PREPA Option Maths approfondies

Mathématiques approfondies Mathématiques

LÉA

Note de délibération : 19.2 / 20

Prénom (s) LEA

19.2 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques - Sujet 2

Sujet ☐ 1 ou ☒ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 01 / 08

Numéro de table 003

Exercice 1 :

Partie I -

1 - a) $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

b) La matrice AB est une matrice triangulaire supérieure donc ses valeurs propres sont exactement ses coefficients diagonaux,

Donc $sp(AB) = \{2, -1\}$

Soit u l'endomorphisme associé à AB,

alors $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$u(x, y) = (2x + 3y, -y)$,

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$(x, y) \in Ker(u + Id_E) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = -x \\ 0 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 0 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow (x, y) \in vect((1, 1))$

$\boxed{E_{-1} = vect((1, 1))}$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.2 / 20

$(x,y) \in \text{Ker}\ (u - 2Id_E) \Leftrightarrow \begin{cases} 3y = 0 \\ -3y = 0 \end{cases}$

$\boxed{E_{-2} = \text{vect}((1,0))}$ $\Leftrightarrow (x,y) \in \text{vect}((1,0))$

- De même, BA est triangulaire supérieure

Donc $Sp(BA) = \{-1, 2\}$

On note v son endomorphisme associé.

$v(x,y) = (-x + 3y, 2y)$

$(x,y) \in \text{Ker}\ (v + Id_E) \Leftrightarrow \begin{cases} 3y = 0 \\ 2y + y = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow (x,y) \in \text{vect}\ (1,0)$

$(x,y) \in \text{Ker}(\ v - 2Id_E) \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 3y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 0 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow (x,y) \in \text{vect}((1,1))$.

$\boxed{E_{-1} = \text{vect}((1,0))}$

$\boxed{E_2 = \text{vect}((1,1))}$

2 - a) λ est une valeur propre de AB,

Donc $\exists X \in M_n(\mathbb{R}) \setminus \{O_E\}$ tq:

$ABX = \lambda X$

Supposons que $BX = O$

alors $ABX = O$

Donc $\underset{\neq 0}{\lambda} \underset{\neq 0}{X} = 0 \Rightarrow$ Contradiction

Bilan : $BX \neq 0$

b) On a : $ABX = \lambda X$
$BABX = \lambda BX$
donc $BA(BX) = \lambda(BX)$,
D'après la question ~~1~~. a $BX \neq 0$,
Donc BX est un vecteur propre de BA associé à la valeur propre λ.

3 - a) Supposons que $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$,
$BX = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$
0 est valeur propre de AB, donc $\exists X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$,
tq : $ABX = 0 . X$
alors $BA(BX) = 0.(BX)$

On : $BX = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ comme B est inversible $\Rightarrow$ Contradiction.

Bilan : $BX \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ Donc 0 est valeur propre de BA associé au vecteur propre BX.

b) $rg(BA - 0.I_n) < n$ donc 0 est valeur propre de BA.

4 - D'après la question 2,
$\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ valeur propre de $AB \Rightarrow \lambda$ est valeur propre de BA.
et la question 3,
0 est valeur propre de $AB \Rightarrow \lambda$ est valeur propre de BA.

On montre avec le même raisonnement les deux autres implications en échangeant A B,

Soit $\lambda \in Sp(BA)$, $\exists X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ tel:

$BAX = \lambda X$

Donc $ABAX = \lambda AX$

Donc $AX \neq 0$ et donc λ valeur propre de AB associé au vecteur propre AX.

Supposons que $\lambda = 0$

- alors si A est inversible, $AX \neq 0$ et donc 0 est valeur propre AB
- si A n'est pas inversible $rg(AB) < n$

Donc 0 est valeur propre de AB.

Bilan: $\lambda \in Sp(AB), \iff \lambda \in Sp(BA)$.

Donc: AB et BA ont le même spectre.

5 - Non, λ est valeur propre de AB associé à X donc λ est valeur propre de BA associé à BX

- - - - . Or: BX n'est pas forcément égal à X, (par exemple $B \neq I_n$),

Alors AB et BA n'ont pas les mêmes vecteurs propres, donc pas les mêmes sous espaces propres.

Partie II -

6 - ⓐ On pose $Q = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k X^k$

alors $Q(A) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^k = 0$

Donc Q est annulateur de A et $\deg(Q) \leq n-1$

Prénom (s) LEA

19.2 / 20

Écricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☒ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Feuille 02 / 08

Numéro de table 00?

(b) $Q = \alpha_0 + \alpha_1 X + \_\_\_ + \alpha_{n-1} X^{n-1}$

Soit $i \in [\![1, n-1]\!]$,

$Q(\lambda_i) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_i + \_\_\_ + \alpha_{n-1} \lambda_i^{n-1}$

On : $(\alpha_0, \_ , \alpha_{n-1})$ sont non tous nuls donc il existe $j \in [\![1, n-1]\!]$ tq $\alpha_j \neq 0$.

et comme $\lambda_1, \_, \lambda_n$ sont deux à deux distinctes, $(n-1)$ valeurs sont forcément non nuls,

Donc en prenant $\lambda_i \neq 0$,

$Q(\lambda_i) = \alpha_0 + \_ + \alpha_{n-1} \lambda_i^{n-1} \neq 0$ car $\lambda_i^j \alpha_j \neq 0$

Donc λ_i n'est pas une racine de $Q \Rightarrow$ Contradiction

(c) $\exists (\alpha_0, \_ \alpha_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tq

$\alpha_0 I_n + \_\_\_ + \alpha_{n-1} A^{n-1} = 0$

et $(\alpha_0, \_ , \alpha_{n-1}) \neq (0, \_, 0)$

Donc la famille $(I_n, A, \_, A^{n-1})$ est liée.

7 - (a) A admet n racines distinctes, donc les sous espaces propres de A sont tous de dimensions 1 et $X \in E_\lambda$, $((A - \lambda I_n)(X) = \lambda X - \lambda X = 0)$

Donc $E_\lambda = \mathrm{vect}((X))$ comme $X \neq 0$.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.2 / 20

(b) $BAX = B(AX) = B(\lambda X) = \lambda BX$

et $BAX = ABX$ car $AB = BA$

$= A(BX)$

Donc $A(BX) = \lambda . BX$

(c) $A(BX) = \lambda . BX$.

Donc $BX \in E_\lambda$,

(En effet : $A(BX) - \lambda BX = \lambda BX - \lambda BX = 0$)

Donc : $BX \in$ vect (X).

8 - Soit X un vecteur propre de A,

alors $BX \in$ vect (X) d'après question 7.

Donc $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tq : $BX = \alpha X$
$\neq (0)$

Donc X est un vecteur propre de B

9 - (a) Comme A admet n valeurs propres distinctes, alors A est diagonalisable et $\exists$ une base de E composé de vecteurs propres de A.

et comme A et B ont les même vecteurs propres,

Alors c'est une base de vecteurs propres de B.

Donc : $(X_1, \dots, X_n)$ est une base de vecteurs propres de A et B,

et $\forall i \in [\![1, n]\!]$,

$$A X_i = \lambda_i X_i$$

b)

Soit $\alpha \in Sp(AB)$,

alors $\exists X_i \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ tq :

$$ABX_i = \alpha X_i$$

or : $ABX_i = \alpha A \mu_i X_i$

$= \alpha \lambda_i \mu_i X_i$

Soit $\alpha \in \{\lambda_i \mu_i , \ i \in [\![1, n]\!]\}$,

alors $\exists i \in [\![1,n]\!]$ $\alpha = \lambda_i \mu_i$

$AB\alpha = AB(\lambda_i \mu_i)$

$= A(B\mu_i)\lambda_i$

$= ABX\lambda_i$

$\alpha \in Sp(AB) \iff \exists X_i \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \ / \ ABX_i = \alpha X_i$

$\iff A \mu_i X_i = \alpha X_i$

$\iff \lambda_i \mu_i X_i = \alpha X_i$

$\iff \alpha = \lambda_i \mu_i$ comme $X_i \neq \{0\}$,

On admet ici que AB et B ont les mêmes vecteurs propres.

<u>Preuve</u> : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, X_i un vecteur propre de A et B

$ABX_i = \lambda_i \mu_i X_i$ donc $\lambda_i \mu_i \in Sp(AB)$.

Donc $(X_1, \dots, X_n)$ est une base de $M_n(\mathbb{R})$ composée de vecteurs propres de AB.

1a- a) Soit $P \in \ker(\varphi)$,
On pose $\varphi : P \mapsto (P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n))$
alors $\varphi(P) = 0$

Donc $\begin{cases} P(\lambda_1) = 0 \\ \vdots \\ P(\lambda_n) = 0 \end{cases}$

Donc P admet n racines deux à deux distinctes
Donc P est le polynôme nul
Donc $\ker(\varphi) = \{0_E\}$
Donc φ est injective.
et : $\dim(\mathbb{R}_{n-1}[X]) = \dim(\mathbb{R}^n)$
Donc d'après le corollaire du theorème du rang, φ est bijective.

Soit $(\lambda, P, Q) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}_{n-1}[X])^2$,

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda P + Q) &= ((\lambda P + Q)(\lambda_1), \dots, (\lambda P + Q)(\lambda_n)) \\ &= (\lambda P(\lambda_1) + Q(\lambda_1), \dots, \lambda P(\lambda_n) + Q(\lambda_n)) \\ &= \lambda (P(\lambda_1), \dots P(\lambda_n)) + (Q(\lambda_1), \dots, Q(\lambda_n)) \\ &= \lambda \varphi(P) + \varphi(Q).\end{aligned}$$

Donc φ est une application linéaire

Bilan: φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^n$.

b)

Prénom (s) LEA

19.2 / 20

Écricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☒ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 03 / 08

Numéro de table 00?

e) $P(A)X_i = \underset{\neq f(e)}{P(\lambda_i)X_i}$

Donc $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $BX_i = P(\lambda_i)X_i = P(A)X_i$

Donc B et $P(A)$ coïncident sur la base $(X_1, \_, X_n)$

Bilan: $B = P(A)$.

11 - a) $*$ $\mathcal{C}(A) \subset M_n(\mathbb{R})$.

$*$ Soit O_n la matrice nulle de $M_n(\mathbb{R})$,

alors $AO_n = O = O_n A$

Donc $O_n \in \mathcal{C}(A)$.

$*$ Soit $(\lambda, M, B) \in \mathbb{R} \times (\mathcal{C}(A))^2$,

alors $A(\lambda M + B) = \lambda AM + AB$

$= \lambda MA + BA$ car $M, B \in (\mathcal{C}(A))^2$

$= (\lambda M + B)A$

Donc $\lambda M + B \in \mathcal{C}(A)$.

Bilan: D'après le théorème de caractérisation des sous espace vectoriel,

$\mathcal{C}(A)$ est un sous espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.2 / 20

(b)

$B \in M_n(\mathbb{R})$, $AB = BA \Leftrightarrow B = P(A)$, $P \in \mathbb{R}_{n-1}(X)$
d'après question 10.c.

et ceci $\forall B \in M_n(\mathbb{R})$.

<u>Bilan:</u> $\mathcal{C}(A) = \{P(A),\ P \in \mathbb{R}_{n-1}(X)\}$

(c)

Exercice 2:

<u>1</u> - 0 n'est pas valeur propre de f.

<u>Donc:</u> f est bijectif

Comme f est un endomorphisme bijectif

Alors f est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.

2 - (a) u est un endomorphisme symétrique si $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$< u(x), y > = < x, u(y) >$.

(b) Comme la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est orthonormée, alors A est symétrique.

<u>Donc:</u> ${}^tA = A$

(c) Comme A est symétrique alors A est diagonalisable d'après le théorème spectral,
Donc $\exists$ D une matrice diagonale de coefficients diagonaux qui sont les valeurs propres de A, et P une matrice orthogonale, tel que:
$A = PD{}^tP$ (donc inversible)

Donc comme P est inversible:
$$D = {}^tPAP$$
Donc ${}^tPAP$ est une matrice diagonale.

(d) Soit $x \in \mathbb{R}^n$.
On note $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,
$$\langle f(x), x \rangle = {}^tXAX$$
$$= {}^tXPD{}^tPX$$
On pose $Y = {}^tPX$,
alors ${}^tXAX = \sum_{i=1}^{n} [{}^tYD]_{1,i} \; [Y]_{i,1}$
$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \underbrace{[D]_{i,j}}_{=\begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ \lambda_i & \text{sinon}\end{cases}} ([Y]_{i,1})^2$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i ([Y]_{i,1})^2$$
<u>Donc:</u> $\forall i \in [\![1, n]\!]$,
$$\lambda_1 \leq \lambda_i \leq \lambda_n$$
$$\lambda_1 \sum_{i=1}^{n} ([Y]_{i,1})^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i ([Y]_{i,1})^2 \leq \lambda_n \sum_{i=1}^{n} ([Y]_{i,1})^2$$
$$\lambda_1 \; {}^tXP{}^tPX \leq {}^tXAX \leq \lambda_n \; {}^tXP{}^tPX$$
$$\lambda_1 \|X\|^2 \leq {}^tXAX \leq \lambda_n \|X\|^2$$
<u>Donc:</u>
$$\lambda_1 \|x\|^2 \leq \langle f(x), x \rangle \leq \lambda_n \|x\|^2.$$

(e) Supposons que $\langle f(x), x\rangle = 0$

alors $0 = \langle f(x), x\rangle \geq \|x\|^2 \lambda_1 \geq 0$

Donc $\|x\|^2 \lambda_1 = 0$ ($\lambda_1 \neq 0$)

Donc $\|x\|^2 = 0$

Donc $x = 0$

Supposons que $x = 0$

alors $\langle f(x), x\rangle = 0$ par linéarité à droite.

3- (a)

$g(x) = 1/2 \langle f(x), x\rangle - \langle u, x\rangle$

$g(x) = 1/2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \, x_{i,1} - \sum_{i=1}^{n} u_i x_i$

$g(x) = 1/2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \, x_i - \sum_{i=1}^{n} u_i x_i$

(b) g est de classe C^1 comme fonction polynomiale sur $\mathbb{R}^n$ et

$(g)(x) = 1/2 \sum_{j=1}^{n} a_{1,j} x_1 + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i \; a_{ij} - u_1 x_1 - \sum_{i=2}^{n} u_i x_i$

Donc $\underline{\partial_1 (g)(x) = 1/2 \sum_{j=1}^{n} a_{1,j} - u_1}$

(c) $\forall i \in [\![1, n]\!]$,

$\partial_i (g)(x) = 1/2 \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} - u_i$

Donc $\nabla(g)(x) = \left(1/2 \sum_{j=1}^{n} a_{1,j} - u_1, \ldots, 1/2 \sum_{j=1}^{n} a_{n,j} - u_n\right)$

Donc $\nabla(g)(x) =$

Prénom (s) LEA

19.2 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☒ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 04 / 08

Numéro de table 003

4 - Soit $x \in \mathbb{R}^n$,

x est un point critique de g

$\Leftrightarrow \nabla(g)(x) = 0$

$\Leftrightarrow f(x) - u = 0$

$\Leftrightarrow f(x) = u$

$\Leftrightarrow x = f^{-1}(u)$

Donc g admet un unique point critique noté m. qui est $m = f^{-1}(u)$

5 - Soit $x \in \mathbb{R}^n$

$\frac{1}{2} \langle f(x-m), x-m \rangle = \frac{1}{2} (\langle f(x), x \rangle - \langle f(x), m \rangle - \langle f(m), x \rangle + \langle f(m), m \rangle)$

$= \frac{1}{2} \langle f(x), x \rangle + \frac{1}{2} \langle f(m), m \rangle - \frac{1}{2} \langle f(x), m \rangle - \frac{1}{2} \langle f(m), x \rangle.$

$\frac{1}{2} \langle f(x-m), x-m \rangle = g(x-m) + \langle u, x-m \rangle$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.2 / 20

6-

7- a)

$< f(a+h), a+h > = <f(a), a> + <f(a), h>$
$+ <f(h), a> + <f(h), h>.$

or : $<f(h), a> = <f(a), h>$ car f est symétrique

Donc :
$<f(a+h), a+h> = <f(a), a> + 2 <f(a), h> + <f(h), h>.$

b) $g(a+h) = 1/2 <f(a+h), a+h> - <u, a+h>$
$= \frac{1}{2} <f(a), a> + <f(a), h> + \frac{1}{2} <f(h), h>$
$- <u, a+h>$

or : $g(a) + <\nabla(g)(a), h> + \frac{1}{2} <f(h), h> =$
$\frac{1}{2} <f(a), a> - <u, a> + <f(x) - u, h>$
$+ \frac{1}{2} <f(h), h>$
$= \frac{1}{2} <f(a), a> + <f(a), h> + \frac{1}{2} <f(h), h> - <u, a+h>$
$= g(a+h)$

Bilan : $g(a+h) = g(a) + <\nabla g(a), h> + \frac{1}{2} <f(h), h>.$

8 - ⓐ On pose :

$h = -\alpha \nabla(g)(m_p)$

$a = m_p$,

alors :

$$g(m_{p+1}) = g(m_p) + \langle \nabla(g)(m_p), -\alpha \nabla(g)(m_p) \rangle + 1/2 \langle f(-\alpha \nabla(g)(m_p)), -\alpha \nabla(g)(m_p) \rangle$$

$$= g(m_p) - \|\nabla(g)(m_p)\|^2 + \frac{\alpha^2}{2} \langle f(\nabla g(m_p)) \nabla g(m_p) \rangle$$

ⓑ Comme $\nabla(g)(m_p) \in \mathbb{R}^n$

alors D'après la question 2 . d

$\langle f(\nabla g(m_p)), \nabla g(m_p) \rangle \leq \lambda_n \|\nabla g(m_p)\|^2$.

Donc

$g(m_{p+1}) \leq g(m_p) - \alpha \|\nabla g(m_p)\|^2 + \frac{\alpha^2}{2} \lambda_n \|\nabla g(m_p)\|^2$.

Donc

$$g(m_{p+1}) \leq g(m_p) - \alpha \left(1 - \frac{\alpha \lambda_n}{2}\right) \|\nabla g(m_p)\|^2.$$

9 - ⓐ On cherche le signe

$\alpha \left(1 - \frac{\alpha \lambda_n}{2}\right)$,

$\alpha \in]0; \frac{1}{\lambda_n}]$

Donc $\frac{\alpha \lambda_n}{2} \in]0; 1/2]$

Donc $1 - \frac{\alpha \lambda_n}{2} \in [1/2, 1[$.

Donc $\alpha \left(1 - \frac{\alpha \lambda_n}{2}\right) \geq 0$

Donc $\alpha \left(1 - \frac{\alpha \lambda_n}{2}\right) \|\nabla g(m_p)\|^2 \geq 0$

Donc $g(m_{p+1}) \leq g(m_p)$

Donc $(g(m_p))_{p\in\mathbb{N}}$ est décroissante

et comme $(g(m_p))_{p\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0.
Alors elle converge.

(b) D'après 2.d $\|m_p - m\|^2 \leq \frac{1}{\lambda_1} \langle f(m_p) - f(m), m_p - m \rangle$

$\leq \frac{1}{\lambda_1}(g(m_p) - g(m))$ d'après q° 5

$\leq \frac{2}{\lambda_1}(g(m_p) - g(m))$

(c) $g(m_p) \xrightarrow[p\to+\infty]{} g(m)$

Donc $\frac{2}{\lambda_1}(g(m_p) - g(m)) \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$

Donc comme $\|m_p - m\|^2 \geq 0$

Par encadrement, $\boxed{\lim_{p\to+\infty} \|m_p - m\|^2 = 0}$

10-(a)

On pose $x = (x_1, x_2)$ $y = (y_1, y_2)$

$\langle f(x), y \rangle = \langle (2x_1 + x_2, x_1 + 2x_2), (y_1, y_2) \rangle$

$= 2\langle x_1, y_1 \rangle + \langle x_2, y_1 \rangle + 2\langle x_1, y_2 \rangle$

$+ \langle x_2, y_2 \rangle + \langle x_1, y_2 \rangle + \langle x_1, y_1 \rangle$

$+ 2\langle x_2, y_2 \rangle + 2\langle y_1, x_2 \rangle.$

et :

$\langle f(y), x \rangle = \langle 2y_1 + y_2, y_1 + 2y_2, (x_1, x_2) \rangle$

$= 2\langle y_1, x_1 \rangle + 2\langle y_1, x_2 \rangle + \langle y_1, x_1 \rangle + \langle y_2, x_2 \rangle$

$+ \langle x_1, y_1 \rangle + \langle x_1, x_2 \rangle + 2\langle y_2, x_1 \rangle +$

$2\langle x_2, y_2 \rangle.$

Prénom (s) LEA

19.2 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☒ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 05 / 08

Numéro de table 003

Donc $\langle f(y), x \rangle = \langle f(x), y \rangle$.

Donc f est symétrique.

Soit $(\lambda, u, v) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^2)^2$

alors $f(\lambda u + v) = (2\lambda(u_1 + v_1) + \lambda u_1 + u_2,$

$\lambda u_1 + v_1 + 2u_2 + v_2)$

$= \lambda(2u_1 + u_2, u_1 + 2u_2)$

$+ (2v_1 + v_2, v_1 + 2v_2)$

$= \lambda f(u) + f(v)$

Donc f est un endomorphisme.

Bilan: f est un endomorphisme symétrique.

b) Pour $\alpha = \alpha_0 = 0{,}2$,

Seu(a): On voit que la suite $S(m_p)$ est croissante, or elle est décroissante

Donc elle ne vérifie pas les hypothèses.

Seu(b): On remarque que pour $\alpha = \alpha_0 = 0{,}2$, $(m_p)_{p \in \mathbb{N}}$ ne converge pas tandis que pour $\alpha = \alpha_1$, la suite converge.

Or: Dans l'énoncé, la suite converge vers m. Donc α_0 ne respecte pas

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.2 / 20

les conditions.

c) On conjecture d'après le graphique (b) que $(m_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.
Donc $m = \underline{1}$.

d) pour $\alpha = \alpha_1$,
$(S(m_p))_{p\in\mathbb{N}}$ est décroissante,
$(m_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est convergente vers m.

Problème

Partie I -

$\underline{1}$ - def F(x):
        return np.exp(x) / (1 + np.exp(x))

2 - $f : x \mapsto 1 + e^x$ est de Classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas,
Donc par quotient de deux fonctions de classe C^∞ dont le dénominateur ne s'annule pas, F est de classe C^∞.

et $F'(x) = \dfrac{e^x(e^x+1) - e^x \times e^x}{(1+e^x)^2}$

$$F'(x) = \frac{e^x(1+e^x - e^x)}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

Donc $f(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$

Donc f est dérivable et

$\forall x \in \mathbb{R},$

$$f'(x) = \frac{e^x(1+e^x)^2 - 2(1+e^x)e^x \times e^x}{((1+e^x)^2)^2}$$

$$\cancel{f'(x) = \frac{e^x - 2e^{2x}}{(1+e^x)^3}}$$

$$\cancel{f'(x) = \frac{e^x(1-2e^x)}{(1+e^x)^3}}$$

$$f'(x) = \frac{e^x(1+e^x) - 2(e^x)^2}{(1+e^x)^3}$$

$$f'(x) = \frac{e^x(1+e^x-2e^x)}{(1+e^x)^3}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}}$$

3 - $f'(x)$ est du signe de $(1-e^x)$

$1 - e^x \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq e^x$

$\Rightarrow 0 \geq x$ par croissance de la fonction ln

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$1/4$	$\searrow$	0

$\frac{1}{1+e^x} \xrightarrow[x \to -\infty]{}$

x	$-\infty$		$+\infty$
$F' = f$		$+$	
F	0	$\nearrow$	1

4 - $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f(-x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} = \frac{e^{-x}}{1+2e^{-x}+(e^{-x})^2} = \frac{e^{x}}{e^{2x}+2e^{x}+1}$$

(en multipliant en haut en bas par $(e^{x})^2$)

Donc $f(-x) = f(x)$

Donc f est paire.

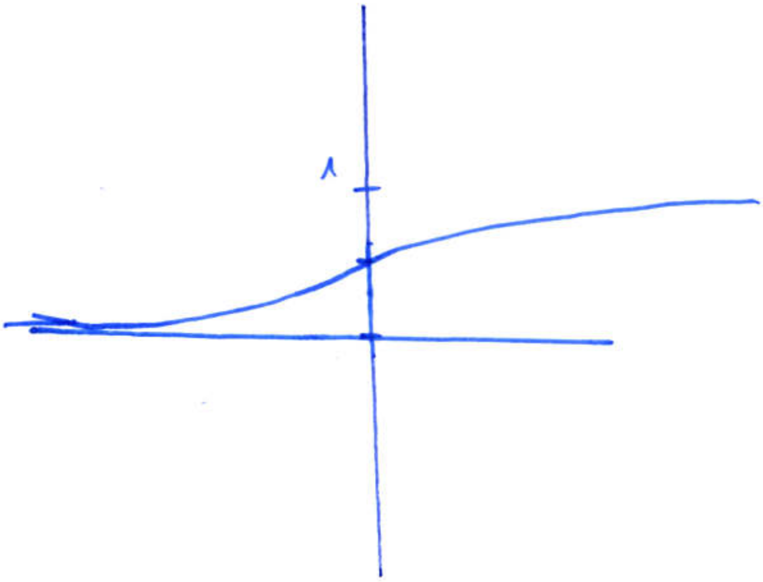
$$\left(F - \tfrac{1}{2}\right)(-x) = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} + \tfrac{1}{2}x$$

$$= \frac{e^{x}}{e^{2x}+1} + \tfrac{1}{2}x$$

en multipliant par (e^{x^2})

On admet que la fonction est impaire.

5 -



Prénom (s) L E A

19.2 / 20

Écricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☒ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 06 / 08

Numéro de table 003

6- F est strictement croissante donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]\lim\limits_{x\to-\infty} F(x), \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)[=]0,1[$.

Soit $y \in]0,1[$,

$$y = \frac{e^x}{1+e^x}$$

$$(1+e^x)\, y = e^x$$

$$ye^x + y = e^x$$

$$ye^x - e^x = -y$$

$$e^x(y-1) = -y$$

$$e^x(1-y) = y$$

$$e^x = \frac{y}{1-y}$$

Donc $x = \ln\left(\frac{y}{1-y}\right)$

Bilan : $\forall x \in]0,1[, F^{-1}(x) = \ln(x) - \ln(1-x)$

$= \ln(x) + \ln(x-1)$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.2 / 20

Partie II -

7 -

$$\left| \underbrace{\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}}_{\geq 0} \right| \leq \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\geq 0}$$

Or: $\sum \frac{1}{n^2}$ converge

Donc: par theorème de comparaison des séries de terme général positif, $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ converge absolument

Donc: $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ converge.

8 - * f est positive
* f est continue.
* On s'intéresse à $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

Soit $A>0$, $B<0$,

alors $\int_B^A \frac{e^x}{(1+e^x)^2} = \left[\frac{e^x}{1+e^x} \right]_B^A$

$$= \frac{e^A}{1+e^A} - \frac{e^B}{1+e^B}$$

$$\xrightarrow[\substack{A \to +\infty \\ \text{puis} \\ B \to -\infty}]{} 1 - 0 = \underline{1}$$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge et vaut 1.

<u>Bilan</u>: f est bien une densité de probabilité.

On calcule sa fonction de répartition :

$G(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

Soit $B < x$

$$\int_B^x \frac{e^t}{(1+e^t)^2}\,dt = \left[\frac{e^t}{1+e^t}\right]_B^x$$

$$= \frac{e^x}{1+e^x} - \frac{e^B}{1+e^B}$$

$$\xrightarrow[B\to-\infty]{} \frac{e^x}{1+e^x} = F(x).$$

<u>Bilan</u>: F est bien la fonction de répartition associée à f.

9 - On s'intéresse à la convergence de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\,dx$$

L'intégrale est impropre en $-\infty$ et $+\infty$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = 2\int_0^{+\infty} x^2 \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$ car la fonction est paire.

<u>On</u> : $x^2 \frac{e^x}{(1+e^x)^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ (En effet : $\frac{x^4 e^x}{(1+e^x)^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$)

et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ converge par critère de Riemann.

<u>Donc</u> par théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives.

$\int_1^{+\infty} x^2 \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$ converge.

Donc par linéarité et relation de Chasles :

$2\int_0^{+\infty} x^2 \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$ converge.

<u>Bilan.</u> X admet un moment d'ordre 2,
Donc X admet une espérance et une variance.

10 - ⓐ On pose $\varphi : u \mapsto -u$
alors φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$
est strictement décroissante.

<u>Donc :</u> $\int_{-\infty}^{0} x f(x) dx = -\int_{+\infty}^{0} -x f(-x) dx$

<u>et :</u> $f(-x) = f(x)$ comme f est paire.

<u>Donc :</u> $\int_{-\infty}^{0} x f(x) dx = \int_{+\infty}^{0} x f(x) dx$

$= -\int_0^{+\infty} x f(x) dx$

ⓑ Donc

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{0} x f(x) dx + \int_0^{+\infty} x f(x) dx \\ &= -\int_0^{+\infty} x f(x) dx + \int_0^{+\infty} x f(x) dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc <u>$E(X) = 0$</u>

Prénom (s) LEA

19.2 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☒ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 07 / 08

Numéro de table 003

11 -

$V(X) = E(X^2) - \underbrace{E(X)}_{=0}$ d'après la formule de Huygens

$V(X) = E(X^2)$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx$

$= 2 \int_0^{+\infty} x^2 f(x)\,dx$ comme $x^2 f(x)$ est paire

$= 2 \int_0^{+\infty} \frac{x^2 e^x}{(1+e^x)^2}\,dx$

12 - L'intégrale est impropre en $+\infty$,

et $\underset{+\infty}{x e^{-nx}} = \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$

Or : $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ converge par critère de Riemann.

Donc : $\int_1^{+\infty} x e^{-nx}\,dx$ converge par théorème de comparaison des intégrales de fonction positives.

Donc : $\int_0^{+\infty} x e^{-nx}\,dx$ converge.

19.2 / 20

e) : Soit $A>0$,

$$\int_0^A x e^{-nx}\,dx = \left[x\left(-\frac{1}{n}e^{-nx}\right)\right]_0^A + \frac{1}{n}\int_0^A 1\times e^{-nx}\,dx$$

$$= -\left[x\left(\frac{1}{n}\right)e^{-nx}\right]_0^A + \frac{1}{n}\left[-\frac{1}{n}e^{-nx}\right]_0^A$$

$$= -\frac{A}{n}e^{-nA} + 0 - \frac{e^{-nA}}{n^2} + \frac{e^{-n0}}{n^2}$$

$$\xrightarrow[A\to+\infty]{} 0+0-0+1/n^2 = 1/n^2$$

Donc : $\boxed{\int_0^{+\infty} x e^{-nx}\,dx = 1/n^2}$

13- On pose

14- a) $R_N(x) = \dfrac{x e^{-(N+1)x}}{1+e^{-x}}$

Or : $1+e^{-x} \geq 1$.

Donc :

$$\left|\frac{x e^{-(N+1)x}}{1+e^{-x}}\right| \leq x e^{-(N+1)x}$$

i.e $|R_N(x)| \leq x e^{-(N+1)x}$.

(b) D'après l'inégalité qui précède, par croissance de l'intégrale.

$$0 \leq \int_0^{+\infty} |R_N(x)|\,dx \leq \int_0^{+\infty} x e^{-(N+1)x}\,dx = \frac{1}{(N+1)^2} \text{ d'après q° 12.}$$

<u>Donc :</u> $\frac{1}{(N+1)^2} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$

<u>Bilan :</u> Par encadrement :

$$\int_0^{+\infty} |R_N(x)|\,dx \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$$

Donc $\underline{\int_0^{+\infty} R_N(x)\,dx \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0}$

15 - D'après q° 13.

$$V(X) = 4\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \int_0^{+\infty} x e^{-nx}\,dx + \underbrace{(-1)^N \int_0^{+\infty} R_N(x)\,dx}_{\xrightarrow[N\to+\infty]{} 0}$$

$$\int_0^{+\infty} x e^{-nx}\,dx = \frac{1}{n^2}$$

Donc comme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$ d'après question 7.

Donc $V(X) = 4 \times \frac{\pi^2}{12} + 0$

$$\boxed{V(X) = \frac{\pi^2}{3}}$$

Partie 3 :

16- $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sont mutuellement indépendantes,
Donc $(X_i^2)_{i\in\mathbb{N}}$ sont mutuellement indépendantes.
d'après le lemme des coalitions.
Les X_i^2 suivent la même loi,
donc la même espérance et variance.

or : $E(X^2) = V(X) + \underbrace{(E(X))}_{=0}^2$
$= \frac{\pi^2}{3}$

Donc les X_i^2 ont toutes $\frac{\pi^2}{3}$ comme espérance

Donc : D'après la loi faible des grands nombres :

$$\boxed{V_n = \frac{X_1^2 + \cdots + X_n^2}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{P} \frac{\pi^2}{3}}$$

17-
On pose $g : x \mapsto \sqrt{3}\sqrt{x}$
g est continue
Donc $g(V_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{P} g\left(\frac{\pi^2}{3}\right) = \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{\pi^2}}{\sqrt{3}} = \pi$

Donc on peut poser $T_n = \sqrt{3 V_n}$

18- On rappelle que $F^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$.
$U(\Omega) =]0,1[$
$\left(\frac{U}{1-U}\right)(\Omega) = \mathbb{R}_+^*$ donc $F^{-1}(U)(\Omega) = \mathbb{R}$
Soit $t \in \mathbb{R}$,
$F_{F^{-1}(U)}(t) = P(F^{-1}(U) \leq t)$
$= P(U \leq \underbrace{F(t)}_{\in]0,1[})$

Prénom (s) LEA

19.2 / 20

Écricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☒ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 08 / 08

Numéro de table 003

$P(U \leq F(t)) = \underline{F(t)}$

Bilan: $F^{-1}(U)$ a bien la même loi que X.

19 -

```
def realisation_X():
    return np.log(rd.random() /(1-rd.random()))
```

20 -

```
def estimation_pi(n):
    u=0
    for k in range(1, n+1):
        u=(realisation_X(1))**2
    return np.sqrt(3*(u/n)).
```

21 - ⓐ $\forall x \in \mathbb{R}$,

$\Phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} > 0$

Donc Φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0,1[$.

Donc comme $0,975 \in]0,1[$,

Alors $\exists\, z \in \mathbb{R}$ tq $\Phi(z) = 0,975$.

De plus, $\Phi(0) = 1/2 \leq \Phi(z) = 0,975$.

Donc $0 \leq z$ par stricte croissance de Φ.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.2 / 20

Bilan : $\exists\, 3 \geq 0 \;/\; \Phi(3) = 0{,}975$
or $\Phi(3) = \int_{-\infty}^{3} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

b) $(X_i^4)_{i \in \mathbb{N}}$ sont indépendantes et de même loi,
Donc d'après le théorème central limite.
$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\frac{16 a^2}{45}}} \left(V_n - \frac{a^2}{3}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} N \text{ où } N \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1).$$

Donc : $P\left(\frac{3\sqrt{5n}}{4a^2} \left| V_n - \frac{a^2}{3} \right| \leq 3\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0{,}95$

c)
$$P\left(\left| V_n - \frac{a}{3} \right| \leq \frac{4a^2}{3\sqrt{n}} 3\right)$$
$$= P\left(-\frac{4a^2}{3\sqrt{n}} 3 \leq \frac{a^2}{3} - V_n \leq \frac{4a^2}{3\sqrt{n}} 3\right)$$
$$P\left(V_n - \frac{4a^2}{3\sqrt{n}} 3 \leq V_n - \frac{4}{3\sqrt{n}} \leq \frac{a^2}{3} \leq V_n + \frac{4}{3\sqrt{n}} \leq \frac{4a^2}{3\sqrt{n}} 3 + V_n\right)$$

Donc : $\left[V_n - \frac{4}{3\sqrt{n}} , V_n + \frac{4}{3\sqrt{n}} \right]$ est un intervalle de confiance de $\frac{a^2}{3}$

d) $\left[3\sqrt{V_n - \frac{4}{3\sqrt{n}}} \;;\; 3\sqrt{V_n + \frac{4}{3\sqrt{n}}} \right]$ est un intervalle de confiance de a.

22 - L'estimateur de a est plus proche de la valeur a que l'intervalle de confiance et il se trouve toujours à l'intérieur de l'intervalle de confiance.

23 - L'estimateur est bien dans l'intervalle de confiance proposé et il est proche à plus de 95 %..