq k+1, P(X_n = k) = qp^k}$$

⑤ b) i) $\forall k \in \mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} p^k q = p^k q.$

j) $X(\omega) = \lim_{n \rightarrow +\infty} X_n(\omega) = \llbracket 0, +\infty \llbracket = \mathbb{N}$

iii)

d'où : $X(\omega) = \mathbb{N}$ et $\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = qp^k.$
et $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} X.$

⑤ c) $Y = X+1.$

donc : i) $Y(\omega) = \mathbb{N}^*.$

ii) $\forall k \in \mathbb{N}^*, P(Y = k) = P(X+1 = k)$

$$= P(X = k-1)$$

$$= qp^{k-1}$$

on reconnaît $Y \hookrightarrow g(q)$

$$\text{d'où } E(Y) = \frac{1}{q}$$

et comme $Y = X+1$, par linéarité de l'espérance :

$$E(X) = E(Y) - 1 = \frac{1}{q} - 1 = \frac{1-q}{q} = \frac{p}{q}$$

on remarque

$$\boxed{E(X) = \lim_{n \rightarrow +\infty} E(X_n) = \frac{p}{q}}$$

Exercice 3.

① $\forall n \geq 1$, f_n est dérivable ^{sur $[0,1]$} en tout que quotient de deux fonctions dérivables sur $[0,1]$ ($x+n \neq 0$).

$$\forall n \geq 1, \forall x \in [0,1], f_n'(x) = \frac{(1)(x+n) - (x)(1)}{(x+n)^2} = \frac{x+n-x}{(x+n)^2} = \frac{n}{(x+n)^2}$$

or, comme $n \geq 1$ et $\forall x \in [0,1]$, $(x+n)^2 > 0$:

$$\text{on a donc } \forall n \geq 1, \forall x \in [0,1], f_n'(x) > 0$$

d'où f_n est strictement croissante sur $[0,1]$

avec $f_n(0) = 0$
et $f_n(1) = \frac{1}{n+1}$ } par continuité de f_n en 0 et 1

d'où le tableau de variations de f_n sur $[0,1]$:

x	0	1
$f_n'(x)$		+
f_n	0	$\frac{1}{n+1}$

② $\forall n \geq 1$,

$$0 \leq x \leq 1$$

$$\Rightarrow 0 < n \leq x+n \leq n+1$$

comme $u \mapsto \frac{1}{u}$ est une bijection décroissante sur \mathbb{R}_+^* :

$$\Rightarrow 0 < \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{x+n} \leq \frac{1}{n}$$

comme $\frac{x}{n} \geq 0$:

Copie anonyme - n°anonymat : 377932

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 298

Nombre de pages : 34

Session : 2022

Épreuve de : Maths E EDHEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$\Rightarrow 0 < \frac{x}{n(n+1)} \leq \frac{x}{n(x+n)} \leq \frac{x}{n^2}$$

② Comme $\forall n \geq 1$, f_n est continue et strictement croissante sur $[0, 1]$, f_n est une bijection croissante de $[0, 1]$ dans $\left[0, \frac{1}{n+1}\right]$.

Ainsi, $0 \leq x \leq 1$

$$\Rightarrow \forall n \geq 1, f_n(0) \leq f_n(x) \leq f_n(1)$$

$$\Rightarrow \forall n \geq 1, 0 \leq \frac{x}{x+n} \leq \frac{1}{n+1}$$

comme $\frac{1}{n} > 0$:

$$\Rightarrow \forall n \geq 1, 0 \leq \frac{x}{n(n+x)} \leq \frac{1}{n(n+1)}$$

et comme $x \mapsto 0$, $x \mapsto \frac{1}{n} f_n(x)$, $x \mapsto \frac{1}{n(n+1)}$ sont des fonctions continues sur $[0, 1]$ et que $0 < 1$;

par croissance de l'intégrale :

$$\Rightarrow \forall n \geq 1, \int_0^1 0 \, dx \leq \int_0^1 \frac{x}{n(x+n)} \, dx \leq \int_0^1 \frac{dx}{n(n+1)}$$

$$\Rightarrow \forall n \geq 1, 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n(n+1)} (1-0)$$

$$\Rightarrow \forall n \geq 1, 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n(n+1)}$$

③ On a : $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}$ converge d'après Riemann ($d=2 > 1$)

d'où, avec $k = n$:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \text{ converge.}$$

OR $1 \leq n \leq n+1$

$$\Rightarrow 0 < n \leq n^2 \leq n(n+1) \quad \text{car } n \geq 1$$

et comme $u \mapsto \frac{1}{u}$ est une bijection décroissante sur \mathbb{R}^*_+ :

$$\Rightarrow 0 < \frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n^2}$$

d'où comme $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge, par encadrement,

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)} \text{ converge.}$$

d'où, encore par encadrement, $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge

④ a) Comme $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge,

nécessairement, la somme partielle de cette série converge

d'où $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge

d'où nécessairement, avec $0 \leq \underbrace{\sum_{k=1}^n u_k}_{S_n} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} u_k$,

on a $(S_n)_n$ converge.

On note $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \delta$.

④ b) $\forall n \geq 1, \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$$= \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$$

d'où d'après la question ② :

$$\forall n \geq 1, 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\Leftrightarrow \forall n \geq 1, 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

en sommant cette inégalité :

$$\Rightarrow \forall n \geq 1, 0 \leq \sum_{k=1}^n u_k \leq \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

en reconnaissant à droite une somme télescopique :

$$\Rightarrow \forall n \geq 1, 0 \leq \sum_{k=1}^n u_k \leq 1 - \frac{1}{n+1}$$

de plus, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$,

en faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'inégalité :

$$\Rightarrow \boxed{0 \leq \gamma \leq 1}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{4} \textcircled{c} \quad \forall n \geq 1, S_{n+1} - S_n &= \sum_{k=1}^{n+1} u_k - \sum_{k=1}^n u_k \\ &= \sum_{k=1}^n u_k + u_{n+1} - \sum_{k=1}^n u_k \\ &= u_{n+1} \end{aligned}$$

OR d'après la question ② :

$$\forall n \geq 1, u_n \geq 0.$$

$$\text{d'où } \forall n \geq 1, S_{n+1} \geq S_n$$

d'où $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante

$$\textcircled{5} \textcircled{a} \cdot \forall x \in [0, 1], \forall k \in \mathbb{N}^*,$$

$$\frac{x}{k(x+k)} = \frac{a}{k} - \frac{b}{x+k}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{k(x+k)} = \frac{a(x+k) - kb}{k(x+k)}$$

$$\Leftrightarrow x = ax + ak - bk$$

$$\Leftrightarrow x = ax + (a-b)k \quad \text{d'où par identification :}$$

$$\Leftrightarrow a=1 \quad \text{et} \quad a-b=0 \quad \text{i.e.} \quad b=a=1$$

• avec $a=b=1$:

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{x+k} = \frac{x+k-k}{k(x+k)} = \frac{x}{k(x+k)} \quad \text{d'où c'est bien}$$

$a=b=1$.
les uniprésolutions 20/34

Copie anonyme - n°anonymat : 377932

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 298

Nombre de pages : 34

Session : 2022

Épreuve de : Maths E EDITEE

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$\bullet \forall k \in \mathbb{N}^*, u_k = \int_0^1 \frac{x}{k(x+k)} dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x+k} \right) dx$$

par linéarité :

$$= \int_0^1 \frac{dx}{k} - \int_0^1 \frac{dx}{x+k}$$

$$= \frac{1}{k} (1-0) - \left[\ln|x+k| \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{k} - \left(\ln|k+1| - \ln|k| \right)$$

comme $k \in \mathbb{N}^*$, $k > 0$ et $k+1 > 0$ d'où :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, u_k = \frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln(k)}$$

⑤⑥ $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k$$

$$= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} \right) - \sum_{k=1}^n \left(\ln(k+1) - \ln(k) \right)$$

en reconnaissant une somme télescopique à droite :

$$= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - (\ln(n+1) - \ln(1))$$

et comme $\ln 1 = 0$, on a donc :

$$\forall n \geq 1, S_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) - \ln(n+1)$$

⑥ (a) On remarque :

$$\begin{aligned} \forall n \geq 1, S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n + \ln n - \ln(n+1) \\ &= T_n + \ln(n) - \ln(n+1) \end{aligned}$$

$$\text{d'où } \forall n \geq 1, T_n = S_n - (\ln(n) - \ln(n+1))$$

$$\text{or } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \gamma$$

$$\text{et } \forall n \geq 1, \ln(n+1) = \ln\left(n\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) = \ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$\text{or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1 + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}$$

$$\text{or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \text{d'où } \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

$$\text{d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$$

et comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot \ln n = +\infty$ par produit,

on a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n} = 0$ par quotient.

d'où finalement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1$

d'où $\ln(n+1) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$

d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\ln(n+1) - \ln(n)) = 0$

d'où finalement: $(T_n)_n$ converge et :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = \gamma}$$

⑥ ⑦ $0 \leq x \leq 1$

$\Rightarrow \forall n \geq 1, 0 < n \leq x+n \leq n+1$

comme $u \mapsto \frac{1}{u}$ est une bijection décroissante sur \mathbb{R}^*_+ :

$\Rightarrow \forall n \geq 1, 0 < \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{x+n} \leq \frac{1}{n}$

comme $x \mapsto \frac{1}{n+1}$, $x \mapsto \frac{1}{x+n}$, $x \mapsto \frac{1}{n}$ sont

continues sur $[0, 1]$, et $0 < 1$, par croissance de l'intégrale :

$\Rightarrow \forall n \geq 1, 0 < \int_0^1 \frac{dx}{n+1} \leq \int_0^1 \frac{dx}{x+n} \leq \int_0^1 \frac{dx}{n}$

$\Rightarrow \forall n \geq 1, 0 < \frac{1}{n+1} (1-0) \leq \left[\ln|x+n| \right]_0^1 \leq \frac{1}{n} (1-0)$

d'où finalement :

$$\forall n \geq 1, \quad \frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n} \quad (*)$$

avec $n+1 > 0$ et $n > 0$.

$$\begin{aligned} \bullet \forall n \geq 1, \quad T_{n+1} - T_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \ln(n) \right) \\ &= \frac{1}{n+1} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \ln(n) - \ln(n+1) \\ &= \frac{1}{n+1} + \ln(n) - \ln(n+1). \end{aligned}$$

$$(*) \Leftrightarrow \forall n \geq 1, \quad \frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$$

avec $-1 < 0$:

$$\Rightarrow \forall n \geq 1, \quad -\frac{1}{n} \leq \ln(n) - \ln(n+1) \leq -\frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow \forall n \geq 1, \quad -\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \leq T_{n+1} - T_n \leq -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} = 0$$

d'où $\forall n \geq 1, \quad T_{n+1} \leq T_n$

d'où $(T_n)_n$ est décroissante.

⑥ ③ Comme :

→ $(S_n)_n$ est croissante et converge vers γ

→ $(T_n)_n$ est décroissante et converge vers γ .

Par le théorème de la limite monotone, on en déduit :

$$\forall n \geq 1, \quad S_n \leq \gamma \leq T_n$$

Copie anonyme - n°anonymat : 377932

Code épreuve : 298

Nombre de pages : 34

Session : 2022

Emplacement
QR Code

Épreuve de : Maths E EDHEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

⑦ a) On a donc :

$$\forall n \geq 1, S_n \leq \delta \leq T_n$$

$$\Rightarrow \forall n \geq 1, 0 \leq \delta - S_n \leq T_n - S_n \leq 10^{-3}$$

On a donc $S_n = \delta$ à 10^{-3} près. donc δ_n une valeur approchée de δ à 10^{-3} près.

⑦ b) $\forall n \geq 1, T_n - S_n = \ln(n+1) - \ln(n)$ d'après la question ⑥ a)

$n = 1$

$s = 1 - \log(2)$ // On initialise s à $S_1 = u_1 = 1 - \ln 2$

while $\log(n+1) - \log(n) > 10^{-3}$ // tant que S_n n'est pas une valeur approchée de δ à 10^{-3} près

$n = n + 1$

$s = s + 1/n - \log(n+1) + \log(n)$ // on rajoute à S_n le terme u_{n+1} pour obtenir S_{n+1}

end

disp(s , 'une valeur approchée de δ à 10^{-3} près est :')

ProblèmePartie 1.

① a) Pour que cette intégrale soit bien définie,

il faut : • $p \geq 0$ car sinon, il y aurait eu l'impropriété

en 0 avec $x=0$ pour $x \mapsto x^p$

• $q \geq 0$ car sinon il y aurait eu l'impropriété

en 1 avec $x=1$ pour $x \mapsto (1-x)^q$

Ces impropriétés rendraient l'intégrale divergente.

d'où $I(p, q)$ existe $\Leftrightarrow p, q \in \mathbb{R}^+$

et comme $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}^+$,

on a bien $I(p, q)$ est bien définie.

$$\textcircled{1} \textcircled{b} \text{ Avec : } \begin{cases} u'(x) = x^p & ; u(x) = \frac{x^{p+1}}{p+1} \\ v(x) = (1-x)^q & ; v'(x) = q(-1)(1-x)^{q-1} \end{cases}$$

Comme u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$, on peut donc intégrer par parties $u'v$ sur $[0, 1]$:

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \quad I(p, q) = \left[\frac{x^{p+1}}{p+1} \times (1-x)^q \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{x^{p+1}}{p+1} \times q(1-x)^{q-1} dx$$

$$\text{d'où : } = \frac{1}{p+1} \times 0 - \frac{0}{p+1} + \frac{q}{p+1} \int_0^1 x^{p+1} (1-x)^{q-1} dx$$

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \quad I(p, q) = \frac{q}{p+1} I(p+1, q-1)$$

② ① $\forall p, q \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} I(p+q, 0) &= \int_0^1 x^{p+q} (1-x)^0 dx \\ &= \int_0^1 x^{p+q} dx \end{aligned}$$

Comme $p+q \in \mathbb{N}$:

$$= \left[\frac{x^{p+q+1}}{p+q+1} \right]_0^1 \quad \text{d'où :}$$

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, I(p+q, 0) = \frac{1}{p+q+1}$$

d'où, d'après la question ① ② :

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, I(p, q) = \frac{p! q!}{(p+q)!} \times \frac{1}{p+q+1}$$

d'où :

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, I(p, q) = \frac{p! q!}{(p+q+1)!}$$

$$\textcircled{2} \textcircled{b} \quad \forall p \in \mathbb{N}, \int_0^1 x^p (1-x)^p dx = I(p, p)$$

$$= \frac{p! p!}{(p+p+1)!}$$

d'où :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \int_0^1 x^p (1-x)^p dx = \frac{(p!)^2}{(2p+1)!}$$

Partie 2.

- ③
- b_n est définie sur $[0,1] \cup \{\mathbb{R} \setminus [0,1]\} = \mathbb{R}$
 - b_n est continue:
 - sur $]0,1[$ en tant que produit de fonctions continues sur $]0,1[$ avec $n \in \mathbb{N}$
 - sur $\mathbb{R} \setminus [0,1]$ en tant que fonction nulle

d'où b_n est continue sur \mathbb{R} sauf éventuellement en 0 et 1 et $\{0,1\}$ est fini.

- b_n est positive sur \mathbb{R} car nulle en dehors de $[0,1]$ et sur $[0,1]$:
 - $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x^n \leq 1$ car $u \mapsto u^n$ ($n \in \mathbb{N}$) est une bijection croissante sur \mathbb{R}^+
 - et $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 1-x \leq 1$
 - $\Rightarrow 0 \leq (1-x)^n \leq 1$ car de même.
 - et $2n+1 > 0$ d'où $(2n+1)! > 0$
 - et $(n!)^2 > 0$ car $n! \geq 0!$d'où par produit, b_n est positive sur $[0,1]$.

$$\bullet \int_{-\infty}^{+\infty} b_n(x) dx = \int_0^1 \alpha_n x^n (1-x)^n dx$$

car b_n est nulle en dehors de $[0,1]$

$$= \alpha_n \int_0^1 x^n (1-x)^n dx$$

$$= \alpha_n \times I(n,n)$$

$$= \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \times \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} \quad \text{d'après q. 2b)$$

$$= 1.$$

D'où finalement, b_n est ^{une} densité

Copie anonyme - n°anonymat : 377932

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 298

Nombre de pages : 34

Session : 2022

Épreuve de : Maths E EDTEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$\textcircled{4} \bullet X_0(\omega) = [0, 1]$$

$$\bullet \forall x \in \mathbb{R}, P(X_0 \leq x) = \int_{-\infty}^x b_0(t) dt$$

$$\text{pour } x < 0 : = 0 \text{ car } b_0 \text{ est nulle sur } \mathbb{R}^-$$

$$\text{pour } x > 1 : = \int_0^1 b_0(t) dt \text{ car } b_0 \text{ est nulle en dehors de } [0, 1] \\ = 1 \text{ d'après q. } \textcircled{3}.$$

$$\text{pour } 0 \leq x \leq 1 : = \int_0^x b_0(t) dt \text{ car } b_0 \text{ est nulle sur } \mathbb{R}^-$$

$$= \int_0^x \alpha_0 t^0 (1-t)^0 dt$$

~~$$= \alpha_n \int_0^x t^n (1-t)^n dt$$~~

~~avec $p=q=n$ et les mêmes fonctions u et v de la question $\textcircled{1}$ $\textcircled{5}$, on peut intégrer par parties $u'v$ sur $[0, x]$:~~

~~$$\int_0^x t^n (1-t)^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \times (1-t)^n \right]_0^x + \int_0^x \frac{t^{n+1}}{n+1} \times n(1-t)^{n-1} dt$$~~

$$= \alpha_0 \int_0^x (t(1-t))^0 dt$$

$$= \frac{1!}{(0!)^2} \int_0^x 1 dt$$

$$= [t]_0^x = x$$

On a donc :

$$X_0(x) = [0, 1]$$

et

$$P(X_0 \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{sur }]-\infty, 0[\\ x & \text{sur } [0, 1] \\ 1 & \text{sur }]1, +\infty[\end{cases}$$

On reconnaît $X_0 \Leftrightarrow \mathcal{U}[0, 1]$

⑤ ② $\forall n \in \mathbb{N}, E(X_n)$ existe

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot b_n(x) dx \text{ converge absolument}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 x \cdot \alpha_n x^n (1-x)^n dx \text{ converge}$$

car $x \mapsto x \cdot b_n(x) \geq 0$ sur $[0, 1]$ et b_n est nulle en dehors de $[0, 1]$.

$$\Leftrightarrow \alpha_n \int_0^1 x^{n+1} (1-x)^n dx \quad \text{converge}$$

OR on reconnaît $\int_0^1 x^{n+1} (1-x)^n dx = I(n+1, n)$
qui converge.

$\forall n \geq 1$,
d'où $E(X_n)$ existe et :

$$\begin{aligned} \forall n \geq 1, E(X_n) &= \alpha_n \times \frac{(n+1)! n!}{(n+1+n+1)!} = \alpha_n \frac{n! (n+1)!}{(2n+2)!} \\ &= \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \times \frac{n! (n+1)!}{(2n+2)!} = \frac{(2n+1)! \cdot n! \cdot n! \cdot (n+1)}{n! \cdot n! \cdot (2n+1)! \cdot (2n+2)} \\ &= \frac{n+1}{2(n+1)} \end{aligned}$$

d'où :

$$\boxed{\forall n \geq 1, E(X_n) = \frac{1}{2}}$$

⑤ ⑥ $\forall n \in \mathbb{N}$, $V(X_n)$ existe

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$, $E(X_n^2)$ existe

de même que q. ⑤ ⑥ :

$$\Leftrightarrow \alpha_n \int_0^1 x^{n+2} (1-x)^n dx \quad \text{converge.}$$

$$\text{On reconnaît } I(n+2, n) = \frac{(n+2)! n!}{(n+2+n+1)!} = \frac{(n+2)! n!}{(2n+3)!}$$

d'où $E(X_n^2)$ existe ^{et donc aussi $V(X_n)$} et vaut :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, E(X_n^2) &= \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \times \frac{(n+2)! n!}{(2n+3)!} \\ &= \frac{(2n+1)! \cdot n! \cdot (n+1)(n+2) \cdot n!}{n! \cdot n! \cdot (2n+1)! \cdot (2n+2)(2n+3)} = \frac{(n+1)(n+2)}{2(n+1)(2n+3)} \end{aligned}$$

$$= \frac{n+2}{2(2n+3)}$$

D'où par Koenig Huygens :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, \quad V(X_n) &= E(X_n^2) - (E(X_n))^2 \\ &= \frac{n+2}{2(2n+3)} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{4(n+2) - 2(2n+3)}{8(2n+3)} \\ &= \frac{2(n+2) - 2n - 3}{4(2n+3)} \\ &= \frac{2n + 4 - 2n - 3}{4(2n+3)}\end{aligned}$$

d'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad V(X_n) = \frac{1}{4(2n+3)}$$

⑤ © Comme X_n admet une variance et que X_n est à valeurs positives car dans $[0,1]$,

On peut appliquer l'inégalité de Bienaymé - Tchebychev sur X_n :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad P(|X_n - E(X_n)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

$$\text{ie } \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad P\left(|X_n - \frac{1}{2}| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2 4(2n+3)}$$

par positivité des probabilités, on a :

Copie anonyme - n°anonymat : 377932

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 298

Nombre de pages : 34

Session : 2022

Épreuve de : Maths & EDHEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon > 0, 0 \leq P(|X_n - \frac{1}{2}| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{4\varepsilon^2(2n+3)}$$

et comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4\varepsilon^2(2n+3)} = 0$,

On peut donc affirmer par encadrement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} P(|X_n - \frac{1}{2}| \geq \varepsilon) = 0$$

Partie 3

$$\begin{aligned} \textcircled{6} \quad \forall x \in \mathbb{R}, f_0(x) &= \alpha_0 \int_0^x t^0(1-t)^0 dt \\ &= \alpha_0 \int_0^x 1 dt \\ &= \alpha_0 [t]_0^x \end{aligned}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_0(x) = x \quad \text{car } \alpha_0 = 1.$$

$$\begin{aligned} \textcircled{7} \textcircled{a} \quad \forall n \in \mathbb{N}, f_n(1) &= \alpha_n \int_0^1 t^n(1-t)^n dt \\ &= 1 \quad \text{d'après } \textcircled{3}. \end{aligned}$$

7 b

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE



