ECRICOME PREPA 2023 - ECT - Technologique

Mathématiques option technologique Mathématiques

BAPTISTE

Note de délibération : 20 / 20

Prénom (s) BAPTISTE GEORGES

20 / 20

Écricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 01 /

Numéro de table 007

Exercice 1

Partie 1

1)
```
for k in range(2 : n+2)
    u = (5/12)*u + 1/3
```

2/a) $\forall x \in \mathbb{R},\ x = \frac{5}{12}x + \frac{1}{3}$

donc $\frac{7x}{12} = \frac{1}{3}$

et $7x = 4$

donc $x = \frac{4}{7}$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x = \frac{5}{12}x + \frac{1}{3}$ a pour solution ℓ où $\ell = \frac{4}{7}$

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = u_n - \ell$ et $u_n = v_n + \ell$

$= u_n - \frac{4}{7}$

Ainsi, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{4}{7}$

$$= \frac{5}{12}u_n + \frac{1}{3} - \frac{4}{7}$$

$$= \frac{5}{12}u_n + \frac{7}{21} - \frac{12}{21}$$

$$= \frac{5}{12}u_n - \frac{5}{21}$$

$$= \frac{5}{12}\left(v_n + \frac{4}{7}\right) - \frac{5}{21}$$

$$= \frac{5}{12}v_n + \frac{20}{84} - \frac{20}{84}$$

$$= \frac{5}{12}v_n$$

$\boxed{\text{Ainsi } (v_n) \text{ est une suite géométrique de raison } \frac{5}{12}.}$

$\boxed{\text{c) } \forall n \in \mathbb{N},\ v_n = v_1 \times \left(\frac{5}{12}\right)^n}$

d) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n + \ell$

$$= v_1 \times \left(\frac{5}{12}\right)^n + \frac{4}{7}$$

$$= \left(u_1 - \frac{4}{7}\right) \times \left(\frac{5}{12}\right)^n + \frac{4}{7}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \left(u_1 - \frac{4}{7}\right) \times \left(\frac{5}{12}\right)^n + \frac{4}{7}}$$

Partie 2

3) a) $AX_1 = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 \\ 36 \end{pmatrix} = \boxed{12X_1}$

$AX_2 = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9\times(-1)+4\times 1 \\ 3\times(-1)+8\times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix} = \boxed{5X_2}$

b) Ainsi $X_1 \neq 0$ donc X_1 est un vecteur propre de A et sa valeur propre associée est 12

De plus, $X_2 \neq 0$ donc X_2 est un vecteur propre de A et sa valeur propre associée est 5

4) On a $P = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

$Det(P) = 4\times 1 - (-1)\times 3 = 4+3 = 7$

Ainsi $det(P) \neq 0$ donc P est inversible.

Donc P^{-1}, l'inverse de P, est $P^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

On remarque que $P^{-1} = Q$

5) $PDP^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 48 & -5 \\ 36 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 63 & 28 \\ 21 & 56 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$$

$$= A$$

$\boxed{\text{Ainsi } A = PDP^{-1}}$

6) Montrons par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$

Initialisation: $A^0 = I$ et $PD^0P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$ et la propriété est vraie au rang 0

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $A^n = PD^nP^{-1}$

$A^{n+1} = AA^n = PDP^{-1}PD^nP^{-1} = PDI\,D^nP^{-1} = PDD^nP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$ et la propriété est héréditaire.

Conclusion: D'après le principe de récurrence, pour tout n de $\mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$

Prénom (s) BAPTISTE GEORGES

20 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 02 /

Numéro de table 007

7/a) $P^{-1}X = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ -\frac{3}{7} \end{pmatrix}$

b) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n X = PD^nP^{-1}X$

$$= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$ (car D est diagonale)

$$= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 \times 12^n & -5^n \\ 3 \times 12^n & 5^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 \times 12^n + 3 \times 5^n \\ 3 \times 12^n - 3 \times 5^n \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ A^n X = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 \times 12^n + 3 \times 5^n \\ 3 \times 12^n - 3 \times 5^n \end{pmatrix}}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

Partie 3

8) $b_1 = P(B_1) = \boxed{0}$ (selon l'énoncé)

$$a_2 = P(A_2) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) = 1 \times \frac{3}{4} = \boxed{\frac{3}{4}}$$

$$b_2 = P(B_2) = P(A_1) \times P_{A_1}(B_2) = 1 \times \left(1 - \frac{3}{4}\right) = 1 \times \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

9) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, d'après la formule des probabilités totales dans le système complet d'évènements, $\{A_n ; B_n\}$:

$$P(A_{n+1}) = P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n) P_{B_n}(A_{n+1})$$
$$= P(A_n) \times \frac{3}{4} + P(B_n) \times \frac{1}{3}$$

$$\boxed{P(A_{n+1}) = \frac{3}{4} P(A_n) + \frac{1}{3} P(B_n)}$$

$$P(B_{n+1}) = P(A_n) \times P_{A_n}(B_{n+1}) + P(B_n) P_{B_n}(B_{n+1})$$
$$= P(A_n) \times \left(1 - \frac{3}{4}\right) + P(B_n) \times \left(1 - \frac{1}{3}\right)$$
$$= P(A_n) \times \frac{1}{4} + P(B_n) \times \frac{2}{3}$$

$$\boxed{P(B_{n+1}) = \frac{1}{4} P(A_n) + \frac{2}{3} P(B_n)}$$

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $M\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 9a_n + 4b_n \\ 3a_n + 8b_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{3}b_n \\ \frac{1}{4}a_n + \frac{2}{3}b_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}}$$

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\{A_n ; B_n\}$ forme un système complet d'évènements. Par conséquent, $P(A_n) + P(B_n) = 1$

$\boxed{\text{Ainsi } a_n + b_n = 1}$

10) a) Montrons par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = M^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Initialisation: $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $M^{1-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = M^0\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = I\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

et la propriété est vraie au rang 1.

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = M^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = MM^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = M^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et la propriété est héréditaire

$\boxed{\text{Conclusion: D'après le principe de récurrence, pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*, \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = M^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.}$

b)

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = M^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} \times A^{n-1} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} \times A^{n-1} X$$

$$= \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} \times \left(\frac{1}{7}\right) \times \begin{pmatrix} 4 \times 12^n + 3 \times 5^n \\ 3 \times 12^n - 3 \times 5^n \end{pmatrix}$$

Prénom (s) BAPTISTE GEORGES

20 / 20

ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 03 /

Numéro de table 007

Ainsi, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $a_n = \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} \times \left(\frac{1}{7}\right) \times (4 \times 12^n + 3 \times 5^n)$

$b_n = \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} \times \left(\frac{1}{7}\right) \times (4 \times 12^n + 3 \times 5^n)$

11) a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{3}b_n$

$= \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{3}(1 - a_n)$

$= \frac{3}{4}a_n - \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{3}$

$= \frac{9}{12}a_n - \frac{4}{12}a_n + \frac{1}{3}$

$= \frac{5}{12}a_n + \frac{1}{3}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} = \frac{5}{12}a_n + \frac{1}{3}$

b)

c) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n = 1 - a_n$

$$= 1 - \left(\frac{3}{7} \left(\frac{5}{12} \right)^{n-1} + \frac{4}{7} \right)$$

$$= \frac{3}{7} \left(\frac{5}{12} \right)^{n-1} + \frac{3}{7}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = \frac{3}{7} \left(\left(\frac{5}{12} \right)^{n-1} + 1 \right)}$$

12)

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} = 0$ car $\left|\frac{5}{12}\right| < 1$

Donc, par somme et produit, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{3}{7}\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} + \frac{4}{7} = \frac{4}{7}$

$$\boxed{\text{Ainsi } \lim_{n \to +\infty} A_n = \frac{4}{7}}$$

De la même manière, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{3}{7}\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} + \frac{3}{7} = \frac{3}{7}$

$$\boxed{\text{Ainsi } \lim_{n \to +\infty} b_n = \frac{3}{7}}$$

13) a) La probabilité qu'il pleuve le dernier jour et qu'il fasse beau durant les 9 précédents est $1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

b) La probabilité est la même que la précédente car ce sont les deux mêmes évènements.

Prénom (s) BAPTISTE GEORGES

20 / 20

Écricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 04 / ☐☐

Numéro de table 007

Exercice 2

Partie 1

1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $1 + e^x \geq 1$.

Ainsi $\ln(1+e^x)$ est définie sur $\mathbb{R}$.

Par conséquent, l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$

2) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (e^x + 0) \times \dfrac{1}{1+e^x}$

$$= \frac{e^x}{1+e^x}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $1+e^x \geq 0$, $e^x \geq 0$. Ainsi, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$.

Donc f est croissante sur $\mathbb{R}$.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

3) $\lim_{x \to -\infty} 1 + e^x = 1$

Donc $\lim_{X \to 1} \ln(X) = 0$

Ainsi, par composée, $\lim_{x \to -\infty} \ln(1+e^x) = 0$

Donc $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$. Ainsi la courbe de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $-\infty$.

4/a) $\lim_{x \to +\infty} 1 + e^x = +\infty$

et $\lim_{X \to +\infty} \ln(X) = +\infty$

Donc, par composée, $\lim_{x \to +\infty} \ln(1+e^x) = +\infty$

Ainsi, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1+e^{x})$

$=$

c) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) - x = x + \ln(1+e^{-x}) - x$

$= \ln(1+e^{-x})$

On $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + e^{-x} = 1$

Donc $\lim\limits_{X \to 1} \ln(X) = 0$

Et, par composée, $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1+e^{-x}) = 0$

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x) = 0$

Ainsi, la droite D d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$.

d)

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$1+e^{-x}$	+
$f(x)-x$	+

Ainsi D est au dessus de la courbe de f.

5) Tangente au point d'abscisse 0 :

$y = f'(0)(x-0) + f(0)$

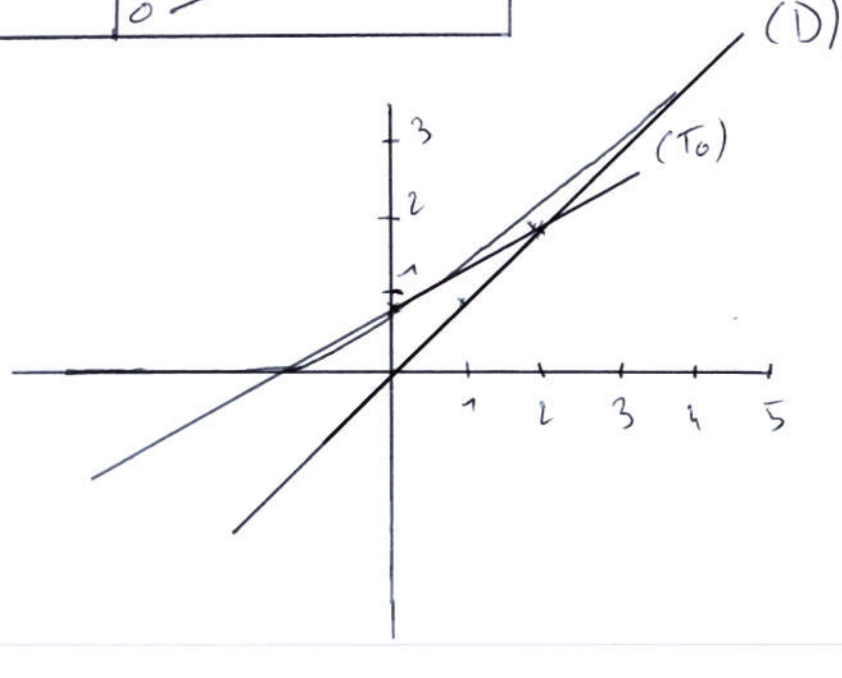
$y = \frac{1}{2}x + \ln(2)$

L'équation de la tangente en 0 est $y = \frac{1}{2}x + \ln(2)$

6) a)

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	+
f	$0 \nearrow +\infty$

b)



Prénom (s) BAPTISTE GEORGES

20 / 20

Écricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 05/

Numéro de table 007

Partie 2

7) a) $\forall x \in [0;1], \forall n \in \mathbb{N}, \quad -(n+1)x \leq -nx$

$$\Leftrightarrow e^{-(n+1)x} \leq e^{-nx}$$

$$\Leftrightarrow 1+e^{-(n+1)x} \leq 1+e^{-nx}$$

$$\Leftrightarrow \ln(1+e^{-(n+1)x}) \leq \ln(1+e^{-nx})$$

$$\Leftrightarrow g_{n+1}(x) \leq g_n(x)$$

$$\boxed{\forall x \in [0;1], \forall n \in \mathbb{N}, \quad g_{n+1}(x) \leq g_n(x)}$$

b) Par comparaison d'intégrales, $\int_0^1 g_{n+1}(x)\,dx \leq \int_0^1 g_n(x)\,dx$

Donc, $I_{n+1} \leq I_n$

$\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} \leq I_n$. Ainsi $I_{n+1} - I_n \leq 0$ et (I_n) est décroissante

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

c) $\forall x \in [0;1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\ln(1+e^{-nx}) \geq 0$ donc $g_n(x) \geq 0$

Donc par positivité de l'intégrale,

$$\int_0^1 g_n(x)\,dx \geq 0$$

et $I_n \geq 0$.

Ainsi (I_n) est décroissante et minorée donc, d'après le théorème de comparaison, (I_n) converge vers un réel noté l où $l \geq 0$.

8) Soit u et v deux fonctions telles que $u(x) = \ln(1+e^{-nx})$ et $v(x) = x$ définies sur $[0;1]$ et dérivables de dérivées continues sur $[0;1]$ avec leurs dérivées $u'(x) = \frac{-ne^{-nx}}{1+e^{-nx}}$ et $v'(x) = 1$

$$I_n = \left[x\ln(1+e^{-nx})\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{-nxe^{-nx}}{1+e^{-nx}}\,dx$$

$$= (1\times\ln(1+e^{-n})) - (0\times\ln(1+e^{0})) + n\int_0^1 \frac{xe^{-nx}}{1+e^{-nx}}\,dx \quad \text{(linéarité)}$$

$$\boxed{I_n = \ln(1+e^{-n}) + n\int_0^1 \frac{xe^{-nx}}{1+e^{-nx}}\,dx}$$

b) $\forall x \in [0;1], \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \dfrac{xe^{-nx}}{1+e^{-nx}} \leq xe^{-nx}$

Ainsi, par comparaison d'intégrales :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{xe^{-nx}}{1+e^{-nx}}\,dx \leq \int_0^1 xe^{-nx}\,dx$$

donc $0 \leq n\int_0^1 \dfrac{xe^{-nx}}{1+e^{-nx}}\,dx \leq n\int_0^1 xe^{-nx}\,dx$

et $\ln(1+e^{-n}) \leq I_n \leq \ln(1+e^{-n}) + n\int_0 xe^{-nx}\,dx$

Or, pour tout n de $\mathbb{N}$, $\ln(1+e^{-n}) \geq 0$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq I_n \leq \ln(1+e^{-n}) + n\int_0^1 xe^{-nx}\,dx}$$

c) Soit w et z deux fonctions telles que $w(x) = x$ et $z(x) = \frac{-1}{n}e^{-nx}$ définies sur $[0;1]$ et dérivables de dérivées continues sur $[0;1]$ avec leurs dérivées $w'(x) = 1$ et $z'(x) = e^{-nx}$

$$\int_0^1 xe^{-nx}\,dx = \left[\frac{-x}{n}e^{-nx}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{-1}{n}e^{-nx}\,dx$$

$$= \left(\left(\frac{-1}{n}e^{-n}\right) - \left(\frac{0}{n}e^{0}\right)\right) + \frac{1}{n}\int_0^1 e^{-nx}\,dx \text{ (linéarité)}$$

$$= \frac{-e^{-n}}{n} + \frac{1}{n}\left[\frac{-1}{n}e^{-nx}\right]_0^1$$

$$= \frac{-e^{-n}}{n} + \frac{1}{n}\left(\frac{-1}{n}e^{-n} - \left(-\frac{1}{n}e^{0}\right)\right)$$

$$= \frac{-e^{-n}}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{e^{-n}}{n^2}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^1 x e^{-nx}\, dx = \frac{-e^{-n}}{n} + \frac{1-e^{-n}}{n^2}}$$

<u>d)</u> $\forall n \in \mathbb{N}^*, n \int_0^1 x e^{-nx} = -e^{-n} + \frac{1-e^{-n}}{n}$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} -e^{-n} = 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$

De plus, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{e^{-n}}{-n} = 0$ (croissances comparées)

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} n \int_0^1 x e^{-nx}\, dx = 0$

De plus, $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + e^{-n} = 1$

Donc $\lim\limits_{X \to 1} \ln(X) = 0$

Donc, par composée, $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(1 + e^{-n}) = 0$

Ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(1+e^{-n}) + n \int_0^1 x e^{-nx}\, dx = 0$

$\boxed{\text{Donc, d'après le théorème des gendarmes, } \lim\limits_{n \to +\infty} (I_n) = 0}$

<u>g) a)</u>

$\boxed{\text{b) On peut conjecturer que } \lim\limits_{n \to +\infty} nI_n = 0{,}625}$

Prénom (s) BAPTISTE GEORGES

20 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 06 /

Numéro de table 007

Exercice 3

1) · f est continue sur $]-\infty; s[$ (constante) et sur $[s; +\infty[$ (composée de fonctions continues)

Ainsi f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre restreint de points.

· $\forall x < s,\ f(x) = 0$

$\forall x \geq s$, $s^2 > 0$. Ainsi $2s^2 > 0$ et $x^3 > 0$

$\forall x \geq s,\ f(x) > 0$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0$.

· $\int_{-\infty}^{s} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{s} 0\,dx = 0$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

Soit $A \geq s$

$$\int_s^A f(x)\,dx = \int_s^A \frac{2s^2}{x^3}\,dx$$

$$= 2s^2 \int_s^A x^{-3}\,dx \quad \text{(linéarité)}$$

$$= 2s^2 \left[\frac{x^{-2}}{-2} \right]_s^A$$

$$= 2s^2 \left(\frac{A^{-2}}{-2} - \left(\frac{s^{-2}}{-2} \right) \right)$$

$$= 2s^2 \times \frac{1}{2s^2} - \frac{2s^2}{2A^2}$$

$$= 1 - \frac{s^2}{A^2}$$

Or $\lim_{A \to +\infty} 1 - \frac{s^2}{A^2} = 1$

Donc $\int_s^{+\infty} f(x)\,dx$ converge et vaut 1.

Ainsi $\int_{-\infty}^{s} f(x)\,dx$ et $\int_s^{+\infty} f(x)\,dx$ convergent donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

D'après la relation de Chasles :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{s} f(x)\,dx + \int_{s}^{+\infty} f(x)\,dx$$

$$= 0 + 1$$

$$= 1$$

$\boxed{\text{Ainsi } f \text{ est une densité de probabilité}}$

2) $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

Soit $x < s$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$$

Soit $x \geq s$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{s} f(t)\,dt + \int_{s}^{x} f(t)\,dt \quad \text{(relation de Chasles)}$$

$$= \int_{-\infty}^{s} 0\,dt + \int_{s}^{x} \frac{2s^2}{t^3}\,dt$$

$$= 0 + 2s^2\left[\frac{x^{-2}}{-2}\right]_s^x \quad \text{(linéarité)}$$

$$= 2s^2\left(\frac{x^{-2}}{-2} - \left(\frac{s^{-2}}{-2}\right)\right)$$

$$= 2s^2 \times \frac{1}{2s^2} - \frac{2s^2}{2x^2}$$

$= 1 - \left(\frac{s}{x}\right)^2$

$$\boxed{\forall x \in \,]-\infty ; s[,\ F(x) = 0 \text{ et } \forall x \in [s, +\infty[,\ F(x) = 1 - \left(\frac{s}{x}\right)^2}$$

3) $\forall x \in [s ; +\infty[,\ F'(x) = f(x) = \frac{2s^2}{x^3}$

x	s	$+\infty$
$f(x)$	+	
F	$0 \nearrow$	1

$F(s) = 1 - \left(\frac{s}{s}\right)^2 = 1 - 1 = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \left(\frac{s}{x}\right)^2 = 1$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$

4/a) • F est strictement croissante sur $[s ; +\infty[$

• F est continue sur $[s ; +\infty[$ (composée de fonctions continues)

• $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$ et $F(s) = 0$

$$\boxed{\text{Ainsi, d'après le théorème de bijection, } F \text{ réalise une bijection de } [s ; +\infty[\text{ dans } [0 ; 1[.}$$

b) • $G(0) = s\sqrt{\frac{1}{1-0}} = s\sqrt{\frac{1}{1}} = s\sqrt{1} = s \times 1 = s$

• $\lim\limits_{y \to 1^-} \frac{1}{1-y} = +\infty$

Donc $\lim\limits_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$

Et, par composée, $\lim\limits_{y \to 1^-} \sqrt{\frac{1}{1-y}} = +\infty$

Prénom (s) BAPTISTE GEORGES

20 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 07 /

Numéro de table 007

Donc $\lim\limits_{y \to 1^-} s\sqrt{\dfrac{1}{1-y}} = +\infty$

Ainsi $\lim\limits_{y \to 1^-} G(y) = +\infty$

$\boxed{\text{Donc, pour tout } y \in [0;1[,\ G(y) \in [s;+\infty[.}$

c) $\forall y \in [0;1[$, $F(G(y)) = 1 - \left(\dfrac{s}{G(y)}\right)^2$

$$= 1 - \left(\frac{s}{s\sqrt{\frac{1}{1-y}}}\right)^2$$

$$= 1 - \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{1}{1-y}}\right)^2}$$

$$= 1 - \frac{1}{\frac{1}{1-y}}$$

$$= 1-(1-y)$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

$= 1 - 1 + y$

$= y$

$\boxed{\forall y \in [0;1],\ F(G(y)) = y}$

5) a) Soit $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0;1])$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \in [0;1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}}$$

b) $\forall x \in [s;+\infty[,\ P(V \leq x) = P(G(U) \leq x)$
$= P(F(G(U)) \leq F(x))$
$= P(U \leq F(x))$
$\boxed{= F(x)}$ (cf question 3))

$\forall x \in]-\infty; s[,\ P(V \leq x) = P(G(U) \leq x)$
$= P(F(G(U)) \leq F(x))$
$= P(U \leq F(x))$
$\boxed{= 0}$ (cf question 3))

c) Ainsi la fonction de répartition de U est donnée par :

$\forall x \in]-\infty; s[, F(x) = 0$ et $\forall x \in [s; +\infty[, F(x) = 1 - \left(\frac{s}{x}\right)^2$

$\boxed{\text{On peut donc en déduire que } U \text{ suit la même loi que } S.}$

$\boxed{\underline{6)} \quad S = (2 * s ** 2) / (x ** 3)}$

7)

$\cdot \int_{-\infty}^{s} x f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{s} x \times 0\,dx = \int_{-\infty}^{s} 0\,dx = 0$

Soit $A \geq s$

$$\int_s^A x f(x)\,dx = \int_s^A x \times \frac{2s^2}{x^3}\,dx$$

$$= 2s^2 \int_s^A x^{-2}\,dx \quad (\text{linéarité})$$

$$= 2s^2 \left[-x^{-1}\right]_s^A$$

$$= 2s^2 \left(-A^{-1} - (-s^{-1})\right)$$

$$= 2s^2 \times \frac{1}{s} - \frac{2s^2}{A}$$

$$= 2s - \frac{2s^2}{A}$$

On $\lim\limits_{A \to +\infty} 2s - \frac{2s^2}{A} = 2s$

Donc $\int_s^{+\infty} x f(x)\,dx$ converge et vaut $2s$.

Ainsi $\int_{-\infty}^{s} x f(x)\,dx$ et $\int_s^{+\infty} x f(x)\,dx$ convergent donc $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$ converge et $E(S)$ existe.

D'après la relation de Chasles :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{s} x f(x)\,dx + \int_s^{+\infty} x f(x)\,dx$$

$$= 0 + 2s$$

$$\boxed{E(S) = 2s}$$

<u>8)</u> Soit $A \geq s$.

$$\int_s^A x^2 f(x)\,dx = \int_s^A x^2 \times \frac{2s^2}{x^3}\,dx$$

$$= 2s^2 \int_s^A \frac{1}{x}\,dx \quad \text{(linéarité)}$$

$$= 2s^2 \left[\ln(x) \right]_s^A$$

$$= 2s^2 \left(\ln(A) - \ln(s) \right)$$

On $\lim\limits_{A \to +\infty} \ln(A) = +\infty$ donc $\lim\limits_{A \to +\infty} 2s^2(\ln(A) - \ln(s)) = +\infty$

Prénom (s) BAPTISTE GEORGES

20 / 20

écricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 08 /

Numéro de table 007

Ainsi $\int_s^{+\infty} x^2 f(x)\,dx$ diverge donc $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx$ diverge et $E(S^2)$ n'existe pas.

Ainsi $V(S)$ n'existe pas.

9) $P(S \geq \frac{3}{2}s) = 1 - P(S \leq \frac{3}{2}s)$

$= 1 - F(\frac{3}{2}s)$

$= 1 - \left(1 - \left(\frac{s}{\frac{3}{2}s}\right)^2\right)$

$= \left(\frac{2s}{3s}\right)^2$

$= \left(\frac{2}{3}\right)^2$

$\boxed{= \frac{4}{9}}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

10) $N_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n ; \frac{4}{9})$ car N_n représente le nombre de salariés ayant un salaire d'au moins $\frac{3}{2}$ s. De plus, les salaires sont indépendants les uns des autres.

11) $N_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n ; \frac{4}{9})$ donc $E(N_n) = n \times \frac{4}{9} = \boxed{\frac{4n}{9}}$

$V(N_n) = \frac{4n}{9} \times \left(1 - \frac{4}{9}\right) = \frac{4n}{9} \times \frac{5}{9} = \boxed{\frac{20n}{81}}$

12) La probabilité que 2 salariés au plus aient un salaire de $\frac{3}{2}$ s est donnée par $1 - P(N_n = 2)$

$$\boxed{\text{Or } 1 - P(N_n = 2) = 1 - \binom{n}{2}\left(\frac{4}{9}\right)^2\left(\frac{5}{9}\right)^{n-2}}$$

13) a) $E(M_n) = E\left(\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n} S_k\right)$

$= \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n} E(S_k)$ (linéarité)

$= \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n} 2s$

$= \frac{1}{2n} \times 2sn$

$= s$

Ainsi $\boxed{E(M_n) = s}$

b) F représente le nombre de salariés percevant 1,5 fois le SMIC

c) les différents appels du programme ne donnent pas les mêmes courbes car ils ne se basent pas sur la même variable

Les courbes permettent de conjecturer qu'en moyenne, dans l'entreprise, sont rémunérés au SMIC.