ECRICOME PREPA 2023 - ECT - Technologique

Mathématiques option technologique Mathématiques

HIBA

Note de délibération : 19.38 / 20

Prénom (s) H I B A

19.38 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques option technologique. Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction. Feuille 01 / 07

Numéro de table 005

Exercice 1 :

Partie 1.

$$(u_n) : \begin{cases} u_1 \in [0,1] \\ u_{n+1} = \frac{5}{12} u_n + \frac{1}{3} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

1. Informatique :

```
import numpy as np
def suite (n, u1) :
    u = u1
    for k in range (0, 2) :
        u = 5/12 u1 + 1/3
    return u.
```

2) a) $x = \frac{5}{12} x + \frac{1}{3}$. Résolvons cette équation sur $\mathbb{R}$.

$x = \frac{5}{12} x + \frac{1}{3} \iff x - \frac{5}{12} x = \frac{1}{3}$

$\iff \frac{12}{12} x - \frac{5}{12} x = \frac{1}{3}$

$\iff \frac{7}{12} x = \frac{1}{3}$

$\iff x = \frac{1}{3} / \frac{7}{12}$

$\iff x = \frac{1}{3} \times \frac{12}{7}$

$\iff x = \frac{4}{7}$ $\quad l = \frac{4}{7}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.38 / 20

b) On a : $l = \frac{4}{7}$.

Démontrons que $V_n = U_n - l$ est une suite géométrique.

On pose : $\begin{cases} U_{n+1} = \frac{5}{12} U_n + \frac{1}{3} \\ x = \frac{5}{12} x + \frac{1}{3} \end{cases}$

autrement : $\begin{cases} U_{n+1} = \frac{5}{12} U_n + \frac{1}{3} \\ l = \frac{5}{12} l + \frac{1}{3} \end{cases}$

Il s'agit là, d'une suite arithmético-géométrique.

En procédant par soustraction des deux équations membre à membre on obtient :

$$U_{n+1} - l = \frac{5}{12} U_n - \frac{5}{12} l + \frac{1'}{3} - \frac{1'}{3}.$$

$$\Leftrightarrow U_{n+1} - l = \frac{5}{12} (U_n - l)$$

De là, on conclut que $U_n - l$ est une suite géométrique de raison $\cancel{\left(\frac{5}{12}\right)}$ $\frac{5}{12}$.

Or $V_n = U_n - l$

Donc V_n est en effet une suite géométrique de raison $\frac{5}{12}$ (ce qu'il fallait démontrer).

c) Donnons l'expression du terme général de V_n.

V_n est une suite géométrique de raison $\frac{5}{12}$.

D'après le cours, son terme général est le suivant :

$V_n = V_1 \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^{n-1}$ (avec 1 comme premier terme)

Par ailleurs : $V_1 = U_1 - l$

$V_1 = U_1 - \frac{4}{7}$. d'où : $V_n = \left(U_1 - \frac{4}{7}\right) \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^{n-1}$

d) On a : $V_n = U_n - \ell$.

d'où $U_n = V_n + \ell$.

Or $V_n = \left(U_1 - \frac{4}{7}\right) \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^{n-1}$

d'où : $U_n = \left(U_1 - \frac{4}{7}\right) \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} + \frac{4}{7}$.

Partie 2.

$A = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$; $P = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

3) $X_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) $AX_1 = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 + 12 \\ 12 + 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 \\ 36 \end{pmatrix} = 12\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

$AX_2 = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 + 4 \\ -3 + 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) D'après 3a) $AX_1 = 12\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$; Donc 12 est bel et bien une valeur propre de A associée au vecteur propre $X_1\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ [en tenant compte que le résultat n'est pas un vecteur nul]

De même, $AX_2 = 5\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; Donc 5 est une valeur propre de A associée au vecteur propre $X_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ [car le résultat ne donne pas de vecteur nul]

4) P est une matrice carré, pour vérifier qu'elle est inversible, il suffira de calculer $ad - bc$, avec $a = 4$; $b = -1$, $c = 3$ et $d = 1$.

$ad - bc = 4 + 3 = 7$, on remarque que $7 \neq 0$

Donc P est bel et bien une matrice inversible.

D'après le cours, l'inverse d'une matrice carré inversible est le suivant :

$$\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

d'où $P^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = Q$.

Donc $P^{-1} = Q$.

5) Vérifions que $A = PDP^{-1}$

on pose dans un premier temps $PD = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

$PD = \begin{pmatrix} 48 & -5 \\ 36 & 5 \end{pmatrix}$

dans un second temps: $PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 48 & -5 \\ 36 & 5 \end{pmatrix} \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

$$PDP^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 48+15 & 48-20 \\ 36-15 & 36+20 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 63 & 28 \\ 21 & 56 \end{pmatrix} = A.$$

En effet $\underline{A = PDP^{-1}}$

6) Démontrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $A^n = PD^nP^{-1}$

Procédant par un raisonnement par récurrence.

<u>Initialisation.</u>

pour $n = 0$

$A^0 = I$ d'une part

et $PD^0P^{-1} = PP^{-1} = I$ d'autre part (par principe de l'inverse).

D'où <u>la proposition à prouver est vraie pour $n=0$</u>.

<u>Hérédité.</u> pour n fixé.

supposons que : $A^n = PD^nP^{-1}$

montrons que : $A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$

$A^{n+1} = A^n \times A$

$= PD^nP^{-1} \times A$ (par hypothèse de récurrence).

or $A = PDP^{-1}$

Prénom (s) HIBA

19.38 / 20

ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 02 / 07

Numéro de table 005

D'où $A^{n+1} = PD^nP^{-1} \times PD \times P^{-1}$

Or $PP^{-1} = I$

donc $A^{n+1} = PD^nDP^{-1}$

d'où $A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$ ce qu'il fallait prouver.

donc la proposition est héréditaire.

<u>Conclusion :</u>

D'après le principe de récurrence, $A^n = PD^nP^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

7) Soit $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

a) Calculons $P^{-1}X$ (QX).

$P^{-1}X = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

On a : $A^n = PD^nP^{-1}$

d'où : $A^nX = PD^nP^{-1}X$

$A^nX = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Calculons d'abord :

$\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12^n & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4.12^n & -5 \\ 3.12^n & 5 \end{pmatrix}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.38 / 20

Par ailleurs :

$$\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4\cdot 12^n & -5 \\ 3\cdot 12^n & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4\cdot 12^n + 15 \\ 3\cdot 12^n - 15 \end{pmatrix}$$

D'où :

$$A^n X = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4\cdot 12^n + 15 \\ 3\cdot 12^n - 15 \end{pmatrix}$$

Partie 3.

On a à $n=1$: $a_1 = P(A_1) = 1$ évenement certain.

Calculons les probas : b_1, a_2 et b_2.

→ $[B_1]$: signifie qu'il pleut le jour 1.

$b_1 = P(B_1) = 0$ (car les deux évenement $[A_1]$ et $[B_1]$ sont incompatibles et on a d'office $a_1 = 1$)

→ $[A_2]$: signifie qu'il fait beau le jour 2.

$a_2 = P(A_2) = P_{(A_1)}(A_2) = \frac{3}{4}$. (d'après les données).

→ $[B_2]$: signifie qu'il pleut le jour 2.

$b_2 = P(B_2) = P_{(A_1)}(B_2) = \frac{1}{4}$ (On l'a obtenu par : $1 - \frac{3}{4}$). car A_1 est un évenement certain)

9) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

a) $[A_{n+1}]$: signifie qu'il fait beau au jour $n+1$.

Or, en suivant le protocole, nous ignorons le temps du jour n, il faut donc procéder par une formule de probas totales.

$\{[A_n]$ et $[B_n]\}$ forme un système complet d'évènement.

$P(A_{n+1}) = P([A_n] \cap [A_{n+1}]) \cup P([B_n] \cap [A_{n+1}])$.

par incompatibilité

$P(A_{n+1}) = P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n) \times P_{(B_n)}(A_{n+1})$

d'où :

$$\underline{P(A_{n+1}) = \frac{3}{4} P(A_n) + \frac{1}{3} P(B_n)}$$

(en utilisant les données du protocole).

De même pour $[B_{n+1}]$.

En utilisant le meme système d'évènement préalablement explicité :

$P[B_{n+1}] = P([A_n] \cap [B_{n+1}]) \cup P([B_n] \cap [B_{n+1}])$

Par incompatibilité :

$P[B_{n+1}] = P[[A_n]] \times P_{A_n}[B_{n+1}] + P[B_n] \times P_{B_n}[B_{n+1}]$

d'où

$$\underline{P[B_{n+1}] = \frac{1}{4} P(A_n) + \frac{2}{3} P(B_n)}$$

(en utilisant les données du protocole).

b) On a : $P(A_{n+1}) = \frac{3}{4} P(A_n) + \frac{1}{3} P(B_n)$.

d'où $a_{n+1} = \frac{3}{4} a_n + \frac{1}{3} b_n$

de meme

$$b_{n+1} = \frac{1}{4} a_n + \frac{2}{3} b_n$$

on peut déduire :

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

Par ailleurs $A = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$ et $\frac{1}{12} A = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = M$.

On obtient en effet :

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad M = \frac{1}{12} A.$$

c) ✓ a_n est la probabilité qu'il fasse beau au jour n

✓ b_n est la probabilité qu'il fasse pas beau (qu'il pleuve) au jour n.

Les deux événements forment un système complet d'événement (comme il a été expliqué dans la question 9)a)) ; leur somme est donc égale à 1 d'après le cours.

En effet $a_n + b_n = 1$.

10) a) Raisonnant par récurrence pour montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = M^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

<u>Initialisation.</u>

pour $n = 1$.

on a : $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (d'après 8)) d'une part.

et : $M^{0-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ d'autre part

Donc la proposition est vraie pour $n = 1$.

<u>Hérédité :</u> pour n fixé.

supposons que : $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = M^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

montrons que : $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ d'après 9) b)

or d'après l'hypothèse de récurrence.

$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = M^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Prénom (s) H I B A

19.38 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 03 / 07

Numéro de table 005

d'où :

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = M \times M^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = M^{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'où l'hérédité.

Conclusion.

D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = M^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) On a : $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = M^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

On a $M = \frac{1}{2} A$

et $A^n = PD^nP^{-1}$

Donc : $M^n = \frac{1}{2} PD^nP^{-1}$

$M^{n-1} = \frac{1}{2} PD^{n-1} P^{-1}$.

$M^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} PD^{n-1} P^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (avec $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = X$).

d'où $M^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} PD^{n-1} \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{14} PD^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.38 / 20

11) a) On: $a_{n+1} = \frac{3}{4} a_n + \frac{1}{3} b_n$

donc: $a_{n+1} = \frac{3}{4} a_n + \frac{1}{3}(1 - a_n)$ (car $a_n + b_n = 1$).

$a_{n+1} = \frac{3}{4} a_n + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} a_n$

d'où $a_{n+1} = \frac{5}{12} a_n + \frac{1}{3}$

b) Dans la partie 1 on avait

$U_{n+1} = \frac{5}{12} U_n + \frac{1}{3}$

cette suite peut être rapprochée à a_{n+1} par un changement de variable.

$U_n \to a_n$.

Or dans la partie 1) on avait prouvé que: $U_n = \left(U_1 - \frac{4}{7}\right)\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} + \frac{4}{7}$

d'où: $a_n = \left(a_1 - \frac{4}{7}\right)\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} + \frac{4}{7}$.

avec: $a_1 = 1$ d'où: $a_n = \frac{3}{7}\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} + \frac{4}{7}$

On a: $a_n + b_n = 1$ donc: $b_n = 1 - a_n$.

d'où: $b_n = 1 - \left(\frac{3}{7}\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} + \frac{4}{7}\right)$.

$= \frac{7}{7} - \frac{4}{7} - \frac{3}{7}\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1}$

$= \frac{3}{7} - \frac{3}{7}\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} = \frac{3}{7}\left(1 - \left(\frac{5}{12}\right)^{n-1}\right)$

12) $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{7}\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} + \frac{4}{7}$.

on a : $-1 < \frac{5}{12} < 1$ d'après le cours : $\lim_{+\infty} \left(\frac{5}{12}\right)^n = 0$.

d'où $\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{4}{7}$.

et $\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{7}\left(1 - \left(\frac{5}{12}\right)^{n-1}\right)$

de même : $\lim_{+\infty} \left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} = 0$.

donc : $\lim_{n\to+\infty} b_n = \frac{3}{7}$.

13) ~~Le client part pour 10 jours.~~

a) ~~La probabilité qu'il pleut beau les 9 premiers jours et~~ qu'il pleut le dernier est la suivante. (On la note H).

$P(H) = \cancel{P(A_1) \cap P(A_2) \cap P(A_3) \cdots \cap P(A_9) \cap P(B_{10})}$

$= 1 \times \cancel{\left(\frac{3}{4}\right) \times \left(\frac{3}{4}\right) \times \left(\frac{3}{4}\right) \cdots \times \left(\frac{3}{4}\right) \times \left(\frac{1}{4}\right)}$ (car $P(B_{10})$ dans ce cas est $P_{A_9}(B_{10}) = \frac{1}{4}$)

$\cancel{P(H) = \left(\frac{3}{4}\right)^9 \times \frac{1}{4}}$. Retour sur cette question après la b).

b) La probabilité que le voyageur reparte sous la pluie càd qu'il pleut le jour 10 (On la note B_{10}).

En utilisant la formule de proba totale avec $\{B_9, A_9\}$ comme système complet d'évènement, on obtient :

$P(B_{10}) = P[(B_9) \cap (B_{10})] \cup P[(A_9) \cap (B_{10})]$

par incompatibilité :

$P(B_{10}) = \frac{1}{4} a_9 + \frac{2}{3} b_9$

a) Le client part pour 10 jours la proba qu'il fasse beau les 9 premier jours et qui il pleut le dernier st la suivante (On la note P(H))

$$P(H) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \dots \times P_{A_1 \cap \dots A_8}(A_9) \times P_{A_9}(B_{10}).$$

$$= 1 \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3}.$$

$$P(H) = \left(\frac{3}{4}\right)^9 \times \frac{2}{3}$$

Exercice 2.

Partie 1.

Soit $f(x) = \ln(1 + e^x)$.

1) $f(x) = \ln(1 + e^x)$.

$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 + e^x > 0\}$ supérieur strictement.

Or: $1 + e^x$ est toujours supérieur strictement a 0 sur $\mathbb{R}$.

D'où $D_f = \mathbb{R}$.

2) f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f(x) = \ln(1 + e^x)$

$f'(x) = [\ln(1 + e^x)]'$

$$f'(x) = \frac{(1+e^x)'}{1 + e^x} = \frac{e^x}{1 + e^x}$$

On a: $f'(x) = \dfrac{e^x}{1 + e^x}$

avec: $e^x > 0$ sur $\mathbb{R}$

et $1 + e^x > 0$ sur $\mathbb{R}$.

d'où $f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$ donc f st strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Prénom (s) HIBA

19.38 / 20

Écricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 04 / 07

Numéro de table 005

3) Calculons lim de f en $-\infty$.

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \ln(1+e^x)$.

par ailleurs: $\lim_{x \to -\infty} 1+e^x = 1$.

d'où $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ln(1) = 0$.

(C_f) admet en effet une asymptote horizontale d'éq $y=0$.

4) a) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \ln(1+e^x)$.

par ailleurs: $\lim_{x \to +\infty} 1+e^x = +\infty$

d'où $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{X \to +\infty} \ln(X) = +\infty$. (avec $X = 1+e^x$).

b) Démontrons que $f(x) = x + \ln(1+e^{-x})$.

Je procède par démonstration inverse :

$x + \ln(1+e^{-x}) = x + \ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right)$

$= x + \ln\left(\frac{e^x+1}{e^x}\right)$

$= x + \ln(e^x+1) - \ln(e^x)$ (avec $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$)

$= x + \ln(1+e^x) - x$

$= f(x)$.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.38 / 20

Donc en effet : $f(x) = x + \ln(1 + e^{-x})$.

c) Montrons que $y = x$ est asymptote à C_f en $+\infty$.

$f(x) - x = x + \ln(1 + e^{-x}) - x$

$= \ln(1 + e^{-x})$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1 + e^{-x}) = 0$

car :

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ (car $\lim\limits_{+\infty} -x = -\infty$).

et $\ln(1) = 0$

D'où : $y = x$ est asymptote à la courbe C_f en $+\infty$.

d) $f(x) - x = x + \ln(1 + e^{-x}) - x$.

$f(x) - x = \ln(1 + e^{-x}) > 0$

~~d'où (D) est ... par rapport~~

D'où C_f est au dessus de (D) sur $\mathbb{R}$.

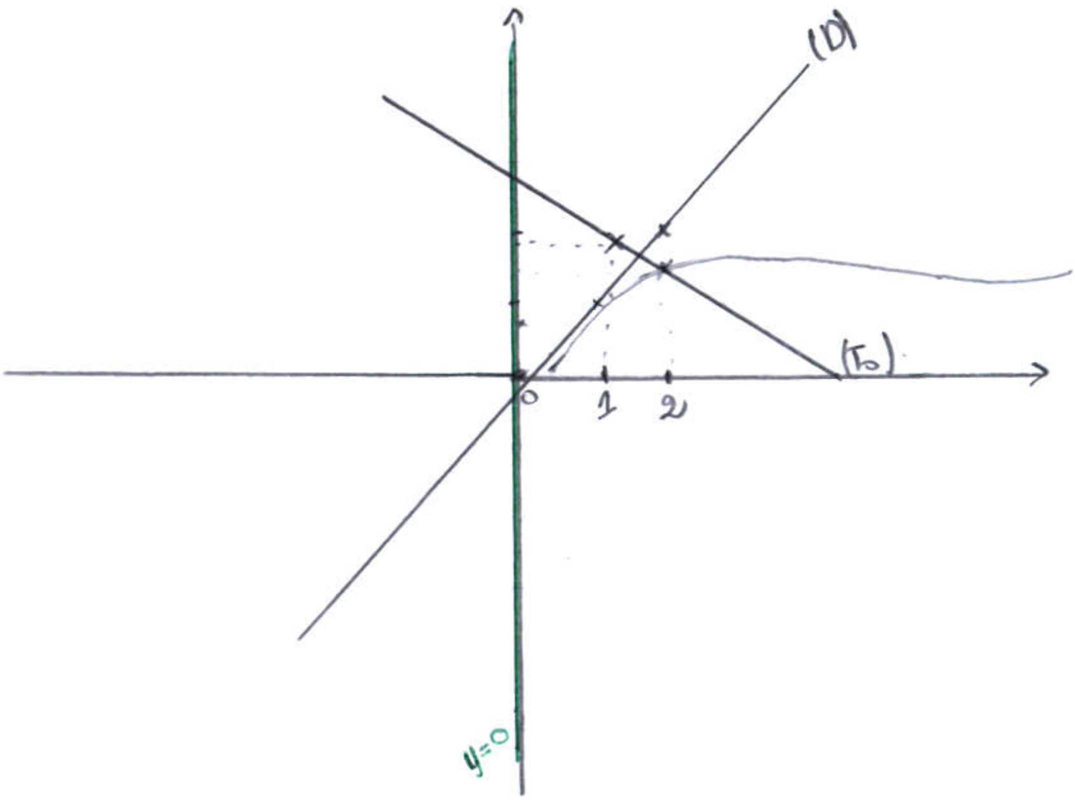
5) $(T_0) : y = f'(0)(x - 0) + f(0)$ d'après le cours

$(T_0) : y = \frac{1}{2}x + \ln(2)$.

6)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\ln(2)$	$+\infty$

b).



(T_0) : $y = \frac{1}{2}x + \ln(2)$

on donne $x = 1$ $\quad$ $y = \frac{1}{2} + \ln(2) \simeq 1,81$

on donne $x = 2$ $\quad$ $y = 1 + \ln(2) \simeq 1,69$.

Partie 2.

$$g_n(x) = \ln(1 + e^{-nx}) \quad \text{et} \quad I_n = \int_0^1 g_n(x)\,dx. \quad \text{avec } x \in [0,1].$$

1) a) On a: $g_n(x) = \ln(1 + e^{-nx})$

$$\begin{aligned} g_{n+1}(x) - g_n(x) &= \ln(1 + e^{-(n+1)x}) - \ln(1 + e^{-nx}) \\ &= \ln(1 + e^{(-n-1)x}) - \ln(1 + e^{-nx}) \\ &= \ln\left(\frac{1 + e^{(-n-1)x}}{1 + e^{-nx}}\right) \end{aligned}$$

On: $x \in [0,1]$ d'où $\ln\left(\frac{1 + e^{(-n-1)x}}{1 + e^{-nx}}\right) \leq 0$ car $\ln$ est négative sur cet intervale.

d'où, en effet: $g_{n+1}(x) \leq g_n(x)$.

Puisque : $g_{n+1}(x) \leq g_n(x)$.

et par croissance de l'intégrale sur $[0;1]$

<u>Alors</u> : $\int_0^1 g_{n+1}(x)\,dx \leq \int_0^1 g_n(x)\,dx$.

D'où $I_{n+1} \leq I_n$

donc I est décroissante.

c) I_n est décroissante et est minorée par 0 donc elle est convergente.

8) a)

$$I_n = \int_0^1 \ln(1+e^{-nx})\,dx.$$

$$I_n = \int_0^1 \ln\left(e^x\left(\frac{1}{e^x}+e^{-n}\right)\right)\,dx.$$

$$I_n = \int_0^1 \ln(e^x) + \ln\left(\frac{1}{e^x}+e^{-x}\right).$$

Je suppose avoir trouvé l'intégration par parties pour continuer l'exercice et tâcherai d'y revenir à la fin de l'épreuve.

$$I_n = \ln(1+e^{-n}) + n\int_0^1 \frac{xe^{-nx}}{1+e^{-nx}}\,dx.$$

b) I_n est minorée par 0 donc $0 \leq I_n$ d'une part.

par ailleurs :

$$I_n = \ln(1+e^{-n}) + n\int_0^1 \frac{xe^{-nx}}{1+e^{nx}}\,dx.$$

~~procédant par récurrence~~ :

~~Initialisation~~ : pour $x \in [0;1]$

<u>On a</u> : $xe^{-nx} > 0$ d'une part

et : $1+e^{-nx} \geq 0$ d'autre part.

par décroissance de la fonction inverse.

$$\frac{1}{1+e^{-nx}} \leq 0 \quad \text{d'où} \quad \frac{xe^{-nx}}{1+e^{-nx}} \leq 0.$$

Prénom (s) HIBA

19.38 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 05 / 07

Numéro de table 005

par croissance de l'intégrale sur $[0;1]$.

$$\int_0^1 \frac{xe^{-nx}}{1+e^{nx}}\,dx \leq 0$$

alors que :

$$\int_0^1 xe^{-nx}\,dx \geq 0$$

D'où : $\ln(1+e^{-n}) + n\int_0^1 \frac{xe^{-nx}}{1+e^{-nx}}\,dx \leq \ln(1+e^{-n}) + n\int_0^1 xe^{-nx}\,dx$

d'où : $0 \leq I_n \leq \ln(1+e^{-n}) + n\int_0^1 xe^{-nx}\,dx$.

d) $\int_0^1 xe^{-nx}\,dx$.

D'une part : $(e^{-nx})' = (-nx)'\,e^{-nx} = -ne^{-nx}$.

Je procède par une intégration par parties.

$\int_0^1 xe^{-nx}\,dx =$

$u'(x) = e^{-nx}$ $\qquad u(x) = -\frac{1}{n}e^{-nx}$

$v(x) = x$ $\qquad v'(x) = 1$.

$$\int_0^1 xe^{-nx}\,dx = \left[-\frac{1}{n}e^{-nx}\times x\right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{1}{n}e^{-nx}\,dx.$$

$$= \left[-\frac{1}{n}e^{-n}\right] + \frac{1}{n}\int_0^1 e^{-nx}\,dx.$$

$$= \left[\frac{-e^{-n}}{n}\right] + \frac{1}{n}\left[-\frac{1}{n}e^{-nx}\right]_0^1$$

$$= \frac{-e^{-n}}{n} + \frac{1}{n}\left[-\frac{1}{n}e^{-n} + \frac{1}{n}\right] = \frac{-e^{-n}}{n} - \frac{1}{n^2}e^{-n} + \frac{1}{n^2}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.38 / 20

d'où $\int_0^1 xe^{-nx}\,dx = \frac{-e^{-n}}{n} + \frac{1-e^{-n}}{n^2}$

b) ~~$\lim_{n\to+\infty} In = \lim_{n\to+\infty} \frac{-e^{-n}}{}$~~

On a: $0 \leq In \leq \ln(1+e^{-n}) + n\int_0^1 xe^{-nx}\,dx$.

On a: $\lim_{n\to 0} 0 = 0$ d'une part

et $\lim_{n\to 0} \ln(1+e^{-n}) + n\left(\frac{-e^{-n}}{n} + \frac{1-e^{-n}}{n^2}\right)$

$= 0$

car:

$\lim_{n\to 0} 1+e^{-n} = 1$ et $\ln(1) = 0$

D'après le théorème d'encadrement :

$\lim_{n\to+\infty} In = 0$.

g) def gn :
if $x \in [0;1]$:
int . input : ('Donner n':)
for k in range (0 ; 2) :
gn = log [1 + exp^{k-nx}]
return gn

b) D'après le graph, la valeur approchée de I_n à 10^{-1} près est entre 0,8 et 0,85.

Exercice 3.

s est un réel strictement positif.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < s \\ \dfrac{2s^2}{x^3} & \text{si } x \geqslant s. \end{cases}$$

1) Vérifions que f est une densité de probabilité.

<u>La Continuité.</u>

si $x < s$ $f(x) = 0$, étant donné qu'elle est constante alors elle est continue.

si $x \geqslant s$ $f(x) = \dfrac{2s^2}{x^3}$; étant donné que c'est la division et d'une constante alors elle est continue.

$\Rightarrow$ On conclut que f est continue sauf peut être en s.

<u>La positivité.</u>

si $x < s$ $f(x) = 0 \geqslant 0$, donc positive.

si $x \geqslant s$ $f(x) = \dfrac{2s^2}{x^3} \geqslant 0$

<u>car:</u> on a s est strictement positif

donc $2s^2 \geqslant 0$

et on a $x \geqslant s$ donc $x \geqslant 0$ d'où $x^3 \geqslant 0$.

Donc f est positive sur $\mathbb{R}$.

<u>Le calcul de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$</u>

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{s} 0\,dx + \int_{s}^{+\infty} \frac{2s^2}{x^3}\,dx.$$ par linéarité de l'intégrale.

$$= 2s^2 \int_{s}^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx.$$

$$= \cancel{2s^2 \int_{s}^{+\infty} x^{-3}\,dx \Leftrightarrow 2s^2 \int_{s}^{+\infty} \left(\frac{x^{-2}}{-2}\right)'\,dx}.$$

$$\cancel{2s^2 \int_0^{+\infty} \left(\frac{x^{-2}}{-2}\right)' dx = 2s^2 \left[\frac{x^{-2}}{-2} \right]_0^A}$$

$$\cancel{= 2s^2 \left[\frac{A^{-2}}{-2} \right]}.$$

$$\cancel{\lim_{A \to +\infty} 2s^2 \left[\frac{A^{-2}}{-2} \right] = \lim_{A \to +\infty} s^2 A^{-2}} =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 2s^2 \int_s^{+\infty} \frac{1}{x^3}\, dx = 2s^2 \int_s^{+\infty} \left(\frac{x^{-2}}{-2} \right)' dx.$$

$$= 2s^2 \left[\frac{x^{-2}}{-2} \right]_s^A$$

$$= 2s^2 \left[\frac{A^{-2}}{-2} - \frac{S^{-2}}{-2} \right].$$

$$= 2s^2 \left(\frac{A^{-2} - S^{-2}}{-2} \right).$$

$$= s^2 \left(-(A^{-2} - S^{-2}) \right).$$

Après calcul de la $\lim_{x \to +\infty}$

On a: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$.

Les 3 conditions de densité sont donc vérifiées, d'où f est une densité de probabilité.

S est une variable aléatoire à densité f.

2) Déterminons la fonction de répartition.

Si $x < s$

$$F_S(x) = P(S \geq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = 0.$$

Si $x \geq s$.

$$F_S(x) = \int_{-\infty}^{s} f(t)\, dt + \int_s^x f(t)\, dt$$

$$= F_S(s) + \int_s^x \frac{2s^2}{x^3}\, dt.$$

petits !!

Prénom (s) HIBA

19.38 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 06 / 07

Numéro de table 005

$= 0 + 2s^2 \int_0^x \frac{1}{\cancel{t}3} \, dt.$

$= 2s^2 \left[\frac{\cancel{t}^{-2}}{-2} \right]_0^x$

$= 2s^2 \left[\frac{x^{-2}}{-2} \right] = - s^2 \times x^{-2} = 1 - s^2 \times \frac{1}{x^2} = 1 - \left(\frac{s}{x}\right)^2$

D'où pour $x \geqslant s$

$F_s(x) = 1 - \left(\frac{s}{x}\right)^2.$

On obtient : $F_s(x) \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant s \\ 1 - \left(\frac{s}{x}\right)^2 & \text{sinon.} \end{cases}$

3) Tableau de variation de F sur $[s, +\infty[$.

$F(x) = 1 - \left(\frac{s}{x}\right)^2$ sur $[s ; +\infty[$

$F'(x) = \frac{2s^2}{x^3} \geqslant 0$ (car c'est la fonction densité d'après le cours).

D'où :

avec : $\lim_{s \to 0} F(x) = 0$ $\lim_{s \to +\infty} F(x) = 1.$

NE RIEN ÉCRIRE

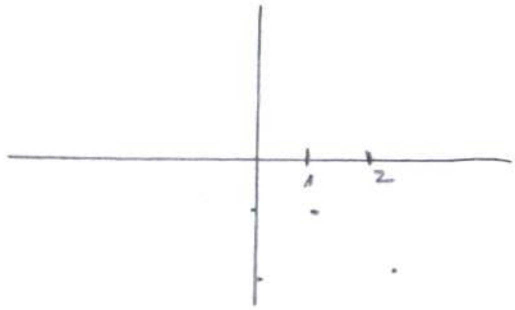
DANS CE CADRE

19.38 / 20

$F(x) = 1 - \left(\frac{s}{x}\right)^{\alpha} \iff = 1 - \frac{s^2}{x^2}$

pour $x = 1$ $y = 1 - s^{2}$

pour $x = 2$ $y = 1 - \frac{s^2}{4}$



4) pour tout $y \in [0 ; 1[$ $G(y) = s\sqrt{\frac{1}{1-y}}$

a) → $F(x)$ est strictement croissante sur $[s ; +\infty[$.
→ $F(x)$ est continue sur $[s ; +\infty[$ car elle est dérivable
→ $F([s ; +\infty[) = [0 ; 1[$.
Donc F est une bijection de $[s ; +\infty[$ vers $[0 ; 1[$.

b) On a $G(y) = s\sqrt{\frac{1}{1-y}}$

pour tout $0 \leq y < 1$

$-1 < -y < 0$

$0 < 1 - y < 1$.

par décroissance de la fonction inverse.

$0 < \frac{1}{1-y} < 1$ (dans ce cas non ne change).

$0 < s\sqrt{\frac{1}{1-y}} < s$

Et puisque F est une bijection de $[s\,;+\infty[$ vers $[0\,;1[$.

Alors : $G(y) \in [s\,;+\infty[$ pour tout $y \in [0\,;1[$.

c) $F(G(y)) = 1 - \left(\frac{s}{G(y)}\right)^2$ (on remplace sous cette forme en tenant compte de la bijection).

$$= 1 - \frac{(s^2)}{\left(s\sqrt{\frac{1}{1-y}}\right)^2}$$

$$= 1 - \frac{s^2}{s^2 \times \frac{1}{1-y}}$$

$$= 1 - \frac{s^2}{\frac{s^2}{1-y}} = 1 - \left(s^2 \times \frac{1-y}{s^2}\right)$$

$$= 1 - 1 + y = y.$$

En effet, $F(G(y) = y)$.

5) ~~U y U~~ U suit la loi uniforme sur $[0\,;1[$ et V la variable aléatoire égal à $G(U)$.

a) $\begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{x^2} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

si $x \geq s$.

b) $P(V \leq x) = P(G(U) \leq F(x)$ ~~$\leq (\ldots)$~~ d'après question 4.

Or $F(G(U) = U)$ d'après 4c.

donc : $P(G(U) \leq x) = P(U \leq F(x))$

Or : U suit une loi uniforme.

d'où $P(U \leq F(x)) = F(x)$

Si $x \leq s$.

$P(V \leq x) = P(G(U) \leq x) = P(G \leq x)$ impossible.

donc $= 0$.

On a :

$F_V(x) = 0$ si $x < s$

et $F_V(x) = F(x)$ si $x \geq s$

Tout comme S, donc V suit la même loi que S

6) import numpy.random as rd

```
def S(s):
    U = rd.random()
    S = U
    return S.
```

7) démontrons que S admet une espérance.

S est une variable aléatoire à densité f.

sous réserve de convergence.

$E(S) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{s} 0\,dx + \int_{s}^{+\infty} x \times \frac{2s^2}{x^3}$ par linéarité.

$E(S) = \int_{s}^{+\infty} \frac{2s^2}{x^2} = \cancel{2s^2 \int_{s}^{+\infty} \left(x^{-1}\right)' dx}$.

$E(S) = 2s^2 \int_{s}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = -2s^2 \int_{s}^{+\infty} \left(-\frac{1}{x}\right)' dx$

$= -2s^2 \left[-\frac{1}{x}\right]_{s}^{+\infty}$.

$= -2s^2 \left[-\frac{1}{x}\right]_{s}^{A} = -2s^2 \left[-\frac{1}{A} + \frac{1}{s}\right]$.

$= +\frac{2s^2}{A} + 2s$.

$\lim_{A \to +\infty} \frac{2s^2}{A} + 2s = 2s$.

D'où $E(S) = 2s$

8) Déterminons le moment d'ordre 2.

$E(S^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx$.

$E(S^2) = \int_{-\infty}^{s} 0\,dx + \int_{s}^{+\infty} x^2 \times \frac{2s^2}{x^3}$

$E(S^2) = 2s^2 \int_{s}^{+\infty} \frac{1}{x} = 2s^2 \left[\ln(x)\right]_{s}^{A}$

$= 2s^2 \left[\ln(A) - \ln(s)\right]$.

$\lim_{A \to +\infty} 2s^2 \left[\ln(A) - \ln(s)\right] = 2s^2 \ln\left(\frac{A}{s}\right) = +\infty$

Prénom (s) HIBA

19.38 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 07 / 07

Numéro de table 005

Puisque la limite n'est pas finie alors S n'admet pas de moment d'ordre deux ($E(S)^2$) et donc pas de variance.

9) $P\left(S \geqslant \frac{3}{2}s\right) = P\left(\frac{2}{3}S \geqslant s\right)$

En utilisant la fonction de répartition de S où $F(s) = 1 - \left(\frac{s}{x}\right)^2$;
alors $p = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$.

On étudie le cas de n salariés distincts.

10) Nn : nombre des salariés qui ont un salaire d'au moins $\frac{3}{2}s$.

~~$(N_n(\Omega) = [\![1, n]\!])$~~

$N_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$

Nn comptabilise le nombre de ces n salariés qui ont un salaire horaire d'au moins $\frac{3}{2}s$ (indépendamment et identiquement)

$N_n \hookrightarrow Bi\left(n ; \frac{4}{9}\right)$.

11) $E(N_n) = np = n \times \frac{4}{9}$ ~~$E(N_n) =$~~

$V(N_n) = n \times p \times q$ (d'après le cours).

$V(N_n) = n \times p \times (1-p)$

$V(N_n) = n \times \frac{4}{9} \times \frac{5}{9} = \frac{20n}{81}$ ce qu'il fallait montrer.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.38 / 20

12) ~~P1~~

Au plus 2 employés parmi les n aient un salaire horaire d'au moins $\frac{3}{2}$ s signifie (Je note cette événement B).

$P(B) = P(N_0) \cup P(N_1) \cup P(N_2)$.

~~aucun N_0 est~~

Avec $[N_0]$: aucun employé n'a reçu un salaire horaire d'au moins $\frac{3}{2}$ s

$[N_1]$: un seul employé a reçu un salaire horaire d'au moins $\frac{3}{2}$ s

$[N_2]$: 2 employés ont reçu un salaire horaire d'au moins $\frac{3}{2}$ s.

On sait aussi d'après le cours que ~~devoir~~ pour la loi Binomiale :

$$P(N = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{4}{9}\right)^{k}\left(\frac{5}{9}\right)^{n-k}$$

d'où $P(N=0) = \binom{n}{0}\left(\frac{4}{9}\right)^0\left(\frac{5}{9}\right)^n = \left(\frac{5}{9}\right)^n$

$P(N=1) = \binom{n}{1}\left(\frac{4}{9}\right)\left(\frac{5}{9}\right)^{n-1} = n\left(\frac{4}{9}\right)\left(\frac{5}{9}\right)^{n-1}$

$P(N=2) = \binom{n}{2}\left(\frac{4}{9}\right)^2\left(\frac{5}{9}\right)^{n-2} = \frac{n!}{2!(n-2)!}\left(\frac{4}{9}\right)\left(\frac{5}{9}\right)^{n-2}$.

D'où $P(B) = \left(\frac{5}{9}\right)^n\left[n\left(\frac{4}{9}\right)\left(\frac{5}{9}\right)^{-1} + \frac{n!}{2!(n-2)!}\left(\frac{4}{9}\right)\left(\frac{5}{9}\right)^{n-4}\right]$.

13) $M_n = \frac{1}{2n} (S_1 + S_2 \dots S_n)$.

par linéarité de l'espérance.

$E(M_n) = \frac{1}{2n} E(\cancel{S}_n) = \frac{1}{2n} \times n \times \frac{4}{9} = \frac{2}{9}$.

b)