PREPA Option Maths approfondies

Mathématiques approfondies Mathématiques

LENNY

Note de délibération : 19.53 / 20

Prénom (s) LENNY

19.53 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques approfondies Sujet ☐ 1 ou ☒ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction. Feuille 01 / 08

Numéro de table 007

Exercice 1

Partie 1

1a)

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1b)

AB et BA sont deux matrices triangulaires supérieures donc leur spectre est composé de leurs coefficients diagonaux.

Ainsi, $Sp(AB) = Sp(BA) = \{-1, 2\}$

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.53 / 20

$$AB X = -X$$

$$\iff \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = -x_1 \\ -x_2 = -x_2 \end{cases}$$

$$\iff x_1 = -x_2$$

Ainsi en notant, $\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $E_\lambda(M)$ le sous espace propre de M associé à la valeur propre λ,

il vient $\underline{E_{-1}(AB) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$

De même,

$$AB X = 2X$$

$$\iff \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 2x_1 \\ -x_2 = 2x_2 \end{cases}$$

$$\iff x_2 = 0$$

Ainsi, $\underline{E_2(AB) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)}$

De même,

$$BAX = -X$$

$$\iff \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} -x_1 + 3x_2 = -x_1 \\ 2x_2 = -x_2 \end{cases}$$

$$\iff x_2 = 0$$

Ainsi, $\underline{E_{-1}(BA) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)}$

Enfin, $BAX = 2X$

$$\iff \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} -x_1 + 3x_2 = 2x_1 \\ 2x_2 = 2x_2 \end{cases}$$

$$\iff x_1 = x_2$$

Ainsi, $\underline{E_2(BA) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$.

2) ~~Supposons que~~ $\cancel{BX = 0}$.

~~Alors~~ $\cancel{ABX = A0 = 0}$

~~Or $X \neq 0$ car X est un vecteur propre~~
~~Donc $0 \in Sp(AB)$. Cela étant absurde~~
~~d'après la question (1.b), on en déduit que~~
~~$BX \neq 0$~~

2b)

$$BABX = B.(ABX) \quad \text{par associativité}$$
$$= B.(\lambda X) \quad \text{car } X \in E_\lambda(AB)$$
$$= \lambda BX$$

or d'après (2.a), $BX \neq 0$.

Donc BX est un vecteur propre de BA associé à la valeur propre λ.

2a) Supposons que $BX = 0$

Alors $ABX = 0$
donc $\lambda X = 0$ car $X \in E_\lambda(AB)$
Or $\lambda \neq 0$ et $X \neq 0$
Donc cela est absurde.

Bilan: $BX \neq 0$

3)a) Supposons que $BX = 0$

Alors $B^{-1}BX = B^{-1}0 = 0$
i.e : $X = 0$ or X est un vecteur propre
Donc ceci est absurde Donc $BX \neq 0$

Prénom (s) LENNY

19.53 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques approfondies Sujet ☐ 1 ou ☒ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction. Feuille 02 / 08

Numéro de table 007

On $BABX = B(ABX)$
$= B(0.X)$ car $X \in E_0(AB)$
$= 0 = 0.BX$

Or $BX \neq 0$ donc BX est un vecteur propre de BA associé à la valeur propre 0.

Donc $\underline{0 \in Sp(BA)}$

3b) Notons f et g les deux endomorphismes de E canoniquement associés respectivement à A et B. En ayant noté E un espace vectoriel de dimension n.

Alors $\underline{rg(BA) = rg(g \circ f)}$ $(*)$

Or il est clair que $rg(g \circ f) \leq rg(g)$ $(**)$

En effet Soit $x \in Im(g \circ f)$,
alors $\exists y \in E \mid g \circ f(y) = x$
Donc $\exists y \in E \mid g(f(y)) = x$.
Donc $x \in Im(g)$
Ainsi $\underline{Im(g \circ f) \subset Im(g)}$

D'où $(**)$.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.53 / 20

Dès lors, avec (*) et (**),

$rg(BA) = rg(g \circ f) \leq rg(g) = rg(B) < n$ car B n'est pas inversible.

Donc $rg(BA) < n$

Donc $BA \notin GL_n(\mathbb{R})$

Donc $\ker(BA) = E_0(BA) \neq \{0\}$

Donc $0 \in Sp(BA)$

4) En compilant les résultats obtenus en questions (2) et (3), il vient que $\forall \lambda \in Sp(AB),\ \lambda \in Sp(BA)$ Donc $Sp(AB) \subset Sp(BA)$

En effet, en (2) on montre que ceci est vrai pour les valeurs propres non nulles, et en (3) on le montre pour les valeurs propres nulles, c'est à dire pour 0.

Dès lors, on pourrait, avec une démarche similaire montrer la même chose en inversant les rôles que jouent A et B, puisque ces derniers sont "symétriques".

Donc $Sp(BA) \subset Sp(AB)$

Ainsi, $Sp(AB) = Sp(BA)$

5)

La question 1) est un contre-exemple : on a montré que, par exemple,
$\exists (A,B) \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^2 \mid E_{-1}(AB) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \neq \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = E_{-1}(BA)$

Donc les matrices AB et BA n'ont pas nécessairement les mêmes sous-espaces propres

Partie 2

6) a) Par hypothèse, le polynôme

$P = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k X^k$ est non nul (car $\exists i \in [\![0, n-1]\!] \mid \alpha_i \neq 0$)

et est annulateur de A.

Or $\deg(P) \leq n-1$

Donc $\exists Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \setminus \{0\} \mid Q(A) = 0$.

6b) Soit $i \in [\![1, n]\!]$.
Soit X un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_i.

Alors on a par hypothèse
$Q(A)X = 0$
donc $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^k X = 0$

or $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $A^k X = A \cdots A X$
$= \lambda_i^k X$

Donc $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \lambda_i^k X = 0$

Donc $Q(\lambda_i) X = 0$ or $X \neq 0$

Donc $Q(\lambda_i) = 0$.

Ceci étant vrai pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,
on en déduit que
$\forall i \in [\![1, n]\!]$, λ_i est racine de Q.
or $\deg(Q) = n-1 < n$ et admet n racines
distinctes.
Donc Q est nul(*) On a alors une
contradiction avec (1.a)

(*) Donc tous les $(\alpha_i)_{i \in [\![0, n-1]\!]}$ sont nuls

6)c). en 6(a) et 6(b) on
démontre que
$\forall (\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$, $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^k = 0$

$\Rightarrow \forall k \in [\![0, n-1]\!], \alpha_k = 0$

Donc la famille $(I_n, \dots, A^{n-1})$ est libre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

7a) $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et admet n valeurs
propres distinctes donc
$\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\dim(E_{\lambda_i}(A)) = 1$

Car $\sum_{k=1}^{n} \dim(E_{\lambda_k}(A)) \leq n$ et $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\dim E_{\lambda_k}(A) \geq 1$

Donc comme $X \in E_\lambda(A)$. et que $X \neq 0$.
Alors (X) est une base de $E_\lambda(A)$.
autrement dit, $E_\lambda(A) = \mathrm{Vect}(X)$

Prénom (s) LENNY

19.53 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques approfondies Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction. Feuille 03 / 08

Numéro de table 007

7 b)

D'une part $BAX = \lambda BX$ car $X \in E_\lambda(A)$
D'autre part $BAX = ABX$ car $AB = BA$.

7 c) Donc d'après (7.b),

$ABX = \lambda BX$

Donc $BX \in E_\lambda(A)$
Donc d'après 7.a), $BX \in \text{Vect}(X)$.
~~BX~~

8) D'après 7), $\forall \lambda \in Sp(A)$,
$\forall X \in E_\lambda(A) \setminus \{0\}, BX \in \text{Vect}(X)$.

Donc $\forall \lambda \in Sp(A), \forall X \in E_\lambda(A) \setminus \{0\}, \exists \alpha \in \mathbb{R} \mid BX = \alpha X$
Donc tout vecteur propre de A est vecteur propre de B.

9) Comme A est diagonalisable (*) dans une base de vecteurs propres de A, et donc de B d'après

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.53 / 20

(8), $\exists (X_1, \dots, X_m) \in (\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R}))^m$ tels que $\forall i \in [\![1,m]\!]$, X_i soit vecteur propre de A (et de B) associé à λ_i donc

$\forall i \in [\![1,m]\!]$, $AX_i = \lambda_i X_i$.

On justifie (*) par le fait que $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ et que A possède m valeurs propres distinctes.

9b) Soit $i \in [\![1,m]\!]$.

$$\begin{aligned} ABX_i &= \mu_i A X_i \\ &= \mu_i \lambda_i X_i \end{aligned}$$

Donc $\forall i \in [\![1,m]\!]$, $\mu_i \lambda_i \in Sp(AB)$.
donc $\{\lambda_i \mu_i, i \in [\![1,m]\!]\} \subset Sp(AB)$.

Si $\forall (i,j) \in [\![1,m]\!]^2$, $\lambda_i \mu_i \neq \lambda_j \mu_j$ alors comme $\operatorname{card}(Sp(AB)) \leq m$, l'inclusion réciproque est immédiate

Si $\exists (i,j) \in [\![1,m]\!]^2 \mid \lambda_i \mu_i = \lambda_j \mu_j$, alors comme $\dim(E_{\lambda_i \mu_i}(AB))$ est égale au nombre de vecteurs propres (X_i) tels que

$ABX_i = \lambda_i \mu_i X_i$,

On a également $\sum_{i=1}^{n} \dim E_{\lambda_i \mu_i}(AB) = n$.

Donc on peut directement conclure que

$Sp(AB) = \{\lambda_i \mu_i,\ i \in [\![1,n]\!]\}$

1c) a) Nous montrons d'abord que f est linéaire en bas de la page puis nous montrons qu'elle est bijective ici

Soit $f : P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \mapsto (P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n))$.

ii) Soit $P \in \ker(f)$.

Alors $f(P) = 0$

Donc $\forall i \in [\![1,n]\!],\ P(\lambda_i) = 0$.

Donc P admet n racines distinctes.

Or $\deg(P) \leq n-1$ Donc $P = 0$.

Bilan : $\ker(f) = \{0\}$ donc f est injective

On $\dim(\mathbb{R}_{n-1}[X]) = n = \dim(\mathbb{R}^n)$

Donc d'après le corollaire du théorème du rang, f est bijective de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^n$

i) Soit $(\lambda, P, Q) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}_{n-1}[X])^2$.

$f(\lambda P + Q) = ((\lambda P + Q)(\lambda_1), \dots, (\lambda P + Q)(\lambda_n))$

$= \lambda (P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n)) + (Q(\lambda_1), \dots, Q(\lambda_n))$

donc $\varphi(\lambda P+Q) = \lambda\varphi(P)+\varphi(Q)$.

Donc φ est linéaire.

Ainsi φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^n$.

Je précise que j'ai d'abord montré la linéarité de φ avant de pouvoir traiter son noyau. Je m'excuse pour l'inversion.

10b) le vecteur $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n$.

Donc d'après (10.a),
$\exists ! P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \mid \forall i \in [\![1,n]\!],\ P(\lambda_i) = \mu_i$

Donc $\exists ! P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \mid \forall i \in [\![1,n]\!],\ BX_i = \mu_i X_i = P(\lambda_i) X_i$

10c) Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Notons $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$

$$\begin{aligned} P(A)X_i &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k A^k X_i \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda_i^k X_i \\ &= P(\lambda_i) X_i \\ &= BX_i . \end{aligned}$$

Donc $P(A)$ et B coïncident sur une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (car d'après 9.a), les (X_i) forment bien une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$).

Donc $P(A) = B$

Prénom (s) LENNY

19.53 / 20

ecricome Épreuve : Mathématiques approfondies. Sujet ☐ 1 ou ☒ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction. Feuille 04 / 08

Numéro de table 007

11a)

$A.0 = 0 = 0.A$.

Donc $0 \in \mathcal{C}(A)$.

De plus, soit $(\lambda, B, C) \in$ ~~$\mathbb{R} \times (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$~~,
$\in \mathbb{R} \times (\mathcal{C}(A))^2$.

$A(\lambda B + C) = \lambda AB + AC$
$= \lambda BA + CA$
$= (\lambda B + C)A$.

Donc $\lambda B + C \in \mathcal{C}(A)$.

Donc $\mathcal{C}(A)$ est stable par combinaison linéaire.

Donc $\mathcal{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

11b) les question de la partie 2 montrent l'implication $\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,
$AB = BA \Rightarrow B = P(A)$ car d'emblée on suppose $AB = BA$ et on aboutit en 10c) à ce que $B = P(A)$.

Donc $\mathcal{C}(A) = \{P(A), P \in \mathbb{R}_{n-1}[X])$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.53 / 20

1)1) c) en 6. c) on montre que
$B = (I_n, \dots, A^{m-1})$ est libre.
Or B est clairement génératrice de $\mathcal{C}(A)$
puisque $P(A)$ est une combinaison linéaire des
vecteurs de B.
Donc B est une base de $\mathcal{C}(A)$

Donc $\dim(\mathcal{C}(A)) = rg(B) \underset{\text{car } B \text{ est libre}}{=} card(B) = m$

Donc $\dim(\mathcal{C}(A)) = m$

Exercice 2

1) f est un endomorphisme par hypothèse
donc $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.
Or $0 \notin Sp(f)$.
Donc $\ker(f) = \{0\}$
Donc f est injective et bijective
d'après le corollaire du théorème du rang.
Donc f est un automorphisme de $\mathbb{R}^n$

2) a) On dit d'une ~~....~~ application que c'est
un endomorphisme symétrique d'un Espace
~~Vectoriel~~ euclidien E si c'est un endomorphisme de E,

C'est à dire que $u : E \to E$ et u est une application linéaire.
Et si $\forall (x,y) \in E^2$, $\langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$.

2b). La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est orthonormée. Donc comme f est symétrique et que $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ avec $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, $A \in S_n(\mathbb{R})$ i.e ${}^tA = A$.

2c) Donc comme $A \in S_n(\mathbb{R})$ d'après le théorème spectrale pour matrice A est diagonalisable et $\exists P \in O_n(\mathbb{R}) \mid {}^tPAP$ soit diagonale.
en particulier, $\exists P \in GL_n(\mathbb{R}) \mid {}^tPAP$ soit diagonale.

2d) Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Soit $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$.

$\cancel{\langle f(x), x \rangle = \langle AX, X \rangle}$

On note $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.
on sait que d'après (2c),
$\exists P \in O_n(\mathbb{R}) \mid A = PD{}^tP$.
et donc que il existe une base orthonormée $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^n$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = D$.

Donc d'après locam, $\langle x, f(x) \rangle = \langle X, DX \rangle$

Donc $\langle x, f(x) \rangle = {}^t(DX)X$
$= {}^tXDX$

Donc ${}^tX \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_1)X \leq \langle x, f(x) \rangle \leq {}^tX \mathrm{diag}(\lambda_n, \dots, \lambda_n)X$
Donc $\lambda_1 \|X\|^2 \leq \langle x, f(x) \rangle \leq \lambda_n \|X\|^2$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}^n$,

$$\lambda_1 \|x\|^2 \leq \langle f(x), x \rangle \leq \lambda_n \|x\|^2$$

2e) Soit $x \in \mathbb{R}^n$.

Supposons que $\langle f(x), x \rangle = 0$.

Alors on a d'après 2 d)

$$0 \leq \lambda_1 \|x\|^2 \leq 0 \leq \lambda_n \|x\|^2.$$

Donc en particulier $\lambda_1 \|x\|^2 = 0$.

or $\lambda_1 > 0$ donc $\|x\|^2 = 0$

donc $\|x\| = 0$

donc $x = 0$

3/a)

$$g(x) = \frac{1}{2} \langle f(x), x \rangle - \langle u, x \rangle \quad \text{par définition}$$

$$= \frac{1}{2} {}^tXAX - {}^tXU \quad \text{avec } X = Mat_B(x), \ U = Mat_B(u), \ A = Mat_B(f).$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j a_{i,j} - \sum_{i=1}^{n} x_i u_i$$

3b) $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$ en tant que fonction polynomiale.

et $g(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=2}^{n} x_i x_j a_{i,j} + x_1 x_i a_{i,1} \right) - \sum_{i=1}^{n} x_i u_i$

Prénom (s) LENNY

19.53 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques approfondies Sujet ☐ 1 ou ☒ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction. Feuille 05 / 08

Numéro de table 007

Donc

$$g(x) = \frac{1}{2}\Big(\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n} x_i x_j a_{i,j} + \sum_{i=2}^{n} x_1 x_i a_{i,1} + \sum_{j=2}^{n} x_1 x_j a_{1,j} + x_1^2 a_{1,1}\Big) - \sum_{i=2}^{n} x_i v_i - x_1 v_1$$

Donc $\partial_1 g(x) = \frac{1}{2}\Big(2\sum_{j=2}^{n} x_j a_{1,j} + 2 x_1 a_{1,1}\Big) - v_1$

$$= \sum_{j=1}^{n} x_j a_{1,j} - v_1$$

3c) En itérant le processus pour $i \geq 2$,

on obtient $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\partial_i g(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j - v_j$

$$= [AX]_i - v_j$$

en notant $[B]_{i,j}$ le coefficient de la i-ème ligne et de la j-ème colonne d'une matrice B.

Donc $\nabla g(x) = ([Ax]_1 - [U]_{1,1}, \dots, [Ax]_n - [U]_{n,1})$

$\cancel{= Ax - U}$

$= f(x) - v$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.53 / 20

4) Soit $x \in \mathbb{R}^n$.

x est point critique de g

$\iff \nabla(g)(x) = 0$

$\iff f(x) = u \qquad (3.c).$

$\iff x = f^{-1}(u)$

Donc le seul point critique de g est $f^{-1}(u)$

5) Soit $x \in \mathbb{R}^n$.

$$\frac{1}{2} \langle f(x-m), x-m \rangle = \frac{1}{2} \langle f(x) - f(m), x-m \rangle$$

$$= \frac{1}{2}(\langle f(x), x \rangle - \langle f(x), m \rangle - \langle f(m), x \rangle + \langle f(m), m \rangle)$$

$$= \frac{1}{2}\langle f(x), x \rangle - \langle f(x), m \rangle + \frac{1}{2} \langle f(m), m \rangle$$

$$= \frac{1}{2} \langle f(x), x \rangle + \frac{1}{2} \langle f(m), m \rangle - \langle x, f(m) \rangle.$$

Or $f(m) = \underbrace{f \circ f^{-1}(u)}_{= u} \quad (4)$

~~Donc~~

Donc $\frac{1}{2} \langle f(x-m), x-m \rangle = \cancel{\frac{1}{2} \langle f(x), x \rangle - \frac{1}{2} \langle x, u \rangle}$

$$= \frac{1}{2} \langle f(x), x \rangle - \langle x, u \rangle + \frac{1}{2} \langle f(m), m \rangle$$

$$= g(x) - g(m) + \langle u, m \rangle$$

On $\langle U, m \rangle = \cancel{\langle U, f^{-1}(U) \rangle}$
$= \langle m, f(m) \rangle$ car $U = f(m)$,

~~On~~
~~On admet~~ que
N'aboutit pas

6) D'après 5), $\forall x \in \mathbb{R}^n$,

$g(m) = g(x) - \frac{1}{2} \langle f(x-m), (x-m) \rangle$ or

d'après 2.d), $\langle f(x-m), x-m \rangle \geq 0$.
Donc $g(m) \geq g(x)$.
Donc m est le point en lequel g atteint son maximum.

7) a)
$f(a+h) = f(a) + f(h)$ donc

$\langle f(a+h), a+h \rangle = \langle f(a), a \rangle + \langle f(h), a \rangle$
$+ \langle f(a), h \rangle + \langle f(h), h \rangle$
or f est symétrique donc $\langle f(h), a \rangle = \langle f(a), h \rangle$ Donc

$\langle f(a+h), a+h \rangle = \langle f(a), a \rangle + 2 \langle f(a), h \rangle + \langle f(h), h \rangle$

7b) admis

8 a) ~~Posons a =~~ Soit $p \in \mathbb{N}$.
Posons $a = m_p$ et $h = -\alpha \nabla(g)(m_p)$

Prénom (s) LENNY

19.53 / 20

Ecricome Épreuve :

Sujet ☐ 1 ou ☒ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 06 / 08

Numéro de table 007

on a alors d'après 7.b),

$$g(x_p - \alpha\nabla(g)(x_p)) = g(x_p) + \langle \nabla(g)(x_p), -\alpha\nabla(g)(x_p)\rangle + \frac{1}{2}\langle f(-\alpha\nabla(g)(x_p)), -\alpha\nabla(g)(x_p)\rangle$$

D'où $g(x_{p+1}) = g(x_p) - \alpha\|\nabla(g)(x_p)\|^2 + \frac{\alpha^2}{2}\langle f(\nabla(g)(x_p)), \nabla(g)(x_p)\rangle$

8b) Donc d'après 2d)

comme $\forall p \in \mathbb{N}$,

$\frac{\alpha^2}{2} > 0$,

$$\frac{\alpha^2}{2}\langle f\,\nabla(g)(x_p), \nabla(g)(x_p)\rangle \leq \frac{\alpha^2\lambda_n}{2}\|\nabla(g)(x_p)\|^2$$

Donc en utilisant l'égalité de 8) il vient

$$g(x_{p+1}) \leq g(x_p) - \alpha\|\nabla(g)(x_p)\|^2 + \frac{\alpha^2\lambda_n}{2}\|\nabla(g)(x_p)\|^2$$

Donc $g(x_{p+1}) \leq g(x_p) - \alpha\left(1 - \frac{\alpha\lambda_n}{2}\right)\|\nabla(g)(x_p)\|^2$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.53 / 20

9a) $\alpha \in]0, \frac{2}{\lambda_n}[$ donc

$1 - \frac{\alpha \lambda_n}{2} > 0$ donc

$\forall p \in \mathbb{N}, \quad g(m_{p+1}) \leq g(m_p) - \alpha \underbrace{\left(1 - \frac{\alpha \lambda_n}{2}\right)}_{\geq 0} \underbrace{\|\nabla g(m_p)\|^2}_{\geq 0}$

Donc $\forall p \in \mathbb{N} \quad g(m_{p+1}) \leq g(m_p)$

Donc $(g(m_p))_{p \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

On admet que $(g(m_p))$ est minorée.

Donc d'après le théorème de limite monotone, $(g(m_p))$ converge

9b) admis

9c) $g(m_p) \xrightarrow[p \to +\infty]{} g(m)$

Donc $\frac{2}{\lambda_1}(g(m_p) - g(m)) \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0$

Donc d'après 9b) par encadrement,
$\|m_p - m\|^2 \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0$

10) a) Soit $(\lambda, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$.

$$f(\lambda x + y, z) = (2(\lambda x + y) + z,\ \lambda x + y + 2z)$$

$$= \lambda(2x + z, x + 2z) + (2y, z, y + 2z)$$

$$= \lambda f(x, z) + f(y, z)$$

<u>f est donc linéaire</u>

En outre, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Donc <u>$f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$</u>

Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}^2)^2$. Posons $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$

$$< f(x), y > = <(2x_1 + x_2, x_1 + 2x_2), (y_1, y_2)>$$

$$\cancel{= 2y_1x_1}$$

$$= (2x_1 + x_2)y_1 + (x_1 + 2x_2)y_2$$

$$= 2y_1x_1 + y_1x_2 + y_2x_1 + 2y_2x_2$$

$$= (2y_1 + y_2)x_1 + (y_1 + 2y_2)x_2$$

$$= < f(y), x >$$

Donc <u>f est symétrique</u>

Bilan : <u>f est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^2$</u>

<u>10) b)</u> ~~C'est le α de la figure (b) qui ne convient pas car il prend des valeurs négatives alors que $\alpha \in]0, \frac{\pi}{n}[$.~~

10)b) $(g(m_p))$ est décroissante donc $\alpha_1 = 0{,}67$ ne convient pas

10)c) admis
10) d) admis.

Problème.

Partie I.

1)
```
def F(x):
    return np.exp(x)/(1+np.exp(x))
```

2) $F \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ en tant qu'opération de fonctions de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{e^x(1+e^x)-(e^x)^2}{(1+e^x)^2}$$

$$= \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

$$\cancel{= e^x(1+}$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{e^x(1+e^x)^2 - e^x.(2e^x(1+e^x))}{(1+e^x)^4}$$

$$= \frac{e^x(1+e^x)-2(e^x)^2}{(1+e^x)^3}$$

$$= \frac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}.$$

Prénom (s) LENNY

Ecricome Épreuve : Mathématiques approfondies

19.53 / 20

Sujet ☐ 1 ou ☒ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 07 / 08

Numéro de table 007

3) f' est de même signe que $1-e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Or $1-e^x \geq 0$

$\iff 0 < e^x \leq 1$

$\iff x \leq 0$ par croissance de ln sur $\mathbb{R}_+^*$

Donc

Comme $f(x) = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^x}{e^{2x}} \sim \dfrac{1}{e^x} \longrightarrow 0$

et $f(x) = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$

il vient :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	0

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.53 / 20

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	
	0				0

Donc de même, comme $f = F'$.

	$-\infty$		$+\infty$
F		$\nearrow$	1
	0		

~~4) $\forall x \in \mathbb{R}$,~~
~~$f(-x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$~~

4) admis

5) admis

6) D'après 3.a) $f > 0$ sur $\mathbb{R}$.

Donc F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Or F est continue.

Donc d'après le théorème de la bijection, F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $F(\mathbb{R}) =]0,1[$.
d'après (3)

Soit $y \in]0,1[$.

$F(x) = y$

$\iff e^x = y(1+e^x)$

$\iff e^x = y + ye^x$

$\iff (1-y)e^x = y$

$\iff e^x = \frac{y}{1-y} > 0$

$\iff x = \ln\left(\frac{y}{1-y}\right)$ car $\ln$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.

Donc $F^{-1} : y \mapsto \ln\left(\frac{y}{1-y}\right)$

Partie 2

7) $\forall n \geq 1$, $\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$

or $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge d'après le critère de Rieman, donc

$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ converge absolument et donc

converge

8) D'après 3), f est continue, positive sur $\mathbb{R}$.

~~et~~ $\cancel{\int_{-\infty}^{+\infty} e^x}$ Soit $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

$$\int_B^A f(x)dx = \int_B^A f(x)dx$$

$$= \int_B^A \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$$

$$= [F(x)]_B^A \quad \text{car } f = F'$$

$$\cancel{= \frac{e^A}{1+e^A} - \frac{e^B}{1+e^B}}$$

$$= F(A) - F(B)$$

$$\xrightarrow[A \to +\infty]{} 1 - F(B)$$

$$\xrightarrow[B \to -\infty]{} 1 \quad \text{d'après (3)}$$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge et vaut 1.

Bilan : f est une densité de probabilité et F la fonction de répartition associée car $F' = f$

10) a) admis

10 b) D'après 10a),

$$\int_{-\infty}^{0} x f(x)dx + \int_0^{+\infty} x f(x)dx = 0$$

Prénom (s) LENNY

Ecricome Épreuve : Mathématiques approfondies Sujet ☐ 1 ou ☒ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction. Feuille 08 / 09

Numéro de table 007

19.53 / 20

Donc $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = 0$

9) question oubliée : je m'excuse de ne la traiter que maintenant :

Soit $x \in \mathbb{R}$, $x^4 f(x) = \left|\frac{x^4 e^x}{(1+e^x)^2}\right| \underset{+\infty}{\sim} \frac{x^4 e^x}{e^{2x}}$

$\underset{+\infty}{\sim} x^4 e^{-x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

par croissance comparée.

Donc $x^2 f(x) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ Donc

$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx$ converge absolument par théorème de comparaison.

Donc X admet un moment d'ordre 2

Donc X admet une variance et une espérance

11) admis.

12) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, Soit $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(n)$.

Alors $E(Y)$ existe et vaut $\int_0^{+\infty} x \cdot n e^{-nx} = \frac{1}{n}$.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.53 / 20

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} x e^{-nx} dx$ converge et vaut $\frac{1}{n^2}$.

13) admis

~~14) $\forall x \in \mathbb{R}_+$,~~

14) a) $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$,

$$|R_N(x)| = \left| \frac{x e^{-(N+1)x}}{1+e^{-x}} \right|$$

$$= \frac{x e^{-(N+1)x}}{1+e^{-x}}$$

or $e^{-x} > 0$

donc $1+e^{-x} > 1 \geq 1$

Donc $\frac{1}{1+e^{-x}} \leq 1$

Donc $|R_N(x)| \leq x e^{-(N+1)x}$.

14 b) $\int_0^{+\infty} R_N(x) dx \leq \left| \int_0^{+\infty} R_N(x) dx \right|$

$$\leq \int_0^{+\infty} |R_N(x)| dx$$

$$\leq \int_0^{+\infty} x e^{-(N+1)x} dx$$

$$\leq \left(\frac{1}{N+1}\right)^2 \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0 \quad \text{d'après (12)}$$

Donc on a $\left| \int_0^{+\infty} R_N(x) dx \right| \leq \left(\frac{1}{N+1}\right)^2 \longrightarrow 0$ Donc par encadrement, $\int_0^{+\infty} R_N(x)\,dx \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$.

15)

D'après 13) ~~on a~~ et 12) on a

$$V(X) = 4\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} + \underbrace{\lim_{N\to+\infty} (-1)^N \int_0^{+\infty} R_N(x)\,dx}_{=0}\right)$$

$$= \frac{4\pi^2}{12}$$

$$= \frac{\pi^2}{3}$$

Partie 3

16) $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $E(X_i^2) = V(X_i) + (E(X_i))^2$
$= \frac{\pi^2}{3}$ d'après la partie 2

Or les X_i^2 sont mutuellement indépendantes d'après le lemme des coalitions et ont la même espérance et variance car elles suivent la même loi.

Donc d'après la loi faible des grands nombres,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{P} E(X_1) = \frac{\pi^2}{3}$$

17) $x \mapsto \frac{3}{\pi}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc

$T_n = \frac{3}{\pi} \times \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{P} \frac{3}{\pi} \times \frac{\pi^2}{3} = \pi$

On pose alors $T_n = \frac{\pi}{3} \sum_{i=1}^{n} x_i^2$

18) Soit $r \in \mathbb{R}$.

$P(F^{-1}(U) \leq r)$

$= P(U \leq F(r))$

$= F(r)$.

Donc $F^{-1}(U)$ suit la même loi que X

~~19)~~

~~def realisation_X():~~
~~return np.log(rd.rand() / (1 - rd.rand()))~~

19)

```
def realisation_x():
    u= rd.random()
    return np.log( u / (1-u))
```

20)

```
def estimation_pi(n):
    X= np.array([])
    for i in range(n):
        X= np.append(X, realisation_X())
    return np.sqrt(3* np.mean( X**2 ))
```

21) a) F est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $[0,1]$.