ECRICOME PREPA 2023 - ECT - Technologique

Mathématiques option technologique Mathématiques

ERWAN

Note de délibération : 18.54 / 20

Prénom (s) E R W A N

18.54 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 01 / 07

Numéro de table 016

Partie I :

Exercice 1 :

1) u =((5/12) * u) + 1/3

2) a) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x = \frac{5}{12}x + \frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow x - \frac{5}{12}x = \frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow \frac{7}{12}x = \frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow x = \frac{12}{7} \times \frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow x = \frac{4}{7}$

Par conséquent, l'équation, $x = \frac{5}{12}x + \frac{1}{3}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ admet une solution telle que $\ell = \frac{4}{7}$

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_{n+1} = u_{n+1} - \ell$ $\cancel{\Leftrightarrow v_{n+1} = \frac{5}{12}u_n + \frac{1}{3} - \frac{4}{7}}$

$\cancel{\Leftrightarrow v_{n+1} = \frac{5}{12}u_n + \frac{7}{21} - \frac{12}{21}} \cancel{\Leftrightarrow v_{n+1} = \frac{5}{12}u_n + \frac{5}{21}}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.54 / 20

Procédons par un autre raisonnement :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} = u_{n+1} - l$

$\Leftrightarrow v_{n+1} = \frac{5}{12} u_n + \frac{1}{3} - l$

$\Leftrightarrow v_{n+1} = \frac{5}{12} u_n + \cancel{\frac{1}{3}} - \frac{5}{12} l - \cancel{\frac{1}{3}}$

$\Leftrightarrow v_{n+1} = \frac{5}{12}(u_n - l)$

Par conséquent, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{5}{12}$; et de premier terme $v_1 = u_1 - l$

c) Par suite,

Comme $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique,

$$\boxed{v_n = (u_1 - l)\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1}}$$

d) On reconnait $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite arithmético-géométrique,

d'après q2b et q. 2. c.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = u_n - l \Leftrightarrow u_n = (u_1 - l)\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} - l$

Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \left(u_1 - \frac{4}{7}\right)\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} + \frac{4}{7}}$$

Partie 2 :

3) D'une part,

$$A X_1 = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 \\ 36 \end{pmatrix} = 12\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

D'autre part,

$$A X_2 = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Comme on retrouve la forme,

$$A X_2 = \lambda X_2$$

Ainsi, $\lambda_2 = 5$ et $\lambda_1 = 12$ sont des valeurs propres de la matrice A avec X_1 et X_2 leurs vecteurs propres associés.

4) On a : $P = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

Procédons par la méthode de Gauss-Jordan,

$P = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} L_1 \leftarrow L_1 + L_2$ $\qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

utilisons une autre méthode plus rapide.

$$PQ = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$PQ = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$PQ = I \iff \underline{P^{-1} = Q.}$$

Par conséquent, P est inversible avec $P^{-1} = Q$.

5) $$PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 48 & -5 \\ 36 & 5 \end{pmatrix} \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$PDP^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 63 & 28 \\ 21 & 56 \end{pmatrix}$$

$$\underline{PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} = A.}$$

6) <u>raisonnement par récurrence :</u>

Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n " $A^n = PD^nP^{-1}$ " est vrai

<u>Initialisation :</u> $n = 0$

D'une part,

$$A^0 = I$$

D'autre part,

$$PD^0P^{-1} = PP^{-1} = I$$

La proposition est initialisée.

Prénom (s) ERWAN

18.54 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 02 / 07

Numéro de table 016

Hérédité : On suppose pour un certain $n \in \mathbb{N}$,
P_n est vrai

Montrons que P_{n+1} est vrai

On a :

$$A^{n+1} = A^n \times A$$

d'après l'hypothèse de récurrence et q.5.

$$A^{n+1} = PD^nP^{-1} \times PDP^{-1}$$
$$A^{n+1} = PD^nDP^{-1}$$
$$A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$$

d'où l'hérédité.

Conclusion : P_0 est vrai
$P_n \Rightarrow P_{n+1}$

Donc,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.54 / 20

7) a) $P^{-1}X = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$P^{-1}X = \begin{pmatrix}\frac{1}{7}\\ -\frac{3}{7}\end{pmatrix}$

$P^{-1}X = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$

b) $\forall n \in \mathbb{N}$,

$A^nX = PD^nP^{-1}X$

d'après q. 7.a et comme D est une matrice diagonale

$A^nX = \begin{pmatrix}4 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}12^n & 0\\ 0 & 5^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}\frac{1}{7}$

$A^n = \begin{pmatrix}4\times 12^n & -5^n\\ 3\times 12^n & 5^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}\frac{1}{7}$

$A^n = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}4\times 12^n + 3\times 5^n\\ 3\times 12^n - 3\times 5^n\end{pmatrix}$

Partie 3 :

8) $b_1 = 0$ (car $a_1 = 1$) d'après l'énoncé.

$a_2 = \frac{3}{4}$

$b_2 = \frac{1}{4}$

9) a) A_n et B_n forment un système complet d'évènement,

d'après la formule des probabilités totales,

. $P(A_{n+1}) = P_{A_n}(A_{n+1}) \times P(A_n) + P_{(B_n)}(A_{n+1}) \times P(B_n)$

$P(A_{n+1}) = \frac{3}{4} P(A_n) + \frac{1}{3} P(B_n)$

. De même,

$P(B_{n+1}) = P_{A_n}(B_{n+1}) \times P(A_n) + P_{B_n}(B_{n+1}) \times P(B_n)$

$P(B_{n+1}) = \frac{1}{4} P(A_n) + \frac{2}{3} P(B_n)$ (d'après les évènements contraire de l'énoncé)

b) $M\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{12} A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$

$M\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} a_n + \frac{1}{3} b_n \\ \frac{1}{4} a_n + \frac{2}{3} b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}$

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $M\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}$

c) Comme a_n et b_n forment un système complet d'événements

Par définition,

$$a_n + b_n = 1 .$$

10) a) raisonnement par récurrence :

Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}^*, P_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = M^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est vrai

Initialisation : $n = 1$.

D'une part,

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ d'après q. 9.}$$

D'autre part, $M^{1-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = I \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

La proposition est initialisée,

Hérédité : On suppose pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$,
P_n est vrai
Montrons que P_{n+1} est vrai

d'après q. 9.b.

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

Prénom (s) ERWAN

ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 03 / 07

Numéro de table 016

18.54 / 20

d'après l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = M \times M^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = M^{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'où l'hérédité.

Conclusion : P_0 est vrai

$P_n \Rightarrow P_{n+1}$

Donc,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = M^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

b) Par suite,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, M^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} A^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$M^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 4 \times 12^{n-1} + 3 \times 5^{n-1} \\ 3 \times 12^{n-1} - 3 \times 5^{n-1} \end{pmatrix} \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

9/27

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.54 / 20

De fait, $M^{n-1}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{84}\begin{pmatrix}4\times 12^n + 3\times 5^n \\ 3\times 12^n - 3\times 5^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

Par conséquent,

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \begin{cases} a_n = \frac{1}{84}\left(4\times 12^n + 3\times 5^n\right) \\ b_n = \frac{1}{84}\left(3\times 12^n - 3\times 5^n\right)\end{cases}$$

11) a) d'après q. 9. a.

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{3}\times b_n$

$\Leftrightarrow a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{3}(1-a_n)$ (d'après q. 9. c)

$\Leftrightarrow a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}a_n$

$\Leftrightarrow a_{n+1} = \frac{9}{12}a_n + \frac{1}{3} - \frac{4}{12}a_n$

$\Leftrightarrow a_{n+1} = \frac{5}{12}a_n + \frac{1}{3}$, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

11) b) d'après la partie 1, on reconnait ; $a_n = u_n$

Par conséquent, d'après q. 2. d,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \left(a_1 - \frac{4}{7}\right)\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} + \frac{4}{7}$$

$$\Leftrightarrow a_n = \left(1 - \frac{4}{7}\right)\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} + \frac{4}{7}$$

$$\boxed{\Leftrightarrow a_n = \frac{3}{7}\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} + \frac{4}{7}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*}$$

c) d'après q. 9. c.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = 1 - a_n$

$$b_n = 1 - \frac{3}{7}\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} - \frac{4}{7}$$

$$\boxed{b_n = -\frac{3}{7}\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} + \frac{3}{7}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*}$$

12) d'après q. 11. b. et q. 11. c.

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{3}{7}\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} + \frac{4}{7} = \underline{\frac{4}{7}} \text{ (car } \left|\frac{5}{12}\right| < 1 \text{ et par produit)}$$

$$\lim_{n \to +\infty} b_n = \lim_{n \to +\infty} -\frac{3}{7}\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} + \frac{3}{7} = \underline{\frac{4}{7}} \text{ (car } \left|\frac{5}{12}\right| < 1 \text{ et par produit).}$$

13) a) Comme l'expérience est une Chaine de Markov, il suffit de prendre la probabilité conditionnelle de l'évènement qui précède

De fait, on pose : U : "l'évènement, il fait beau les 9 premiers jours" :

$$P(U) : \underbrace{P(A) \times P_A(A) \times P_{A \cap A}(A) \times \ldots\ldots \times P_{A \cap \ldots \cap A}(A)}_{9 \text{ fois}}$$

$P(U) = P_A(A) \times P(A)$ (d'après la chaine de Markov)

$$\boxed{P(U) = \frac{3}{4}}$$

13) b) De même, d'après la chaine de Markov,

On pose : W : il pleut le jour 10.

$\cancel{P(W) = P_A(B)}$

$P(W) = P_A(B) \times P(A) + P_B(B) \times P(B)$

$P(W) = \frac{1}{4} P(A) + \frac{2}{3} P(B)$

$P(W) = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{7}\left(\frac{5}{12}\right)^9 + \frac{4}{7}\right) + \frac{2}{3}\left(-\frac{3}{7}\left(\frac{5}{12}\right)^9 + \frac{3}{7}\right)$

$P(W) = \frac{3}{28}\left(\frac{5}{12}\right)^9 + \frac{1}{7} - \frac{2}{7}\left(\frac{5}{12}\right)^9 + \frac{1}{7}$

$$\boxed{P(W) = \frac{3}{28}\left(\frac{5}{12}\right)^9 - \frac{2}{7}\left(\frac{5}{12}\right)^9 + \frac{2}{7}}$$

Prénom (s) ERWAN

18.54 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 04 / 07

Numéro de table 016

Exercice 2 : Partie 1 :

1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1+e^{x})$

Comme, $x \mapsto \ln(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$

Par composition de fonction définie sur $\mathbb{R}$,

L'ensemble de définition D de f est $D \in \mathbb{R}_+^*$,

2) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1+e^{x})$

f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composition de fonctions continues et dérivables.

Par conséquent,

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^{x} \times \frac{1}{1+e^{x}}$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{e^{x}}{1+e^{x}}}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.54 / 20

Comme,
$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) > 0$

Alors f est (strictement) monotone sur $\mathbb{R}$.

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \ln(1+e^x)$

Comme,

$$\lim_{x \to -\infty} 1 + e^x = 1 \quad \text{(par addition des limites)}$$

Par composition de limite,

$$\lim_{X \to 1} \ln(X) = 0$$

Par conséquent,

$$\lim_{x \to -\infty} \ln(1+e^x) = 0$$

i.e. $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0}$

Donc, f admet une asymptote verticale d'équation : $y = x$

4) a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1+e^{x})$

Comme,

$$\lim_{x \to +\infty} 1+e^{x} = +\infty$$

Par composition des limites,

$$\lim_{X \to +\infty} \ln(X) = +\infty$$

Par conséquent,

$$\lim_{x \to +\infty} \ln(1+e^{x}) = +\infty$$

i.e. $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1+e^{x})$

$$f(x) = \ln\left(e^{x}\left(\frac{1}{e^{x}} + \frac{e^{x}}{e^{x}}\right)\right)$$

$$f(x) = \ln\left(e^{x}\left(1+e^{-x}\right)\right)$$

$$f(x) = \ln(e^{x}) + \ln(1+e^{-x})$$ (par les propriétés de la fonction logarithme)

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{f(x) = x + \ln(1+e^{-x})}$

c) Par suite,

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x + \ln(1+e^{-x})$$

Comme,

$$\lim_{x \to +\infty} 1 + e^{-x} = 1$$ (par addition des limites)

Par composition des limites,

$$\lim_{x \to +\infty} \ln(1 + e^{-x}) = 0$$

Par addition des limites,

$$\underline{\lim_{x \to +\infty} x + \ln(1 + e^{-x}) = +\infty}$$ (résultat cohérent avec q. 4)

Par conséquent, la droit (D) d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$.

d) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) - x = \cancel{x} + \ln(1 + e^{-x}) - \cancel{x} = \ln(1 + e^{-x})$

De fait,
$$x \longmapsto \ln(1 + e^{-x}) > 0$$

5) l'équation de la tangente (T_0) est donné par :

$$T_0 = f(0)(0) + f'(0)$$

$$T_0 = \ln(2) \times 0 + \frac{1}{2}$$

$$\boxed{T_0 = \frac{1}{2}}$$

Prénom (s) ERWAN

18.54 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

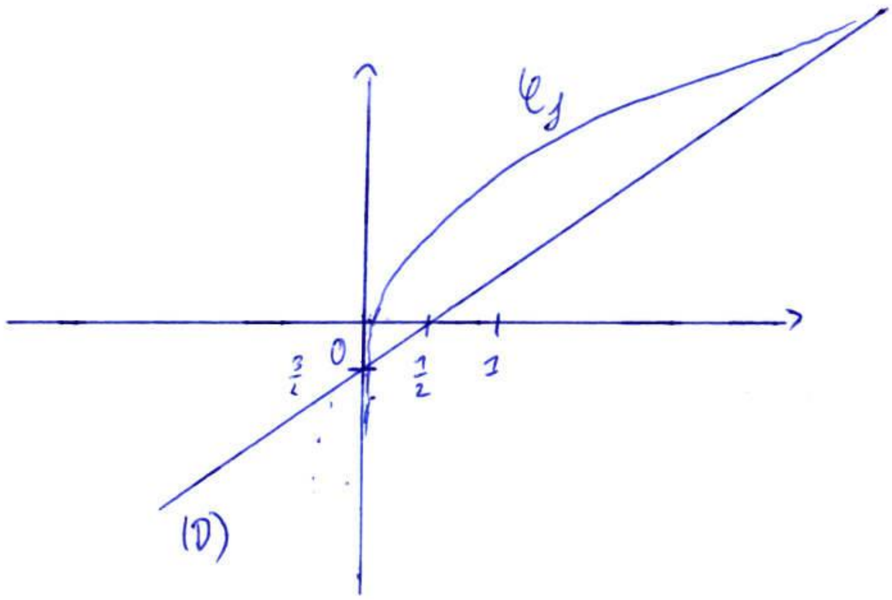
Feuille 05 / 07

Numéro de table 016

6) a) Par suite,

x	$-\infty$		$+\infty$
f'		$+$	
f	0	$\nearrow$	$+\infty$

b)



NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.54 / 20

Partie 2 :

7) a) $\forall (x,n) \in [0,1] \times \mathbb{N}$, $g_n(x) = \ln(1+e^{-nx})$

On a :

$n+1 > n$

$\Leftrightarrow -(n+1)x \leq -nx$

par croissance de la fonction expo $\Leftrightarrow e^{-(n+1)x} \leq e^{-nx}$

$\Leftrightarrow 1+e^{-(n+1)x} \leq 1+e^{-nx}$

par croissance de la fonction ln. $\Leftrightarrow \ln(1+e^{-(n+1)x}) \leq \ln(1+e^{-nx})$

$\Leftrightarrow \boxed{g_{n+1}(x) \leq g_n(x)}$

b) d'après q. 7-a, on a :

$\forall (x,n) \in [0,1] \times \mathbb{N}$,

$g_{n+1}(x) \leq g_n(x)$

Par la croissance de l'intégrale,

$$\int_0^1 g_{n+1}(x)\,dx \leq \int_0^1 g_n(x)\,dx$$

$$\iff \boxed{I_{n+1} \leq I_n \quad , \text{pour tout } n\in\mathbb{N},}$$

Donc, (I_n) est décroissante. ■

c) Comme $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et est minorée par 0 (car les bornes sont positives)

Par le théorème de croissance monotone,

$$\boxed{(I_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}}$$ ■

9) a) $\forall n\in\mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 \ln(1+e^{-nx})\,dx$

On pose,

$$\begin{cases} u(x) = \ln(1+e^{-nx}) \\ u'(x) = \dfrac{ne^{-nx}}{1+e^{-nx}} \ (\text{d'après q.2.}) \end{cases} \qquad \begin{cases} v'(x) = 1 \\ v(x) = x \end{cases}$$

Comme, u et v sont dérivables et continues sur $[0,1]$,

Par intégration par parties,

$$I_n = \Big[x\ln(1+e^{-nx})\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{x \times ne^{-nx}}{1+e^{-nx}}\,dx$$

Par la linéarité de l'intégrale,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \ln(1+e^{-n}) + n\int_0^1 \frac{x\,e^{-nx}}{1+e^{-nx}}\,dx}$$

b) Comme,

$$x e^{-nx} \leq \frac{1}{1+e^{-nx}} \Rightarrow \frac{x e^{-nx}}{1+e^{-nx}} \leq x e^{-nx}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{x e^{-nx}}{1+e^{-nx}}\,dx \leq \int_0^1 x e^{-nx}$$

d'où l'inégalité, (par produit et addition de termes positifs)

$$0 \leq \ln(1+e^{-n}) + n\int_0^1 \frac{x e^{-nx}}{1+e^{-nx}}\,dx \leq \ln(1+e^{-n}) + n\int_0^1 x e^{-nx}\,dx$$

$$\Rightarrow 0 \leq I_n \leq \ln(1+e^{-n}) + n\int_0^1 x e^{-nx}\,dx.$$

c) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^1 x e^{-nx}dx = -\frac{1}{n}\int_0^1 -x\,n e^{-nx}\,dx$ (Par linéarité de l'intégrale)

On pose,

$\begin{cases} u(x) = x \\ u'(x) = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} v'(x) = -n e^{-nx} \\ v(x) = e^{-nx} \end{cases}$

Comme, $(u,v) \in \mathcal{C}^1([0,1])$

Par intégration par parties,

$$\int_0^1 x e^{-nx}\,dx = -\frac{1}{n}\left[x e^{-nx}\right]_0^1 + \frac{1}{n}\int_0^1 e^{-nx}\,dx$$

Prénom (s) ERWAN

18.54 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 06 / 07

Numéro de table 16

De fait,

$$\int_0^1 x e^{-nx} dx = -\frac{1}{n} \times e^{-n} + \frac{1}{n}\left[-\frac{1}{n} e^{-nx}\right]_0^1$$

$$\boxed{\int_0^1 x e^{-nx} dx = -\frac{e^{-n}}{n} - \frac{1-e^{-n}}{n^2}}$$

(On constate une erreur dans le signe) ... On admet le résultat.

d) d'après q. 8.c, on obtient l'inégalité suivante,

$$0 \leq I_n \leq \ln(1+e^{-n}) + n \times \left(\frac{-e^{-n}}{n} + \frac{1-e^{-n}}{n^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq I_n \leq \ln(1+e^{-n}) - e^{-n} + \frac{1-e^{-n}}{n}$$

D'une part,

$$\lim_{n \to +\infty} \ln(1+e^{-n}) = 0 \quad \text{(par composition (partie 1))}$$

D'autre part,

$$\lim_{n \to +\infty} -e^{-n} + \frac{1-e^{-n}}{n} = 0 \quad \text{(par addition des limites)}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.54 / 20

Par conséquent,

$$\lim_{n \to +\infty} \ln(1+e^{-n}) - e^{-n} + \frac{1-e^{-n}}{n} = 0$$

Par le théorème de l'encadrement,

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} I_n = 0.}$$

9) a) import numpy as np.

n = 0

x =

b) On peut conjecturer graphiquement que $(nI_n)_{n \geq 2}$ converge en 0,83.

Exercice 3 :

1) • $\forall x \in]-\infty, 5[$, $f(x) = 0 \geq 0$.

$\forall x \in [5, +\infty[$, $f(x) = \frac{25^2}{x^3} \geq 0$ (par quotient de termes positifs)

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$.

- $x \mapsto 0$ est continue sur $]-\infty, s[$ en tant que fonction nulle.

$x \mapsto \dfrac{2s^2}{x^3}$ est continue sur $[s, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions continues sur $[s, +\infty[$,

Par conséquent, f est continue sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en 0.

- Comme f est nulle sur $]-\infty, s[$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_s^{+\infty} \frac{2s^2}{x^3} = \lim_{A \to +\infty} \left[-\frac{s^2}{x^2}\right]_s^A$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A \to +\infty} -\frac{s^2}{A^2} + \frac{s^2}{s^2} = \lim_{A \to \infty} -\frac{s^2}{A^2} + 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1.$$

Donc, f est une densité de probabilité.

2) pour $x < s$,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0.$$

pour $x \in [s, +\infty[$,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_s^x \frac{2s^2}{t^3}\,dt$$ (Comme f est nulle sur $]-\infty, s[$)

$$F(x) = \left[-\frac{s^2}{t^2}\right]_s^x = -\frac{s^2}{x^2} + \frac{s^2}{s^2}$$

$$F(x) = 1 - \left(\frac{s}{x}\right)^2$$

Donc,

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ F(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<s\\ 1-\left(\frac{s}{x}\right)^2 & \text{si } x\in[s,+\infty[\end{cases}}$$

3) Par suite, Comme $s\in\mathbb{R}^*_+$, $f(x)\geqslant 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=1$

x	s		$+\infty$
f		$+$	
F	0	$\nearrow$	1

4) a) $\forall x\in[s,+\infty[$,

. F est continue sur $[s,+\infty[$ (car dérivable sur $[s,+\infty[$)

. F est strictement monotone (d'après q. 3)

Ainsi, F réalise une bijection de $[s,+\infty[$ vers $F([s,+\infty[)=[0,1[$

b) Comme, $y\in[0,1[$,

$$0\leqslant\sqrt{\frac{1}{1-y}}<1 \quad \text{(par croissance de la fonction racine)}$$

Comme

n'aboutit pas.

c) $\forall y\in[0,1[$, $F(G(y)) = 1-\left(s\times\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{1-y}}}\right)^2$

$F(G(y)) = 1-\left(s\times\sqrt{(1-y)}\right)^2$

$F(G(y)) = 1-s^2(1-y)$

$F(G(y)) = 1-s^2+y$

$F(G(y)) = F(0)+y \Rightarrow \boxed{F(G(y))=y}$

Prénom (s) ERWAN

18.54 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 07 / 07

Numéro de table 16

5) a) Soit, $\mathcal{U} \hookrightarrow \mathcal{U}_{m \in [0,1[}$

$$P(\mathcal{U} = k) = \frac{1}{k}$$

b) $\forall x \in [s, +\infty[$,

d'après q. 4. c.

$P(V \leq x) = P(\mathcal{U} \leq F(x))$

Comme $\mathcal{U} \hookrightarrow \mathcal{U}_{[0,1[}$,

$P(\mathcal{U} \leq F(x)) = F(x)$

et, $\forall x \in]-\infty, s]$

$P(V \leq x) = P(\mathcal{U} \leq F(x)) = F(x) = 0$ (car F est nulle sur $]-\infty, s[$

c) Par suite, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(V \leq x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in]-\infty, s[\\ 1 - \left(\frac{s}{x}\right)^2 \text{ si } x \in [s, +\infty[\end{cases}$$

Soit les mêmes résultats que la réponse à question 2.
De fait V et S sont de même loi.

25/27

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.54 / 20

S = 1- (s/x)**2

7) S admet une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx$ est absolument convergente,

De fait,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{s}^{+\infty} \frac{2s^2}{x^2} dx$$ (Comme f est nulle sur $]-\infty, s[$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \to +\infty} \left[-\frac{2s^2}{x}\right]_s^A = \lim_{A \to +\infty} -\frac{2s^2}{A} + \frac{2s^2}{s}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2s$$

Donc, S admet une espérance, telle que $E(S) = 2s$.

8) S admet une variance si et seulement si S admet un moment d'ordre 2,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_{s}^{+\infty} \frac{2s^2}{x} dx = \lim_{A \to +\infty} \left[\ln(x)\right]_s^A 2s^2$$ (Par linéarité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \to +\infty} (\ln(A) - \ln(s)) \, 2s^2$$

Comme l'intégrale diverge, S n'admet pas de moment d'ordre 2 donc n'admet pas de variance.

9) $P\left(S \leq \frac{3}{2}s\right) = 1 - \left(\frac{s}{\frac{3}{2}s}\right)^2 = 1 - \frac{4}{9} = \boxed{\frac{5}{9}}$

$\boxed{P = \frac{5}{9}}$ on admet

↳ on observe un décalage de résultat avec l'énoncé.

10) Soit N_n compte le nombre d'événement succès " salaire supérieur à $\frac{3}{2}s$ " avec la probabilité $\frac{4}{9}$ au cours de n essais identiques et indépendants.

Par conséquent, $N_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{4}{9}, n\right)$

11) Par définition

$$E(N_n) = \frac{4}{9}n$$

et

$$V(N_n) = \frac{4}{9}n\left(1 - \frac{4}{9}\right)$$

$$V(N_n) = \frac{4}{9}n \times \frac{5}{9}$$

$$\boxed{V(N_n) = \frac{20n}{81}}$$

12)