Copie anonyme - n°anonymat : 783118

T6-00071 783118 Maths S

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 13

Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques S EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 1

1) $g : x \to \begin{cases} \frac{f(x)}{F(a)} & si\ x \leq a \\ 0 & si\ x > a \end{cases}$

f est $\mathcal{C}$ sur IR ($\mathcal{C}$ = continue) donc sur $]-\infty, a]$.

$F(a) \in]0, 1[$.

donc g est définie sur $]-\infty, a]$.

g est définie sur $]a, +\infty[$.

donc g est bien définie

$\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) > 0$ et $F(a) > 0$ donc $\frac{f(x)}{F(a)}$ est positif.

donc g est à valeurs positives sur IR.

g est $\mathcal{C}$ sur $]a, +\infty[$.

f est $\mathcal{C}$ sur IR donc $]-\infty, a]$ et $F(a)$ un réel donc g est $\mathcal{C}$ sur $]-\infty, a]$.

donc g $\mathcal{C}$ sur IR sauf éventuellement en a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x).dx = \int_{-\infty}^{a} \frac{f(x)}{F(a)}.dx = \frac{1}{F(a)} \int_{-\infty}^{a} f(x).dx = \frac{1}{F(a)} \left[F(x)\right]_{-\infty}^{a}$$

$$= \frac{F(a)}{F(a)} - \frac{1}{F(a)} \times \lim_{x \to -\infty} F(x)$$

$$= \frac{F(a)}{F(a)} = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x).dx = 1$$

donc g est la densité d'une variable aléatoire notée Y

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

2) a) Soit G C^1 sur I

$\forall x \in I$, $G'(x) = g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{F(a)} & \text{si } x \leq a \\ 0 & \text{si } x > a \end{cases} = \begin{cases} \frac{F'(x)}{F(a)} & \text{si } x \leq a \\ 0 & \text{si } x > a \end{cases}$

donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{G(x) = \begin{cases} \frac{F(x)}{F(a)} & \text{si } x \leq a \\ 1 & \text{si } x > a \end{cases}}$

b) Soit $a < x$

$(X \leq a) \subset (X \leq x)$

Donc $P_{(X \leq a)}(X \leq x) = 1 = G(x)$

Soit $x \leq a$

$$P_{(X \leq a)}(X \leq x) = \frac{P((X \leq a) \cap (X \leq x))}{P(X \leq a)}$$

$$= \frac{P(X \leq x)}{P(X \leq a)} \quad \text{car } (X \leq x) \subset (X \leq a)$$

$$= \frac{F(x)}{F(a)} = G(x)$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{G(x) = P_{(X \leq a)}(X \leq x)}$

3) a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$G_n(x) = P(M_n \leq x) = P(\max(Y_1, \dots, Y_n) \leq x)$

$= P([Y_1 \leq x] \cap \dots \cap [Y_n \leq x])$

$= P(Y_1 \leq x) \times \dots \times P(Y_n \leq x)$ par indépendances des Y_i

$= P(Y \leq x)^n$

$= G(x)^n$

$= \begin{cases} \left(\frac{F(x)}{F(a)}\right)^n & \text{si } x \leq a \\ 1 & \text{si } x > a \end{cases}$

b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $M_n : x \to \begin{cases} \left(\frac{F(x)}{F(2)}\right)^n & \text{si } x \leq a \\ 1 & \text{si } x > a \end{cases}$.

si $x > a$ $M_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

si $x \leq a$ comme F est croissante $F(x) \leq F(2)$ et F est positive

donc $0 \leq \frac{F(x)}{F(2)} < 1$

donc $\left(\frac{F(x)}{F(2)}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $M_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ 1 & \text{si } x > a \end{cases}$

donc $M_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} C$ C la variable aléatoire qui suit la variable certaine a.

4) a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$H_n(x) = P(Z_n \leq x) = P(n(a - M_n) \leq x)$

$= P\left(a - M_n \leq \frac{x}{n}\right)$ car $n \in \mathbb{N}^*$

$= P\left(a - \frac{x}{n} \leq M_n\right)$

$= 1 - P\left(M_n \leq a - \frac{x}{n}\right)$

$= 1 - G_n\left(a - \frac{x}{n}\right)$

$= \begin{cases} 1 - \left(\frac{F(a - \frac{x}{n})}{F(2)}\right)^n & \text{si } a - \frac{x}{n} \leq a \\ 1 - 1 & \text{si } a - \frac{x}{n} > a \end{cases}$

$a - \frac{x}{n} > a$ ie $a - x > an$ ie $a - an > x$ ie $a(1-n) > x$

$n \in \mathbb{N}^*$ donc $n \geq 1$ donc $-n \leq -1$ donc $1 - n \leq 0$

donc $a(1-n) \leq 0$ donc $x < 0$

d'où $\boxed{H_n(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{F(a - \frac{x}{n})}{F(2)}\right)^n & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}}$

b) $\forall x \in \mathbb{R}$ $\frac{x}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

d'après Taylor Young

$F\left(a - \frac{x}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} F(a) + F'(a) \times \left(-\frac{x}{n}\right) + o\left(\frac{x}{n}\right)$

donc $\frac{F(a-\frac{x}{n})}{F(a)} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{F(a)}{F(a)} - \frac{F'(a)}{F(a)} \times \frac{x}{n} + o\left(\frac{x}{n}\right)$

$$\underset{n\to+\infty}{=} \boxed{1 - \frac{f(a)}{F(a)} \times \frac{x}{n} + o\left(\frac{x}{n}\right)}$$

c) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{F(a-\frac{x}{n})}{F(a)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 - \frac{f(a)}{F(a)} \times \frac{x}{n}$

$$\left(\frac{F(a-\frac{x}{n})}{F(a)}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \left(1 - \frac{f(a)}{F(a)} \times \frac{x}{n}\right)^n$$

$$1 - \left(\frac{F(a-\frac{x}{n})}{F(a)}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 - \left(1 - \frac{f(a)}{F(a)} \times \frac{x}{n}\right)^n$$

$$1 - \left(1 - \frac{f(a)}{F(a} \times \frac{x}{n}\right)^n = 1 - \exp(n \times \ln\left(1 - \frac{f(a)}{F(a)} \times \frac{x}{n}\right)$$

$$= 1 - e^{n\ln\left(1 - \frac{f(a)}{F(a)} \times \frac{x}{n}\right)}$$

Si $x < 0$ $H_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Si $x \geq 0$ $H_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 - e^{n\ln\left(1 - \frac{f(a)}{F(a} \times \frac{x}{n}\right)}$

donc $Z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{E}(n\ln$

Copie anonyme - n°anonymat : 783118

Code épreuve : 297 | Nombre de pages : 19 | Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques 3 EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

Exercice 2

1) $F = \{ f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3) \,/\, \exists k \in [0,1[, \forall x \in \mathbb{R}^3, \|f(x)\| \leq k\|x\|$

si $k = 0$ $F = \{ f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3), \forall x \in \mathbb{R}^3, \|f(x)\| \leq 0 \}$.

$= \{ f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3), \forall x \in \mathbb{R}^3, \sqrt{\langle f(x), f(x) \rangle} \leq 0 \}$.

$= \{ f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3), \forall x \in \mathbb{R}^3, \langle f(x), f(x) \rangle = 0 \}$.

$= \{ f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3), \forall x \in \mathbb{R}^3\ f(x) = 0 \}$.

$\boxed{= 0_{\mathbb{R}^3}}$

2) a) $A^2 = \frac{1}{27^2} \times \cancel{81}\, I_3 = \frac{9 \times 9}{(3 \times 9)^2} I_3 = \frac{9 \times 9}{3^2 \times 9^2} = \boxed{\frac{1}{9} I_3}$

$A^2 - \frac{1}{9} I_3 = 0$

Les vp possibles de A sont les solutions de l'équation :

$X^2 - \frac{1}{9} = 0$ ie $X^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2$ ie $X = \frac{1}{3}$ ou $X = -\frac{1}{3}$

Les vp possibles de A sont $\boxed{\lambda = -\frac{1}{3}}$ et $\boxed{\mu = \frac{1}{3}}$

b) ~~A est diagonalisable si $\ker(A) \neq \{0\}$.~~

$$A - \frac{1}{3}I_3 = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} -1 & 8 & -4 \\ 8 & -1 & -4 \\ -4 & -4 & -7 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{27}\begin{pmatrix} -1 & 8 & -4 \\ 8 & -1 & -4 \\ -4 & -4 & -7 \end{pmatrix} - \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{27}\begin{pmatrix} -10 & 8 & -4 \\ 8 & -10 & -4 \\ -4 & -4 & -16 \end{pmatrix}$$

$$A + \frac{1}{3}I_3 = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} -1 & 8 & -4 \\ 8 & -1 & -4 \\ -4 & -4 & -7 \end{pmatrix} + \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 8 & 8 & -4 \\ 8 & 8 & -4 \\ -4 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$(A + \frac{1}{3}I_3)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $-\frac{1}{3}$ asso à $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$(A + \frac{1}{3}I_3)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $-\frac{1}{3}$ asso à $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$rg(A + \frac{1}{3}I_3) = 1$ donc $\dim(\mathrm{Ker}(A + \frac{1}{3})) = 2$ (théorème du rang)
$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ sont non colinéaires.
$\mathrm{Ker}(A + \frac{1}{3}) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$

$Rg(A - \frac{1}{3}I_3) = 2$ car C_1 et C_2 non colinéaires et $2C_1 + 2C_2 = C_3$
$2C_1 + 2C_2 - C_3 = 0$.

$(A - \frac{1}{3}I_3)\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\frac{1}{3}$ asso à $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\dim(\mathrm{Ker}(A - \frac{1}{3}I_3)) = 1$ (théorème du rang.
$\mathrm{Ker}(A - \frac{1}{3}I_3) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$

$\dim(\mathrm{Ker}(A - \frac{1}{3}I_3)) + \dim(\mathrm{Ker}(A + \frac{1}{3}I_3)) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$

donc $\lambda = -\frac{1}{3}$ et $\mu = \frac{1}{3}$ sont les vp de A

$Rg(A) = 3$ et A admet des vp asso à 3 vp distinctes donc A est diagonalisable

c) A est diagonalisable donc ses SEP sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
f est diagonalisable donc ses SEP sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathbb{R}^3$

d) Soit $x \in \mathbb{R}^3$, $\exists y \in \ker(f-\lambda Id)$, $z \in \ker(f-\mu Id)$ tq $x = y+z$
car $\mathbb{R}^3 = \ker(f-\lambda Id) \oplus \ker(f-\mu Id)$
$x \in z$ donc $f(x) - \mu x = 0$ ie $f(x) = \mu x$.
$x \in y$ donc $f(x) - \lambda x = 0$ ie $f(x) = \lambda x$.

$F = \{ f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3) / K \in [0,1[, \forall x \in \mathbb{R}^3, \|f(x)\| \leqslant K\|x\|$.

3) a) On suppose que $Id \in F$
, $\|Id(x)\| = \|x\|$
$K \in [0,1[$ $\quad 0 < K \leqslant 1$
$0 < K\|x\| \leqslant \|x\|$
$0 < K\|x\| \leqslant \|Id(x)\|$ ABSURDE
Donc $\boxed{Id \notin F}$

b) $0_{\mathbb{R}^3} \subset F$ et $F \subset \mathbb{R}^3$ mq F n'est pas linéaire.
Soit $f, g \in F$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}^3$ mq $(\alpha f + \beta g)(x) \notin F$.
$f \in F$ donc $\|f(x)\| \leqslant k\|x\|$
$g \in G$ donc $\|g(x)\| \leqslant \ell\|x\|$.
$\alpha\|f(x)\| + \beta\|g(x)\| \leqslant \alpha k\|x\| + \beta \ell \|x\| = (\alpha k + \beta \ell)\|x\|$
$\alpha k + \beta \ell \notin [0,1[$.
donc F non linéaire donc F n'est pas un espace vectoriel

c) Soit $f \in F$ mq $f \circ f \in F$.
$f \in F$ donc $\exists k \in [0,1[$, $\forall x \in \mathbb{R}^3$ $\|f(x)\| \leqslant K\|x\|$

a) Soit f un automorphisme de F.

4) a) Soit $p = p \circ p \neq 0_E$ mq $p \notin F$.

b)

5) a) Soit $k = \max\{|\lambda|, \lambda \in Sp(f)\}$.

$\forall x \in \mathbb{R}^3$, $f(x) = \lambda x$

donc $\|f(x)\| = \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

donc $\boxed{\|f(x)\| \leq |\lambda| \|x\|}$.

b)

Copie anonyme - n°anonymat : 783118

Emplacement QR Code	Code épreuve : 297	Nombre de pages : 19	Session : 2022
	Épreuve de : Mathématiques S EDHEC		

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

6) a) $A^2 = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

$A^3 = \frac{1}{216}\begin{pmatrix} 0 & -18 & 18 \\ -18 & -9 & 0 \\ 18 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

$= \frac{9}{6 \times 6 \times 6}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{6 \times 4}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{4} A$

$A^3 - \frac{1}{4} A = 0$

les vp possibles de A (et de f) sont les solutions de :

$X^3 - \frac{1}{4} X = 0$

$X(X^2 - \frac{1}{4}) = 0$ ie $X = 0$ ou $X^2 - \frac{1}{4} = 0$

ie $X = 0$ ou $X = \frac{1}{2}$ ou $X = -\frac{1}{2}$

les vp possibles de f sont $\boxed{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \text{ et } 0}$

b) Toutes les vp possibles de f appartiennent à $]-1, 1[$ donc les vp de f aussi

d'après 5(b) $\boxed{f \in F}$

ici $\boxed{k = \frac{1}{2}}$

e) $A = [0, -2, 2; -2, -1, 0; 2, 0, 1]/6$

$k =$

disp(k)

Exercice 3

1) a) $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$

$\forall i \in \mathbb{N}^*\ X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$

$S = \sum_{i=1}^{N} X_i$

$X_i(\Omega) = [\![0,1]\!]$

donc $\boxed{S(\Omega) = [\![0, N]\!]}$

b) Les X_i possèdent tous une espérance

S une combinaison linéaire des X_i

donc S possède une espérance

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$E(S_n) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} p = np$

$S_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$.

$k \in S_n(\Omega)$

$P(X_1 + \dots + X_n = k)$

$= P([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1] \cap \dots \cap [X_k = 1] \cap [X_{k+1} = 0] \dots \cap [X_k = 0])$

$= P(X_1 = 1) \dots P(X_k = 1) P(X_{k+1} = 0) \dots P(X_n = 0)$

$= p^k (1-p)^{n-k}$

choix des k bernoullis qui se réalise : $\binom{n}{k}$.

$P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

donc $\boxed{S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)}$

3) Soit $k \in \mathbb{N}^*$

N indépendant des X_i

$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_i$ donc N est indépendant de S_n

donc $P([S_n = k] \cap [N=n]) = P(S_n = k) P(N=n)$

$$P(S=k) = \bigcup_{n=k}^{+\infty} P([S_n = k] \cap [N=n])$$

$$= \sum_{n=k}^{+\infty} P([S_n = k] \cap [N=n]) \text{ par incompatibilité.}$$

$$\boxed{= \sum_{n=k}^{+\infty} P([S_n = k]) P(N=n)}$$

4) a) $N-1 \hookrightarrow \lambda$

$k \in \mathbb{N}^*$

$$P(N=k) = P(N-1 = k-1) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$P(S=k) = \sum_{n=k}^{+\infty} P(S_n = k) P(N=n)$$

$$= \sum_{n=k}^{+\infty} P(S_n=k) P(N-1 = n-1)$$

$$= \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \frac{e^{-\lambda} \lambda^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} \frac{e^{-\lambda} \lambda^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$= \frac{p^k e^{-\lambda}}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} n \frac{q^{n-k} \lambda^{n-1}}{(n-k)!}$$

$$= \frac{p^k e^{-\lambda}}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} n \frac{q^{n-k} \lambda^{n-k} \lambda^{k-1}}{(n-k)!}$$

$$\boxed{= \frac{p^k e^{-\lambda} \lambda^{k-1}}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n (q\lambda)^{n-k}}{(n-k)!}}$$

c) $S(\Omega) = [\![0, n]\!]$

$$P(S=0) = 1 - \sum_{k=1}^{n} P(S=k) = 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{p^k \lambda^{k-1}}{k!} (\lambda q + k) e^{-\lambda p}$$

$$= 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{p^k \lambda^{k-1} \lambda q e^{-\lambda p}}{k!} - \sum_{k=1}^{n} \frac{p^k \lambda^{k-1} k e^{-\lambda p}}{k!}$$

$$= 1 - q e^{-\lambda p} \sum_{k=1}^{n} \frac{p^k \lambda^k}{k!} - e^{-\lambda p} p \sum_{k=1}^{n} \frac{p^{k-1} \lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$= 1 - q e^{-\lambda p} e^{-\lambda} - e^{-\lambda p} p e^{-\lambda}$$

$$= 1 - e^{-\lambda(p+1)} (q+p)$$

$$= \underline{1 - e^{-\lambda(p+1)}} \quad \text{car } q = 1 - p.$$

d)

5) function y = S(lambda, p)

N = grand(1, n, 'poi', lambda)

y =

endfunction

Copie anonyme - n°anonymat : 783118

Emplacement QR Code

Code épreuve : 297	Nombre de pages : 19	Session : 2022

Épreuve de : Mathématiques S EDHEC

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Problème.

1) $f(x) \underset{0^+}{\sim} x$ ie $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 1$.

$\ln\left(\dfrac{f(x)}{x}\right) = \ln(f(x)) - \ln(x)$

$\ln(1) = 0$

par composition $\ln\left(\dfrac{(f(x))}{x}\right) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$

$\ln(f(x)) - \ln(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$

$\ln(f(x)) - \ln(x) \underset{0^+}{\sim} 0$

donc $\boxed{\ln(f(x)) \underset{0^+}{\sim} \ln(x)}$

Partie 1

2) a) $sh(-x) = \dfrac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = \dfrac{e^{-x} - e^{x}}{2} = -\dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$

donc sh est impaire

b) $\left.\begin{array}{l} x \mapsto e^{x} \ C^1 \text{ sur } \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{-x} \ C^1 \text{ sur } \mathbb{R} \end{array}\right\}$ sh est C^1 sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $sh'(x) = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2} > 0$ donc sh est strictement croissante

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$sh'(x)$		$+$	
sh	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

c) $sh(0) = \frac{e^{0} - e^{-0}}{2} = \frac{e^{0} - e^{0}}{2} = 0$

$sh(x) \underset{x \to 0}{\sim} x$ $\qquad \frac{sh(x)}{x} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2x} = \frac{e^{x}}{2x} - \frac{e^{-x}}{2x} \xrightarrow[x \to 0]{cc} 1.$

3) a) $ch(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = ch(x)$

ch est paire

b) ch C^1 sur $\mathbb{R}$ car $x \mapsto e^x$ C^1 sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, $ch'(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$

$\frac{e^{x} - e^{-x}}{2} \geq 0 \iff e^x - e^{-x} \geq 0 \iff e^x \geq e^{-x}$

$\iff \ln(e^x) \geq \ln(e^{-x})$ par croissance de ln

$\iff x \geq -x$

$\iff 2x \geq 0$

$\iff x \geq 0$ donc ch $\nearrow$ sur $[0, +\infty[$

$\searrow$ sur $]-\infty, 0]$ par parité

$ch(0) = \frac{e^0 + e^0}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$ch'(x)$		$-$	0	$+$	
ch	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

4) $(ch(x))^2 - (sh(x))^2 = \left(\frac{e^{x} + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^{x} - e^{-x}}{2}\right)^2$

$= \frac{1}{4}(e^{x} + e^{-x})^2 - \frac{1}{4}(e^{x} - e^{-x})^2$

$= \frac{1}{4}\left(e^{2x} + 2e^{x}e^{-x} + e^{-2x} - e^{2x} + 2e^{x}e^{-x} - e^{-2x}\right)$

$= \frac{1}{4} 4e^{x-x} = \frac{1}{4} 4 e^{0} = e^{0} = 1$

donc $\boxed{(ch(x))^2 - (sh(x))^2 = 1}$

Partie 2

5.a) . sh est définie sur $\mathbb{R}$

ch est définie sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$ $ch(x) \geqslant 1 > 0$

par quotien $th : x \to \frac{sh(x)}{ch(x)}$ est définie sur $\mathbb{R}$

b) $th(-x) = \frac{sh(-x)}{ch(-x)} = \frac{-sh(x)}{ch(x)} = -th(x)$ car ch paire et sh impaire

donc th est impaire

c) sh et ch C^1 sur $\mathbb{R}$ donc th C^1 sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $th'(x) = \frac{sh'(x)ch(x) - sh(x)ch'(x)}{(ch(x))^2}$

$$= \frac{(ch(x))^2 - (sh(x))^2}{(ch(x))^2}$$

$$= \frac{1}{(ch(x))^2} \geqslant 0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$th'(x)$			$+$		
th	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

$th(0) = \frac{sh(0)}{ch(0)} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} th(x) = ?$

$$th(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)} = \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} = \frac{\frac{e^{2x} - 1}{e^x}}{\frac{e^{2x}+1}{e^x}}$$

$$= \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 2} = \frac{e^{2x}\left(1 - \frac{1}{e^{2x}}\right)}{e^{2x}\left(1 + \frac{1}{e^{2x}}\right)} = \frac{1 - \frac{1}{e^{2x}}}{1 + \frac{1}{e^{2x}}}$$

si $x \to +\infty$ $e^{2x} \to +\infty$ par composition avec $\frac{1}{x}$ $\frac{1}{e^{2x}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

donc $1 - \frac{1}{e^{2x}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$ par quotient $th(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$

$1 + \frac{1}{e^{2x}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$

comme th est impaire $th(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} -1$

15/20

6) a) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$\frac{1}{sh(x)} = \frac{1}{\frac{e^x - e^{-x}}{2}} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

$$\frac{ae^{-x}}{1-e^{-x}} + \frac{be^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{ae^{-x}(1+e^{-x}) + be^{-x}(1-e^{-x})}{(1-e^{-x})(1+e^{-x})}$$

$$= \frac{a(e^{-x} + e^{-2x}) + b(e^{-x} - e^{-2x})}{1 + e^{-x} - e^{-x} - e^{-2x}}$$

$$= \frac{a(e^{-x} + e^{-2x}) + b(e^{-x} - e^{-2x})}{1 - e^{-2x}}$$

$$= \frac{a(e^{-x} + e^{-2x})e^{x} + b(e^{-x} - e^{-2x})e^{x}}{e^{x} - e^{-x}}$$

$$= \frac{a(e^{0} + e^{-x}) + b(e^{0} - e^{-x})}{e^{x} - e^{-x}}$$

$$= \frac{a + ae^{-x} + b - be^{-x}}{e^{x} - e^{-x}}$$

$$= \frac{a + b + (a-b)e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}}$$

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ a - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{a = b = 1}$$

donc $\boxed{\frac{1}{sh(x)} = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} + \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}}$

~~b) une primitive de $x \mapsto \frac{1}{sh(x)}$ est $S : x \mapsto \ln(|sh(x)|)$~~

~~car $\ln'(|sh(x)|) = \ln'(|th(x)ch(x)|)$~~

~~$= \frac{1}{th(x)ch(x)} \times \left(\frac{1}{(ch(x))^2} ch(x) + \frac{sh(x)}{ch(x)} \times sh(x)\right)$~~

~~$= \frac{1}{sh(x)} \times \left(\frac{1}{ch(x)} + \frac{sh^2(x)}{ch(x)}\right)$~~

Réponse page 17 du 6.b)

7) d'après 2 si $f(x) \underset{0^+}{\sim} x$ alors $\ln(f(x)) \underset{0^+}{\sim} \ln(x)$

mq $th\left(\frac{x}{2}\right) \underset{0^+}{\sim} x$ $\qquad \frac{x}{2} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 0$

$$th\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{sh\left(\frac{x}{2}\right)}{ch\left(\frac{x}{2}\right)} \underset{0^+}{\sim} \frac{\frac{x}{2}}{1} \underset{0^+}{\sim} \frac{x}{2} \underset{0^+}{\sim} x$$

donc $th\left(\frac{x}{2}\right) \underset{0^+}{\sim} x$ donc $\boxed{\ln\left(th\left(\frac{x}{2}\right)\right) \underset{0^+}{\sim} \ln(x)}$

Partie 3

8) a) Soit $t \in [k, k+1]$ avec $k \in \mathbb{N}^*$.

$0 < k \leq t \leq k+1$

$x \in \mathbb{R}_+^*$ $\quad 0 < kx \leq tx \leq (k+1)$

Copie anonyme - n°anonymat : 783118

Emplacement QR Code

Code épreuve : 297 | **Nombre de pages :** 19 | **Session :** 2022

Épreuve de : Mathématiques S EDHEC

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

par croissance de sh : $sh(0) = 0 < sh(kx) \leq sh(tx) < sh((k+1)x)$

$$\frac{1}{sh(kx)} \geq \frac{1}{sh(tx)} \geq \frac{1}{sh((k+1)x)}$$

On intègre entre k et k+1 sur t $\int_k^{k+1} \frac{1}{sh((k+1)x)} \cdot dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{sh(tx)} \cdot dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{sh(kx)} \cdot dt$.

$$\boxed{\frac{1}{sh((k+1)x)} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{sh(tx)} \cdot dt \leq \frac{1}{sh(kx)}}$$

b) $\int_k^{k+1} \frac{1}{sh(tx)} \, dt \leq \frac{1}{sh(kx)}$

On somme entre 1 et n $\sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{sh(tx)} \cdot dt \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{sh(kx)}$

d'après Chasles : $\boxed{\int_1^{n+1} \frac{1}{sh(tx)} \, dt \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{sh(kx)}}$

$\frac{1}{sh((k+1)x)} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{sh(tx)} \, dt$

On somme entre 1 et $n-1$ $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{sh((k+1)x)} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{sh(tx)} \cdot dt$.

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{sh(kx)} \leq \int_1^{n} \frac{1}{sh(tx)} \cdot dt.$$

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{sh(kx)} + \frac{1}{sh(x)} \leq \int_1^{n} \frac{1}{sh(tx)} \cdot dt + \frac{1}{sh(x)}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{sh(kx)} \leq \int_1^{n} \frac{1}{sh(tx)} \cdot dt + \frac{1}{sh(x)}}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

donc $\int_1^{n+1} \frac{1}{sh(tx)} . dt \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{sh(kx)} \leq \int_1^{n} \frac{1}{sh(tx)} + \frac{1}{x}$

6.1 b)

9. a)

b) $\int_1^{n+1} \frac{1}{sh(tx)} . dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_1^{+\infty} \frac{1}{sh(tx)} . dt = -\frac{1}{x} \ln\left(th\left(\frac{x}{2}\right)\right)$

$\int_1^{n} \frac{1}{sh(tx)} . dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_1^{+\infty} \frac{1}{sh(tx)} . dt = -\frac{1}{x} \ln\left(th\left(\frac{x}{2}\right)\right)$

donc $\int_1^{n} \frac{1}{sh(tx)} . dt + \frac{1}{sh(x)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\frac{1}{x} \ln\left(th\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{sh(x)}\right.$

$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{sh(kx)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{sh(kx)}$

Par encadrement de limites en utilisant 8 b)

$$\boxed{-\frac{1}{x}\ln\left(th\left(\frac{x}{2}\right)\right) \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{sh(kx)} \leqslant -\frac{1}{x}\ln\left(th\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \frac{1}{sh(x)}}$$

c) $-\frac{1}{x}\ln\left(th\left(\frac{x}{2}\right)\right) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{\ln(x)}{x}$

Car $\dfrac{-\frac{1}{x}\ln\left(th\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{-\frac{\ln(x)}{x}}$

$= \dfrac{\ln\left(th\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{\ln(x)} \to 1$ car $\ln\left(th\left(\frac{x}{2}\right)\right) \underset{0^+}{\sim} \ln(x)$

par encadrement $\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{sh(nx)} \underset{0^+}{\sim} -\frac{\ln(x)}{x}}$

10)
```
n= input ('entrez une valeur pour n: ')
x= input ('entrez une valeur strictement positive pour x: ')
S = 0
for k = 1:n
S = S+ 1/((exp(kx) - exp(-kx))/2)
end
disp(S)
```