ECRICOME PREPA 2023 - ECT - Technologique

Mathématiques option technologique Mathématiques

ABDELHALIM

Note de délibération : 19.02 / 20

Prénom (s) ABDELHALIM

19.02 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 01 / 02

Numéro de table 75

Exercice 1

Partie 1

1)
```
Import numpy as np
def suite(n, U1):
    U = U1
    For k in range(2, n+1)
        U = (5/12)*U + 1/3
    return U
```

2) a) Résolvons pour $x \in \mathbb{R}$, $x = \frac{5}{12}x + \frac{1}{3}$

$x = \frac{5}{12}x + \frac{1}{3} \iff x - \frac{5}{12}x = \frac{1}{3}$

$\iff \frac{7}{12}x = \frac{1}{3} \iff x = \frac{1}{3} \times \frac{12}{7}$

$\iff x = \frac{4}{7}$

D'où $\ell = \frac{4}{7}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.02 / 20

b) $V_{n+1} = U_{n+1} - \ell \iff V_{n+1} = \frac{5}{12} U_n + \frac{1}{3} - \frac{4}{7}$

$\iff V_{n+1} = \frac{5}{12} U_n - \frac{5}{21}$

$\iff V_{n+1} = \frac{5}{12}\left(U_n - \frac{4}{7}\right)$

$\iff V_{n+1} = \frac{5}{12} V_n$

D'où $(V_n)_{n \geq 1}$ est une suite géométrique de raison $\frac{5}{12}$

c) $V_n = V_1 \times \left(\frac{5}{12}\right)^{n-1}$

d) On sait que $V_n = U_n - \ell$

donc $U_n = V_n + \ell \iff U_n = \left(U_1 - \frac{4}{7}\right) \times \left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} + \frac{4}{7}$

$\iff U_n = U_1 \times \left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} - \frac{4}{7} \times \left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} + \frac{4}{7}$

Partie 2

3) a) $A \times X_1 = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 \\ 36 \end{pmatrix} = 12 \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

$A \times X_2 = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) On a d'après la question précédante que
$A \times X_1 = 12\, X_1$

donc 12 est une valeur propre de A associées au X_1 comme vecteur propre (X_1 étant différente de la matrice nulle

De plus, on a $A \times X_2 = 5 \times X_2$

Alors 5 est une valeur propre de A associé au vecteur propre X_2 (X_2 étant différente de la matrice nulle)

4) $Det(P) = 4 - (-3) = 7 \neq 0$

D'où P est inversible

$P^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = Q$

5) $PD = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 & -5 \\ 36 & 5 \end{pmatrix}$

$PDP^{-1} = PDQ = \begin{pmatrix} 48 & -5 \\ 36 & 5 \end{pmatrix} \times \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

$PDQ = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 63 & 28 \\ 21 & 56 \end{pmatrix}$

$PDQ = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} = A$

On bien $A = PDP^{-1}$

6) posons $P(n)$: " $A^n = PD^nP^{-1}$ "

Pour $n = 0$: on a d'une part $A^0 = I$ (par convention)
et d'autre part $PD^0P^{-1} = PIP^{-1}$
$= PP^{-1} = I$

on $P(0)$ est vérifiée

supposons que pour un n fixé de $\mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie

d'après l'hypothèse de récurrence et la question précédante, il vient :

$A^n \times A = (PD^nP^{-1})(PDP^{-1})$
Donc $A^{n+1} = PD^nP^{-1}PDP^{-1}$
Alors $A^{n+1} = PD^nIDP^{-1}$
D'où $A^{n+1} = PD^nDP^{-1}$
On obtient donc $A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$
Alors $P(n+1)$ est bien vérifiée
Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$: " $A^n = PD^nP^{-1}$ " est vraie
$\forall n \in \mathbb{N}$,

7) a) $P^{-1}X = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Prénom (s) ABDELHALIM

19.02 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 02 / 02

Numéro de table 75

b) $A^n X = PD^n P^{-1} X$

(D est une matrice diagonale)

$$PD^n = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 12^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix}$$

$$PD^n = \begin{pmatrix} 4 \times (12)^n & (-1) \times 5^n \\ 3 \times (12)^n & 5^n \end{pmatrix}$$

$$PD^n P^{-1} X = \begin{pmatrix} 4 \times (12)^n & (-1) \times 5^n \\ 3 \times (12)^n & 5^n \end{pmatrix} \times \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 4 \times (12)^n + (-1) \times 5^n \times (-3) \\ 3 \times (12)^n + (-3) \times 5^n \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 4 \times (12)^n + 3 \times 5^n \\ 3 \times (12)^n + (-3) \times 5^n \end{pmatrix}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.02 / 20

Partie 3 :

8) On sait que $P(A_1) = a_1 = 1$

donc $P(B_1) = b_1 = 0$ (Il est impossible qu'il pleuve ~~au~~ jour 1

$a_2 = \frac{3}{4}$ (car il faisait beau au jour 1, et on sait que s'il faisait beau au jour n, il fera beau au lendemain avec une probabilité de $\frac{3}{4}$)

$b_2 = 1 - a_2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

car : $a_2 + b_2 = 1$ (du fait que $\{A_2, B_2\}$ est un système complet d'évènement)

9) Sait $\{A_n, B_m\}$ un système complèt d'évènement, donc selon la formule de probabilité totale :

$$P(A_{n+1}) = P_{A_n}(A_{n+1}) \times P(A_n) + P_{B_m}(A_{n+1}) \times P(B_n)$$

$$P(A_{n+1}) = \frac{3}{4} \times P(A_n) + \frac{1}{3} P(B_m)$$

car on sait que s'il faisait beau au jour n il fera beau au jour n+1 avec une probabilité de $\frac{3}{4}$, et s'il pleut il fera beau au jour (n+1) avec une probabilité de $\frac{1}{3}$

De même, $P(B_{m+1}) = P_{B_m}(B_{m+1}) \times P(B_n) +$

$P_{A_n}(B_{m+1}) \times P(A_n)$

$= \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times P(B_n) + \left(1 - \frac{3}{4}\right) \times P(A_n)$

$$P(B_{m+1}) = \frac{2}{3} P(B_m) + \frac{1}{4} P(A_n)$$

C'est la même logique que dans $P(A_{n+1})$ sauf qui ici on se sert des évènements contraires $\left(P_{A_n}(B_{n+1}) + P_{A_n}(A_{n+1}) = 1 \quad \left(P_{B_m}(B_{m+1}) + P_{B_m}(A_{n+1})\right)\right)$

b) $M \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{12} A \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 9a_n + 4b_n \\ 3a_n + 8b_n \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \frac{3}{4} a_n + \frac{1}{3} b_n \\ \frac{1}{4} a_n + \frac{2}{3} b_n \end{pmatrix}$

$M \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}$

$($ $a_{n+1} = P(A_{n+1})$ et $b_{n+1} = P(B_{n+1})$

c) On sait que $\{A_n, B_n\}$ est un système

complèt d'évènement :

Donc $P(A_n) + P(B_n) = a_n + b_n = 1$

10) a) posons $P(n)$: " $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = M^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ "

Pour $n = 1$: on a d'une part $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

et d'autre part $M^{1-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = I \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Donc $P(1)$ est vraie

Prénom (s) ABDELHALIM

19.02 / 20

Écricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Feuille 03/07

Numéro de table 75

Supposons que, pour un n de $\mathbb{N}^*$, $P(n)$ est vraie

D'après la question précédante et l'hypothèse de récurrence ; il vient :

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = M \times M^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = M^n \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

D'où $P(n+1)$ est vérifiée

Donc selon le raisonnement par récurrence on obtient que $P(n)$: " $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = M^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ " $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

b) $M^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} A^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\left(\frac{1}{12} \times A^{n-1} \times X\right)$

$$= \frac{1}{12} \times \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 4 \times (12)^{n-1} + 3 \times 5^{n-1} \\ 3 \times (12)^{n-1} + (-3) \times 5^{n-1} \end{pmatrix}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.02 / 20

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{7}\times\frac{1}{12}\times 4\times(12)^{n-1} + \frac{1}{7}\times\frac{1}{12}\times 3\times(5^{n-1}) \\ \frac{1}{7}\times\frac{1}{12}\times 3\times(12)^{n-1} + \frac{1}{7}\times\frac{1}{12}\times(-3)\times 5^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{21}\times(12)^{n-1} + \frac{1}{28}\times 5^{n-1} \\ \frac{1}{28}\times(12)^{n-1} + \frac{-1}{28}\times 5^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$M^{n-1}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

Donc, il vient : $\begin{cases} a_n = \frac{1}{21}\times(12)^{n-1} + \frac{1}{28}\times 5^{n-1} \\ b_n = \frac{1}{28}\times(12)^{n-1} + \frac{-1}{28}\times 5^{n-1} \end{cases}$

11) $a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{3}b_n \Leftrightarrow a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{3}(1-a_n)$

(car selon la question 9.c $a_n + b_n = 1$)

$\Leftrightarrow a_{n+1} = \frac{3}{4} - \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow a_{n+1} = \frac{5}{12}a_n + \frac{1}{3}$

b)

On sait d'après la question (2.d) de la première partie

$$U_n = \left(U_1 - \frac{4}{7}\right) \times \left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} + \frac{4}{7}$$

On sait que $U_{n+1} = \frac{5}{12} U_n + \frac{1}{3}$

et $a_{n+1} = \frac{5}{12} a_n + \frac{1}{3}$

D'où $a_n = \left(a_1 - \frac{4}{7}\right) \times \left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} + \frac{4}{7}$

$$= \left(1 - \frac{4}{7}\right) \times \left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} + \frac{4}{7}$$

$$a_n = \frac{3}{7} \times \left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} + \frac{4}{7}$$

c) On sait que $a_n + b_n = 1$

Donc : $b_n = 1 - \frac{3}{7} \times \left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} - \frac{4}{7}$

1) $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{3}{7} \left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} + \frac{4}{7}$

$$= \frac{4}{7}$$

Car on a $\left|\frac{5}{12}\right| < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{5}{12}\right)^n = 0$

$\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = 1 - \frac{3}{7} \times \left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} - \frac{4}{7}$

$$= 1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7}$$

13) Posons X une variable aléatoire qui suit une loi Binomiale de paramètre ~~P~~ 10 et $P(A_n)$

X_n compte les jours des 10 jours du séjour faisant beau. $(X \hookrightarrow B(10, P(A_n)))$

~~on veut $P(X=9)$~~

Donc $P(X=K) = \binom{10}{K}\left(\frac{3}{7}\left(\frac{5}{19}\right)^{n-1} + \frac{4}{7}\right)^K \times$

$\left(1 - \left(\frac{3}{7}\right) \times \left(\frac{5}{19}\right)^{n-1} - \frac{4}{7}\right)^{10-K}$

Donc on veut

$P(X=9) = \cancel{\frac{3}{7}\left(\frac{5}{19}\right)^n} \binom{10}{9} \times \left(\frac{3}{7} \times \left(\frac{5}{19}\right)^{n-1} + \frac{4}{7}\right)^9$

$\times \left(1 - \left(\frac{3}{7}\right) \times \left(\frac{5}{19}\right)^{n-1} - \frac{4}{7}\right)$

$10 \times \left(\frac{3}{7} \times \left(\frac{5}{19}\right)^{n-1} + \frac{4}{7}\right)^9 \times \left(1 - \left(\frac{3}{7}\right) \times \left(\frac{5}{19}\right)^{n-1} - \frac{4}{7}\right)$

b) on veut $P(X=0)$

Prénom (s) ABDELHALIM

19.02 / 20

Ecricome Épreuve : Math

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 04 / 07

Numéro de table 75

Commencez à composer dès la première page

Exercice 2
Partie 1

1) on sait $Df = \{ \mathbb{R} / \underbrace{1+e^x > 0}_{\text{vrai } \forall x \in \mathbb{R}} \}$

Donc $Df = \mathbb{R}$

2) on a $f'(x) = \left(\ln(e^x+1) \right)'$

$$= \frac{(e^x+1)'}{e^x+1} = \frac{e^x}{e^x+1} \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

$\frac{e^x}{e^x+1} > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ donc f' est positive sur $\mathbb{R}$

D'où f est croissante sur $\mathbb{R}$

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \ln(1+e^x) = 0$

car : $\lim\limits_{x \to -\infty} 1+e^{x} = 1$ ($\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ par croissance comparée)

et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1) = 0$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.02 / 20

Donc $(\mathcal{C}f)$ admet ~~admet~~ une asymptote horizontale d'équation $y=0$ au voisinage de $-\infty$

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1+e^x) = +\infty$

Car $\lim\limits_{x \to +\infty} 1+e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$

b) ~~$f(x) = \ln(1+e^x) = \ln$~~

$$x + \ln(1+e^{-x}) = \ln(e^x) + \ln(1+e^{-x})$$

$$= \ln(e^x(1+e^{-x}))$$

$$x + \ln(1+e^{-x}) = \ln(e^x+1) = f(x)$$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - y = \lim\limits_{x \to +\infty} x + \ln(1+e^{-x}) - x$

$$= \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1+e^{-x})$$

$$= 0$$

Car : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ et $\ln(1+0) = 0$

Donc la droite (D) d'équation $y=x$ est asymptote (oblique) à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ en $+\infty$

a) $f(x) - x \Leftrightarrow \ln(1+e^x) - x$

$\ln(1+e^x) - x > \Leftrightarrow \ln(1+e^x) - (\ln e^x)$

$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right) > 0$

(par croissance de la ~~fonction~~ logarithmique) $\frac{1+e^x}{e^x} > 1$ $(1+e^x > e^x)$

Donc $f(x) - y > 0$ $(\forall x \in \mathbb{R})$

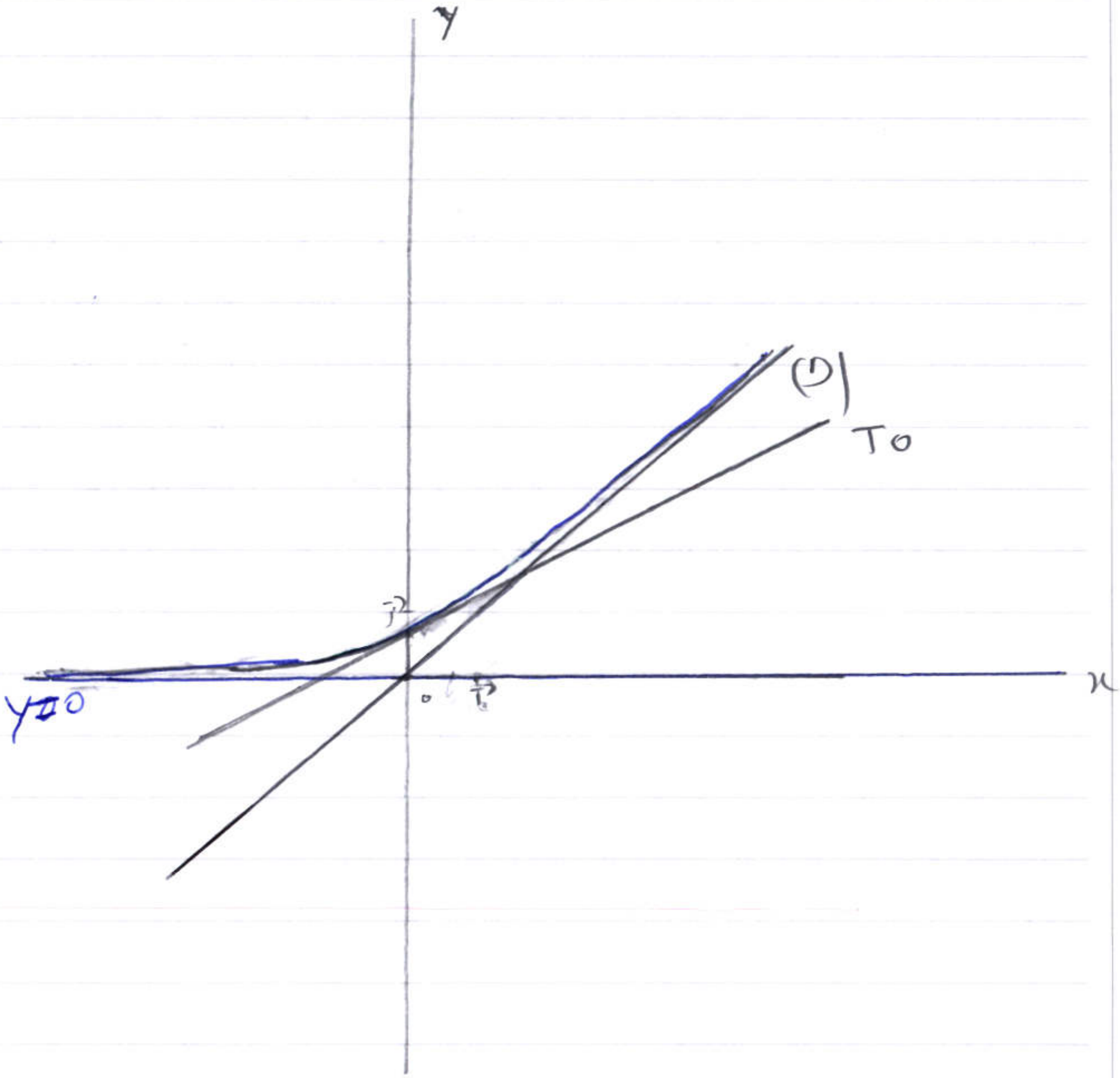
alors (D) est en-dessous de $(\mathcal{C}_f)$ sur $\mathbb{R}$

5) $(T_0) : y = f'(0)(x-0) + f(0)$

$: y = \frac{1}{2}x + \ln(2)$

6) a)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	0	$\ln(2)$	$+\infty$



Partie B :

7) a) $g_{n+1}(x) - g_n(x) = \ln\left(1 + e^{-(n+1)x}\right) - \ln\left(1 + e^{-nx}\right)$

$$= \ln\left(\frac{1 + e^{-(n+1)x}}{1 + e^{-nx}}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1 + e^{-nx} \times e^{-x}}{1 + e^{-nx}}\right)$$

$$= \ln\left(1 + e^{-nx}\right) + \ln\left(e^{-x}\right) - \ln\left(1 + e^{-nx}\right) = -x$$

Prénom (s) ABDELHALIM

19.02 / 20

Ecricome Épreuve : math

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 05 / 07

Numéro de table 75

or, $x \in [0,1]$ donc $-x \leq 0$ d'où $g_{n+1}(x) \leq g_n(x)$

b) On en déduit : (Par croissance de l'intégrale) $\int_0^1 g_{n+1}(x)\,dx \leq \int_0^1 g_n(x)\,dx$

donc $I_{n+1} \leq I_n$

Alors $(I_n)_{n \geq 0}$ est décroissante

c) $g_n(x) = \ln(1+e^{-nx})$

Soit $x \in [0,1]$: $0 \leq x \leq 1 \iff -n \leq -nx \leq 0$

(Par croissance de de l'exponentielle) $\iff e^{-n} \leq e^{-nx} \leq 1$

$\iff 1+e^{-n} \leq 1+e^{-nx} \leq 2$

~~$\iff \leq \ln(e^{-nx}+1) \leq \ln(2)$~~

$\iff \ln(1+e^{-n}) \leq \ln(1+e^{-nx}) \leq \ln(2)$

Par croissance de l'intégrale

$I_n \geq \int_0^1 \ln(1+e^{-n})\,dx$

$I_n \geq [\quad x \quad]_0^1 \ln(1+e^{-n})$

$I_n \geq \ln(1+e^{-n}) \times 1$

I_n est donc minorée par $\ln(1+e^{-n})$
Alors $(I_n)_{n\geq 0}$ est convergente (décroissante

d'après la question précédente)

8) a) $I_n = \int_0^1 \ln(1+e^{-nx})\, x(x)'\, dx$

$= \left[x \ln(1+e^{-nx})\right]_0^1 - \int_0^1 x \times \frac{(1+e^{-nx})'}{1+e^{-nx}} dx$

$= \ln(1+e^{-n}) - \int_0^1 x \frac{-n e^{-nx}}{1+e^{-nx}} dx$

$= \ln(1+e^{-n}) + n \int_0^1 \frac{x e^{-nx}}{1+e^{-nx}} dx$

b)

c) $\int_0^1 x e^{-nx} \, dx = \int_0^1 x \left(\frac{-1}{n} e^{-nx}\right)' dx$

$$= \left[\frac{-1}{n} x e^{-nx}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{-1}{n} e^{-nx} \, dx$$

$$= \left[\frac{-e^{-n}}{n}\right] + \frac{1}{n}\left[\frac{-1}{n} e^{-nx}\right]_0^1$$

$$= \frac{-e^{-n}}{n} + \frac{1}{n}\left(\frac{-1}{n}\right)(e^{-n}-1)$$

$$= \frac{-e^{-n}}{n} + \frac{1}{n} \times \frac{1-e^{-n}}{n}$$

$$= \frac{-e^{-n}}{n} + \frac{1-e^{-n}}{n^2}$$

d) $\lim_{x \to +\infty} \ln(1+e^{-x}) = 0$

$\lim_{n \to +\infty} -e^{-n} + \frac{1-e^{-n}}{n} = 0$

car $\lim_{n \to +\infty} -e^{-n} = 0$

$\cancel{\lim_{n \to +\infty} \frac{e^{-n}-1}{-n}}$

~~Posons~~ $\cancel{n = \frac{1}{u}}$

~~Donc~~ $\cancel{\lim_{u \to 0} \frac{e^{\frac{1}{u}}-1}{\frac{1}{u}}}$

$\lim_{n \to +\infty} \frac{e^{-n}-1}{-n} = 0$

Donc par théorème d'encadrement $\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$

9) a)
```
Import numpy as np
def gn(n, x):
    return np.log(1 + np.exp((-1)*n*x))
```

b) On peut conjecturer que la valeur approché de I_n à 10^{-7} près est 0,82

Prénom (s) ABDECMALFM

19.02 / 20

Ecricome Épreuve : Math

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 06 / 07

Numéro de table 75

Exercice 3

1/ On a f continue et nulle sur $]-\infty;0[$ (fonction nulle) et positive et continue sur $[S;+\infty[$ or, $S \geq 0$ (continue comme une fonction rationnelle)
D'où $f(x) \geq 0$ $(\forall x \in \mathbb{R})$ et continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en S

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{S} 0\,dx + \int_{S}^{+\infty} \frac{2S^2}{x^3}\,dx$$
(Chasles)
$$= \frac{2S^2}{-2}\left[\quad x^{-2} \quad\right]_S^{+\infty}$$
$$= S^2 \left(~~\bullet~~ \quad S^{-2} \right) = S^2 \times S^{-2} = 1$$

D'où f est une densité

2/ Par définition $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

pour $x < S$: $f(t) = 0$ donc $F(x) = 0$

19.02 / 20

pour $x \geqslant 5$ $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

(Chasles) $= \int_{-\infty}^{5} 0\,dt + \int_{5}^{x} \frac{2\,5^2}{t^3}\,dx$

$= \frac{2\,5^2}{-2}\left[\quad t^{-2} \quad\right]_5^x$

$= -5^2\left(\cancel{x}\,5^{-2} - \cancel{x}^{-2}\right)$

$= \quad -1 + \frac{x^2}{5^2}$

3)

x	5		$+\infty$
$F(x)$	0	$\nearrow$	1

4) F continue (car dérivable) sur $[8 + \infty[$
et elle y est croissante
Donc F réalise une bijection de $[8 + \infty[$
vers $F([8 ; +\infty[) = [0 ; 1[$

b) $0 \leq y < 1 \iff 0 \leq 1 - y \leq 1$

$$\iff 1 \leq \sqrt{\frac{1}{1-y}}$$

$$\iff 8 \leq 8\sqrt{\frac{1}{1-y}}$$

Donc $G(y) \in [8 ; +\infty[$.

c) $F(G(y)) = 1 - \left(\dfrac{8}{8\sqrt{\frac{1}{1-y}}}\right)^2$

$$= 1 - \frac{1}{\frac{1}{1-y}}$$

$F(G(y)) = y$

5) fonction de répartition d'une loi uniforme sur $[0, 1]$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{x-0}{1-0} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

$$F(x) \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

b) $P(U \leq F(n)) =$

Prénom (s) ABDELHALIM

19.02 / 20

Ecricome Épreuve : Math

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 07 / 07

Numéro de table 75

6) $S = U$

7) $E(S)$ existe si $\int_{+\infty}^{+\infty} x f(x) dx$ converge

~~E(S)=~~

$$2S^2\int_{S}^{+\infty} x^{-2} \, dx = 2S^2 \left[-x^{-1} \right]_S^{+\infty}$$
$$= 2S^2 \left(\frac{1}{S} + 0 \right)$$
$$= 2S$$

Donc $E(S) = 2S$

8) ~~Sachant~~ $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx$

$2S^2\int_{S}^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ Il s'agit d'une ~~série~~ intégrale de Riemann avec $\alpha = 1$

donc $2S^2\int_{S}^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ diverge

alors S n'admet pas de variance

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.02 / 20

9) $F(S \geq \frac{3}{2}s) = 1 - F(\frac{3}{2}s)$

$= 1 - \left(1 - \left(\frac{s}{\frac{3}{2}s}\right)^2\right)$

$= \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$

10) $N_n \hookrightarrow \left(n , \frac{4}{9}\right)$

11) $E(N_n) = n \times \frac{4}{9}$

$V(N_n) = n \times \frac{4}{9} \times \frac{5}{9} = \frac{n\,20}{81}$

12) $P(N_n \leq 2) = P(N_n = 1) + P(N_n = 2)$

$= \binom{n}{1}\left(\frac{4}{9}\right)^1 \times \left(\frac{5}{9}\right)^{n-1} + \binom{n}{2} \times \left(\frac{4}{9}\right)^2 \times \left(\frac{5}{9}\right)^{n-2}$

$= n\left(\frac{4}{9}\right) \times \left(\frac{5}{9}\right)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} \times \left(\frac{4}{9}\right)^2 \times \left(\frac{5}{9}\right)^{n-2}$

13) $E(M_n) = E\left(\frac{1}{2n}\left(S_1 + S_2 \cdots S_n\right)\right)$

par linéarité $= \frac{1}{2n} \left(E(S_1) + E(S_2) + E(S_n)\right)$

$= \frac{1}{2n} \times 2s =$