PREPA Option Maths appliquées

Mathématiques appliqués Mathématiques

RAPHAËL

Note de délibération : 19.02 / 20

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s) RAPHAEL

19.02 / 20

Signature

Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 01 / 04

Commencez à composer dès la première page...

Exercice 1 :

1. $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])$

D'où $E(X) = \frac{n+1}{2}$ $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$

2. $Y(\Omega) = [\![1, n]\!]$

En effet, selon la valeur de la boule tirée lors du premier tirage (entre 1 et n), Y peut prendre n'importe quelle valeur entre 1 et le numéro de cette boule.

3. Soit $k \in [\![1, n]\!]$

a. En supposant l'événement $(X=k)$ réalisé, il y a dans la seconde urne 1 boule 1, 2 boules 2, ..., k boules k soit $\sum_{i=1}^{k} i$ boules. On a $\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$

D'où : il y a $\frac{k(k+1)}{2}$ boules dans la seconde urne.

b. Soit $j \leq k$:

$P_{(X=k)}(Y=j) = \frac{j}{\frac{k(k+1)}{2}} = \frac{2j}{k(k+1)}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.02 / 20

Avec : - j boules numérotées j dans l'urne
- et $\frac{k(k+1)}{2}$ boules au total dans cette urne

Soit $j \geqslant k+1$:

On a alors $P_{(X=k)}(Y=j) = 0$ car lors du tirage dans la seconde urne, il n'y pas de boule numérotée j (car $j \geqslant k+1$).

Ainsi la probabilité de tirer une boule j est nulle.

4.a. $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{k(k+1)} = \frac{a(k+1)+bk}{k(k+1)}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{k(k+1)} = \frac{(a+b)k+a(1)}{k(k+1)}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (a+b) = 0 \\ a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 \\ a = 1 \end{cases}$

On a $a = 1$ et $b = -1$

b. Avec le système complet d'événements $(X=k)_{k \in [1,n]}$ et la formule des probabilités totales, on a :

$$\forall j \in [1,n], P(Y=j) = \sum_{k \in X(\Omega)} P((X=k) \cap (Y=j))$$

$$= \sum_{k=1}^{n} P(X=k) P_{(X=k)}(Y=j)$$

$$= \cancel{\sum_{k=1}} \sum_{k=j}^{n} P(X=k)\, P_{(X=k)}(Y=j) \quad \text{car } P_{(X=k)}(Y=j)=0 \text{ si } j \geq k+1$$

$$= \sum_{k=j}^{n} \frac{1}{n} \times \frac{2j}{k(k+1)} \quad (\text{car } X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!]))$$

$$= \frac{2j}{n} \sum_{k=j}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

$$= \frac{2j}{n} \left(\sum_{k=j}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$= \frac{2j}{n} \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= \frac{2}{n} - \frac{2j}{(n+1)n}$$

$$= \frac{2(n+1)-2j}{n(n+1)} = \frac{2(n+1-j)}{n(n+1)}$$

5. Y est une variable aléatoire à l'univers fini, elle admet donc une espérance et :

$$E(Y) = \sum_{j=1}^{n} j\, P(Y=j) = \sum_{j=1}^{n} j \frac{2(n+1-j)}{n(n+1)}$$

$$= \frac{2(n+1)}{n(n+1)} \sum_{j=1}^{n} j - \frac{2}{n(n+1)} \sum_{j=1}^{n} j^2$$

$$= \frac{2}{n} \frac{n(n+1)}{2} - \frac{2}{n(n+1)} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= n+1 - \frac{2n+1}{3}$$

$$= \frac{3n+3}{3} - \frac{2n+1}{3} = \frac{n+2}{3}$$

6. Soit $(k,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $j \geq k+1$

On a alors :

$P((X=k) \cap (Y=j)) = 0$ (question 3.b.)

et $P(X=k)P(Y=j) = \frac{1}{n}\,\frac{2(n+1-j)}{n(n+1)} \neq 0$

Ainsi $P((X=k)\cap(Y=j)) \neq P(X=k)P(Y=j)$ d'où :

X et Y ne sont pas indépendantes.

7.a. $E(XY) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} kj\, P((X=k)\cap(Y=j))$

$= \sum_{k=1}^{n} k \sum_{j=1}^{k} j\, P(X=k)\, P_{(X=k)}(Y=j)$ car $P((X=k)\cap(Y=j))=0$ si $j \geq k+1$

$= \sum_{k=1}^{n} k \times \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{k} \frac{2j^2}{k(k+1)}$

$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \times 2 \times \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

$= \frac{1}{3n} \sum_{k=1}^{n} k(2k+1)$

$= \frac{1}{3n}\left(2\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right.$

$= \frac{1}{3}\left(\frac{2(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{3(n+1)}{6}\right)$

$= \frac{(n+1)(4n+2+}{18}$

b. D'après la formule de Koenig Huygens :

$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

$= \frac{(n+1)(4n+5)}{18} - \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3}$

$= \frac{(n+1)(4n+5)}{18} - \frac{3(n+1)(n+2)}{18}$

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s) RAPHAEL

19.02 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Signature

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 02 / 04

Commencez à composer dès la première page...

$$= \frac{(n+1)(4n+5-3n-6)}{18}$$

$$= \frac{(n+1)(n-1)}{18} = \frac{n^2-1}{18}$$

8. a.
```
def seconde_urne(k):
    L=[]
    for i in range(1,k+1):
        for j in range i:
            L.append(i)
    return(L)
```

b.
```
import numpy.random as rd
def simul_XY(n):
    X=rd.randint(1,n+1)
    urne2= seconde_urne(X)
    nb=len(urne2)
    i=rd.randint(0,nb)
    Y=urne2[i]
    return(X,Y)
```

c) Les valeurs des éléments de la liste renvoyée par le programme suivant permettent d'estimer la probabilité qu'a la variable Y de prendre chacune des valeurs de son univers. En effet,

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.02 / 20

le programme construit la liste des fréquences, et comme l'échantillon étudié est conséquent (10 000 réalisations), les fréquences de chaque valeur x rapprochent des probabilités.

9.a Étant donné que le nombre de réalisations est important, la loi faible des grands nombres nous permet de conjecturer que le point moyen de ce nuage de points est proche de $E(XY) = \frac{(n+1)(4n+5)}{18}$

$$= \frac{21 \times 85}{18} = \frac{7 \times 85}{6}$$

b.

Exercice 2 :

1. a) f est dérivable sur $]0,+\infty[$ car :

$x \mapsto e^{\frac{x}{2}}$ est dérivable sur l'intervalle

$x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable et ne s'annule pas sur l'intervalle.

D'où f est dérivable comme quotient de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas.

De plus, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \dfrac{\sqrt{x} \times \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} - e^{\frac{x}{2}} \times \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}$

$$= \frac{\dfrac{x e^{\frac{x}{2}} - e^{\frac{x}{2}}}{2\sqrt{x}}}{x}$$

$$= \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}} \times \frac{x-1}{2x} = f(x)\,\frac{x-1}{2x}$$

b.

x	0		1		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
variations de $f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$e^{\frac{1}{2}}$	$\nearrow$	$+\infty$

Avec :

$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}} = +\infty$

car $e^{\frac{x}{2}} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 1$ et $\sqrt{x} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 0$

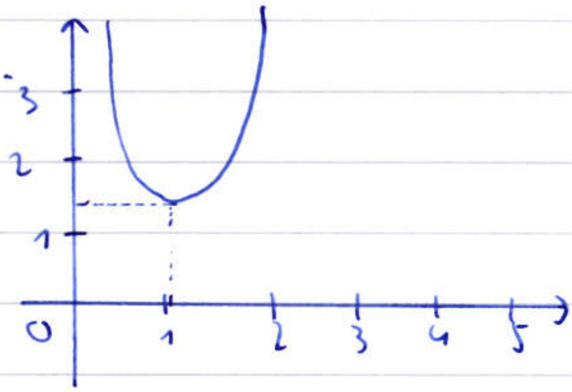
(pas d'indétermination)

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}} = +\infty$ par croissance comparée

On précise que comme f est positive sur $\mathbb{R}_+^*$ de même que $x \mapsto 2x$,

f' est du signe de $x-1$

c.



d. On étudie d'abord l'intervalle $]0,1[$:

* f est continue sur $]0,1[$
* f est strictement décroissante sur $]0,1[$
* $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ et $f(1) = e^{\frac{1}{2}}$

f réalise alors une bijection de $]0,1[$ dans $]e^{\frac{1}{2}}, +\infty[$

Or comme $n \in]e^{\frac{1}{2}}, +\infty[$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires : $\exists!\, u_n \in]0,1[$ tel que $f(u_n) = n$

Sur l'intervalle $]1,+\infty[$:
* f est strictement croissante
* f est continue
* $\lim_{x\to 1^+} f(x) = e^{\frac{1}{2}}$ et $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

f réalise ainsi une bijection de $]1,+\infty[$ dans $]e^{1/2},+\infty[$, d'où, d'après le théorème des valeurs intermédiaires :
$\exists!\, v_n \in]1,+\infty[$ tel que $f(v_n) = n$ (car $n \in]e^{\frac{1}{2}},+\infty[$)

On précise que comme $2 < e < 3$ (énoncé), on a $\sqrt{2} < \sqrt{e} < \sqrt{3}$ par croissance de $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$

D'où $e^{\frac{1}{2}} < \sqrt{3} < 2 \leq n$ soit $e^{\frac{1}{2}} < n$

On a finalement une unique solution u_n sur $]0,1[$, une unique solution v_n sur $]1,+\infty[$. (de plus 1 n'est pas solution car $e^{\frac{1}{2}} \neq n$)
On a bien deux solutions à l'équation $f(x) = n$ tel que
$0 < u_n < 1 < v_n$

2a. $\forall n \geq 2$, on a : $1 < n < n+1$
donc $1 < f(v_n) < f(v_{n+1})$ par croissance de f sur $\mathbb{R}_+^*$
d'où $v_n < v_{n+1}$ par croissance de f sur $]1,+\infty[$ car v_n et $v_{n+1} > 1$
Ainsi $(v_n)_{n\geq 2}$ est croissante.

b. Supposons que v_n converge vers une limite $\ell \geq 0$
On aurait alors : $f(v_n) = n$
donc $f(v_n) - n = 0$
donc $\lim_{n\to +\infty} (f(v_n) - n) = 0$

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s) RAPHAEL

19.02 / 20

Signature

Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 03 / 04

Commencez à composer dès la première page...

donc $\frac{e^{\frac{2}{2}}}{\sqrt{2}} - \lim_{n \to +\infty}(n) = 0$

Or cette inégalité est fausse, car $n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$: c'est absurde !!
Ainsi comme la suite v_n est strictement croissante, elle diverge vers $+\infty$.

3. a. On a $n < n+1$
d'où $f(u_n) < f(u_{n+1})$
donc $u_n > u_{n+1}$ car $(u_n, u_{n+1}) \in]0,1[^2$, et f est décroissante sur $]0,1[$.

Ainsi $(u_n)_{n \geqslant 2}$ est décroissante

b. Comme $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $0 < u_n < 1$, la suite (u_n) est minorée

Ainsi $(u_n)_{n \geqslant 2}$ est décroissante et minorée : selon le théorème de la limite monotone, elle converge.

c.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.02 / 20

d.

On a $\lim_{n\to+\infty}(n^2 u_n) = 1 \iff \lim \left(\frac{u_n}{\frac{1}{n^2}}\right) = 1$

On a alors : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$

4.a.
```
import numpy as np
def approx_u(n, eps):
    a=0
    b=1
    while b-a > eps:
        c=(a+b)/2
        if np.exp(c/2)/np.sqrt(c) < n:
            b=c
        else:
            a=c
    return ((a+b) / 2)
```
b.
```
def sp(N, eps):
    s=0
    for k in range(2, N+1):
        S=S+approx_u(k)
    return S
```

Exercice 3 :

Partie 1 :

1. a. Soit $(\alpha, \beta, \gamma, t) \in \mathbb{R}^4$

$\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 + t u_4 = 0 \iff \begin{cases} -\alpha + t = 0 \\ \alpha - \beta + \gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + t = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} \alpha = t \\ \alpha = -t \\ \alpha - \beta + \gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} \alpha = t = 0 \\ \beta = \gamma \\ \beta = -\gamma \end{cases}$

$\iff \alpha = \beta = \gamma = t = 0$

Ainsi, B est libre dans $\mathbb{R}^4$, elle est de plus de cardinal $4 = \dim(\mathbb{R}^4)$. D'où B est une base de $\mathbb{R}^4$

b. On a : $f(u_1) = -f(e_1) + f(e_2) + f(e_4)$ car f est linéaire

$= -(1,1,1,1) + (0,1,1,0) + (1,0,0,1)$

$= (0,0,0,0)$

$f(u_2) = -f(e_2) + f(e_3)$

$= (0,-1,-1,0) + (0,1,1,0) = (0,0,0,0)$

$f(u_3) = f(e_2) + f(e_3)$

$= (0,1,1,0) + (0,1,1,0) = 2u_3$

$f(u_4) = f(e_1) + f(e_4)$

$= (2,1,1,2)$
$= 2u_4 + u_3$

D'où $Mat_B(f) = \begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&2&1 \\ 0&0&0&2 \end{pmatrix}$

c. D'après la formule du changement de base, on a :

$Mat_{\mathcal{E}}(f) = P_{\mathcal{E}B}\, Mat_B(f) (P_{\mathcal{E}B})^{-1}$

$\Leftrightarrow A = P_{\mathcal{E}B}\ Mat_B(f)\ (P_{\mathcal{E}B})^{-1}$

On a alors $T = Mat_B(f)$ (T est bien triangulaire)
et $P = P_{\mathcal{E}B} = \begin{pmatrix} -1&0&0&1 \\ 1&-1&1&0 \\ 0&1&1&0 \\ 1&0&0&1 \end{pmatrix}$

2. a. $A^2 = \begin{pmatrix} 1&0&0&1 \\ 1&1&1&0 \\ 1&1&1&0 \\ 1&0&0&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&0&0&1 \\ 1&1&1&0 \\ 1&1&1&0 \\ 1&0&0&1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2&0&0&2 \\ 3&2&2&1 \\ 3&2&2&1 \\ 2&0&0&2 \end{pmatrix}$

$A^3 = \begin{pmatrix} 1&0&0&1 \\ 1&1&1&0 \\ 1&1&1&0 \\ 1&0&0&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2&0&0&2 \\ 3&2&2&1 \\ 3&2&2&1 \\ 2&0&0&2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4&0&0&4 \\ 8&4&4&4 \\ 8&4&4&4 \\ 4&0&0&4 \end{pmatrix}$

On a bien $4A^2 - 4A = \begin{pmatrix} 8&0&0&8 \\ 12&8&8&4 \\ 12&8&8&4 \\ 8&0&0&8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4&0&0&4 \\ 4&4&4&0 \\ 4&4&4&0 \\ 4&0&0&4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4&0&0&4 \\ 8&4&4&4 \\ 8&4&4&4 \\ 4&0&0&4 \end{pmatrix} = A^3$

b. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose H_n : "$\exists (a_n, b_n) \in \mathbb{R}$ tels que $A^n = a_n A^2 + b_n A$"

cas initial : $n=1$: $A^1 = 0 \times A^2 + 1 \times A$.
H_1 est vraie et on a $a_1 = 0$ et $b_1 = 1$

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s) RAPHAEL

19.02 / 20

Signature

Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 04 / 04

Commencez à composer dès la première page...

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que H_n est vraie. Montrons dès lors que H_{n+1} l'est également.

$A^n = a_n A^2 + b_n A$ d'après H_n

donc $A^{n+1} = A(a_n A^2 + b_n A)$

$\Leftrightarrow A^{n+1} = a_n A^3 + b_n A^2$

$\Leftrightarrow A^{n+1} = a_n(4A^2 - 4A) + b_n A^2$ d'après la question 2.a.

$\Leftrightarrow A^{n+1} = (4a_n + b_n)A^2 - 4a_n A$

On a bien ici $a_{n+1} = 4a_n + b_n$

et $b_{n+1} = -4a_n$

Ainsi H_{n+1} est vraie.

Le principe de récurrence permet de conclure :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists (a_n, b_n)$ tel que $A^n = a_n A^2 + b_n A$

3.a. D'après la question 2.b. on a

$a_{n+1} = 4a_n + b_n$

donc $a_{n+2} = 4a_{n+1} + b_{n+1}$

$= 4a_{n+1} - 4a_n$

b. On reconnaît $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

On résout $r^2 = 4r - 4$

$\Leftrightarrow r^2 - 4r + 4 = 0$

On a $\Delta = 16 - 4\times 4 = 0$

Cette équation admet une unique solution, et on remarque que 2 est solution

Ainsi $\exists (a,b) \in \mathbb{R}$ tel que $a_n = (an+b)2^n$

On a alors : $\begin{cases} 2a+2b = a_1 = 0 \\ 8a+4b = a_2 = 4 \end{cases}$

$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2a+2b = 0 \\ -4b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = (n-1)2^n$

c. Comme $b_{n+1} = -4a_n$, on a $b_{n+1} = -4(n-1)2^n$
$(-1)(n-1)2^{n+2}$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = -4(n-2)2^{n-1}$

d. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = (n-1)2^n A^2 - 4(n-2)2^{n-1} A$

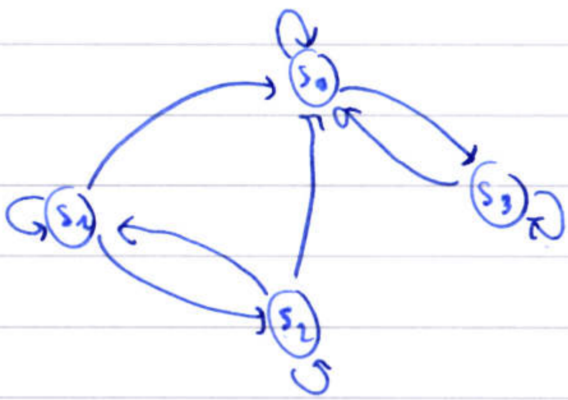
$$= \begin{pmatrix} 2^{n+1}(n-1) & 0 & 0 & 2^{n+1}(n-1) \\ 3\times 2^n(n-1) & 2^{n+1}(n-1) & 2^{n+1}(n-1) & 2^n(n-1) \\ 3\times 2^n(n-1) & 2^{n+1}(n-1) & 2^{n+1}(n-1) & 2^n(n-1) \\ 2^{n+1}(n-1) & 0 & 0 & 2^{n+1}(n-1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4(n-2)2^{n-1} & 0 & 0 & -4(n-2)2^{n-1} \\ -4(n-2)2^{n-1} & -4(n-2)2^{n-1} & -4(n-2)2^{n-1} & \end{pmatrix}$$

Partie 2 :

5 a. Soit les a_{ij} les coefficients de la matrice d'adjacence.
Alors chaque a_{ij} prend la valeur 1, s'il existe un chemin allant du sommet i vers le sommet j, il prend sinon la valeur 0.

b. Le coefficient situé à la i-ème ligne et j-ième colonne de la matrice M^n indique le nombre de chemins de longueur n allant du sommet i vers le sommet j

6. a.



b. Ce graphe est non connexe car on ne peut pas trouver de chaîne fermée passant par tous les sommets.

c. En consultant la matrice A^n, on voit que le coefficient de la 4-ème ligne première colonne est 2^{n-1}
Il y a 2^{n-1} chemins de longueur n de S_3 vers S_0

```python
import numpy as np
```

7.
```python
def matrice_vers_liste(A)
    p = np.shape(A)
    L = [[] for k in range(p)]
    for i in range(p):
        for j in range(p):
            if A[i,j] == 1:
                L[i].append(j)
    return L
```

8. a. La liste distance renvoyée est :

[1,1,1,2]

b.
```python
def parcours(L, i0):
    p = len(L)
    distances = [p for k in range(p)]
    distances[i0] = 0
    a_explorer = [1)
    marques = [1]
```