ECRICOME PREPA 2023 - ECT - Technologique

Mathématiques option technologique Mathématiques

NOAH

Note de délibération : 17.1 / 20

Prénom (s) NOAH

17.1 / 20

Ecricome Épreuve : Maths option technologique

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 01 / 06

Numéro de table 006

Exercice 1

Partie 1 :

1. ~~u = 15~~

```
for k in range (n, U+1) :
    u = (5/12)*U + (1/3)
```

2. a)

$$x = \frac{5}{12}x + \frac{1}{3}$$

ssi: $x - \frac{5}{12}x = \frac{1}{3}$

ssi: $\frac{7}{12}x = \frac{1}{3}$

ssi: $x = \frac{1}{3} \times \frac{12}{7}$

ssi: $x = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$

Donc, ~~$\boxed{P = \frac{12}{21}}$~~ $\boxed{P = \frac{4}{7}}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

17.1 / 20

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\quad V_n = U_n - P$

$$V_{n+1} = U_{n+1} - P$$

$$= \frac{5}{12} U_n + \frac{1}{3} - \frac{4}{7}$$

$$= \frac{5}{12} U_n + \frac{7-12}{21}$$

$$= \frac{5}{12} U_n - \frac{5}{21}$$

$$= \frac{5}{3} \left(\frac{1}{4} U_n - \frac{1}{7} \right)$$

Partie 2 :

3 a) $AX_1 = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 \\ 36 \end{pmatrix}$

$AX_2 = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}$

b) On a d'après 3a) :

$AX_1 = \begin{pmatrix} 48 \\ 36 \end{pmatrix} = 12 \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

Comme $X_1 \neq 0$, alors X_1 est un vecteur propre de la matrice A associé à la valeur propre 12.

De même pour AX_2, on a :

$AX_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Comme $X_2 \neq 0$, X_2 est un vecteur propre de la matrice A associé à la valeur propre 5.

4. Méthode Pivot de Gauss pour l'inversibilité de P (car sur la diagonale il n'y a pas de 0, donc P est inversible) :

$3L_1$:	12	-3
$4L_2$:	12	4
$3L_1 - 4L_2$:	0	-7

$3L_1$:	3	0
$4L_2$:	0	4
$3L_1 - 4L_2$:	3	-4

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$$

$L_2 : \quad 0 \quad -7$

$7L_1 : \quad 28 \quad -7$

$L_2 - 7L_1 : \quad -28 \quad 0$

$$\begin{pmatrix} -28 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} \begin{matrix} /(-28) \\ /(-7) \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

$L_2 : \quad 3 \quad -4$

$7L_1 : \quad 7 \quad 0$

$L_2 - 7L_1 : \quad -4 \quad -4$

$$\begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} /(-28) \\ /(-7) \end{matrix}$$

Ainsi, on a :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{28} & \frac{4}{28} \\ -\frac{3}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = Q$$

5. A est diagonalisable, s'il existe une matrice P inversible et une matrice D diagonale tel que : $A = PDP^{-1}$

Pour vérifier que A est bien égale à PDP^{-1}, on doit trouver D, tel que $D = P^{-1}AP$

$$AP = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 & -5 \\ 36 & 5 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 48 & -5 \\ 36 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 84 & 0 \\ 0 & 35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $\boxed{D = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}}$

Donc, D est bien une matrice diagonale.

Prénom (s) NOAH

17.1 / 20

Ecricome Épreuve : Maths option technologique

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 02 / 06

Numéro de table 006

On a donc :

$$PD = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 & -5 \\ 36 & 5 \end{pmatrix}$$

$$PDP^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 48 & -5 \\ 36 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 63 & 28 \\ 21 & 56 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } A = PDP^{-1}}$$

6. On veut prouver par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $E(n) : A^n = PD^nP^{-1}$

Initialisation : On veut prouver que $E(n)$ est vraie pour la plus petite valeur de n possible (c'est-à-dire $n = 0$).

- $A^0 = I$
- $PD^0P^{-1} = PIP^{-1} = I$ Ainsi, $E(0)$ est vraie.

Hérédité : Supposons que pour un rang $n \in \mathbb{N}$ donné, $E(n)$ soit vraie.
Montrons que $E(n+1) : A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$ l'est aussi.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

17.1 / 20

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

$$\times A \qquad\qquad \times A$$

$$A^n \times A = PD^nP^{-1} \times A$$

Or, $A = PDP^{-1}$

Donc, $A^{n+1} = PD^nP^{-1} \times PDP^{-1}$

$$A^{n+1} = PD^n \times I\, DP^{-1}$$

$$\boxed{A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}}$$

Ainsi, on a bien démontré l'égalité $E(n+1)$.

Conclusion : Par principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

7.a)

$$P^{-1}X = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ -\frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

b) $A^nX = PD^nP^{-1}X$

D^n s'obtient en mettant à la puissance n les valeurs de sa diagonale.

Ainsi, $D^n = \begin{pmatrix} (12)^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix}$

$$PD^n = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \times 12^n & (-1) \times 5^n \\ 3 \times 12^n & 5^n \end{pmatrix}$$

D'après 7 a) $P^{-1}X = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$

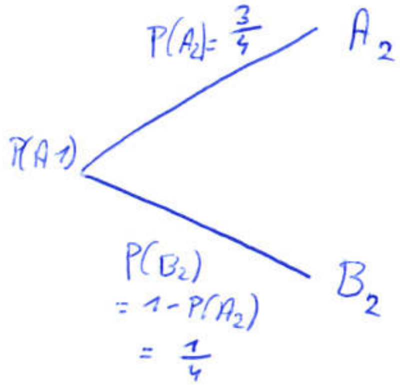
Alors, $PD^nP^{-1}X = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}4\times 12^n & (-1)\times 5^n\\ 3\times 12^n & 5^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\times 12^n + 3\times 5^n\\ 3\times 12^n - 3\times 5^n\end{pmatrix}$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n X = \begin{pmatrix}4\times 12^n + 3\times 5^n\\ 3\times 12^n - 3\times 5^n\end{pmatrix}$

Partie 3:

8. B_1 l'événement : « il pleut le jour 1 » et b_1 la probabilité $P(B_1)$
Or, d'après l'énoncé, le jour 1 il fait beau.
Donc $b_1 = P(B_1) = 0$.

Jour 1 Jour 2



Ainsi, d'après l'arbre de probabilité :

$a_2 = P(A_2) = \frac{3}{4}$ et $b_2 = P(B_2) = \frac{1}{4}$

9. a) $\{A_n ; B_n\}$ forment un système complet d'événements, on utilise la formule des probabilités totales :

$P(A_{n+1}) = P(A_n) \times P_{(A_n)}(A_{n+1}) + P(B_n) \times P_{(B_n)}(A_{n+1})$

Or, $P_{(A_n)}(A_{n+1}) = \frac{3}{4}$ et $P_{(B_n)}(A_{n+1}) = \frac{1}{3}$

Donc, $\boxed{P(A_{n+1}) = \frac{3}{4} P(A_n) + \frac{1}{3} P(B_n)}$ selon la formule des probabilités totales.

De même pour $P(B_{n+1})$, on utilise le même procédé :

$$P(B_{n+1}) = P(A_n) \times P_{(A_n)}(B_{n+1}) + P(B_n) \times P_{(B_n)}(B_{n+1})$$

Or, $P_{(A_n)}(B_{n+1}) = \frac{1}{4}$ et $P_{(B_n)}(B_{n+1}) = \frac{2}{3}$

Donc, $\boxed{P(B_{n+1}) = \frac{1}{4} P(A_n) + \frac{2}{3} P(B_n)}$

b)

$$M\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{12} A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 9a_n + 4b_n \\ 3a_n + 8b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{3}b_n \\ \frac{1}{4}a_n + \frac{2}{3}b_n \end{pmatrix}$$

Or, $\begin{pmatrix} \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{3}b_n \\ \frac{1}{4}a_n + \frac{2}{3}b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}$

Ainsi, $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$

c) Comme $\{A_n, B_n\}$ forment un système complet d'événements, il y a seulement deux ~~choix~~ choix possible, soit il fait beau, soit il pleut. Ainsi, $a_n + b_n = 1$.

10. a) On veut prouver par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a $E(n)$: $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = M^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Prénom (s) NOAH

17.1 / 20

Ecricome Épreuve : Maths option technologique

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 03 / 06

Numéro de table 006

Initialisation : On veut prouver que $E(n)$ est vraie pour la plus petite valeur de n possible (càd $n = 1$)

- $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

- $M^{1-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = M^0\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = I\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ Ainsi, $E(1)$ est vraie.

Hérédité : Supposons que pour un rang $n \in \mathbb{N}^*$ donné, $E(n)$ soit vraie.
Montrons que $E(n+1)$: $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = M^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ l'est aussi.

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = M^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Or, $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$

Donc, $M \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = M \times M^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = M^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, on a bien démontré l'égalité $E(n+1)$.

Conclusion : Par principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = M^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

17.1 / 20

b/ On a donc, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = M^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$M^{n-1} = \frac{1}{12} A^{n-1}$ Or $A^n = PD^nP^{-1}$

donc $A^{n-1} = PD^{n-1}P^{-1}$

$PD^{n-1} = \begin{pmatrix} 4\times 12^{n-1} & (-1)\times 5^{n-1} \\ 3\times 12^{n-1} & 5^{n-1} \end{pmatrix}$ d'après 7b/

$PD^{n-1}P^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4\times 12^{n-1} & (-1)\times 5^{n-1} \\ 3\times 12^{n-1} & 5^{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \cancel{\begin{pmatrix} 4\times 12^{n-1} \end{pmatrix}}$

$A^{n-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4\times 12^{n-1} + 3\times 5^{n-1} & 4\times 12^{n-1} - 4\times 5^{n-1} \\ 3\times 12^{n-1} - 3\times 5^{n-1} & 3\times 12^{n-1} + 4\times 5^{n-1} \end{pmatrix}$

Donc,

$M^{n-1} = \frac{1}{84}\begin{pmatrix} 4\times 12^{n-1} + 3\times 5^{n-1} & 4\times 12^{n-1} - 4\times 5^{n-1} \\ 3\times 12^{n-1} - 3\times 5^{n-1} & 3\times 12^{n-1} + 4\times 5^{n-1} \end{pmatrix}$

$M^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{84}\begin{pmatrix} 4\times 12^{n-1} + 3\times 5^{n-1} \\ 3\times 12^{n-1} - 3\times 5^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{22}\times 12^{n-1} + \frac{3}{84}\times 5^{n-1} \\ \frac{3}{84}\times 12^{n-1} - \frac{3}{84}\times 5^{n-1} \end{pmatrix}$

Ainsi, $a_n = \frac{1}{22}\times 12^{n-1} + \frac{3}{84}\times 5^{n-1}$

et $b_n = \frac{1}{22}\times 12^{n-1} + \frac{3}{84}\times 5^{n-1}$

~~B~~ 11. a)

12. Comme $-1 < \frac{5}{12} < 1$:

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} = 0$$

Donc, $\boxed{\lim_{n \to +\infty} a_n = \frac{4}{7}}$.

13. a) La probabilité qu'il fasse beau les 9 premiers jours donnerait :

$P_{(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_9)}(B_{10})$, c'est-à-dire qu'on ferait $1 \times \underbrace{\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \ldots \times \frac{3}{4}}_{8 \text{ fois}}$

Donc $P_{(A_1 \cap \ldots \cap A_9)}(B_{10}) = \left(\frac{3}{4}\right)^8 \times \frac{1}{4}$

b) ~~P(B10~~ $P(B_{10}) = P_{(A_9)}(B_{10}) + P_{(B_9)}(B_{10})$

Exercice 2

Partie 1 :

1. ~~Comme e^x est défini~~

2. $f(x) = \ln(1 + e^x)$ ← type $\ln(u)$ = ' donc $\frac{u'}{u}$

Ainsi, $\boxed{f'(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}}$

Prénom (s) NOAH

17.1 / 20

Écricome Épreuve : Maths option technologique

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 04 / 06

Numéro de table 006

Comme $e^x > 0$ car exponentielle est toujours positif

si : $1 + e^x \geq 1$

si : $1 + e^x > 0$

Donc sur $\mathbb{R}$, f est monotone, elle est strictement croissante.

3. $\lim\limits_{x \to -\infty} 1 + e^x = 1$

Donc, $\lim\limits_{X \to 1} \ln(X) = 0$ par composition.

$\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale, $y = 0$

4. a) $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + e^x = +\infty$

$\lim\limits_{X \to +\infty} \ln(X) = +\infty$ par composition.

b)

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

17.1 / 20

d) $f(x) - x = x + \ln(1 + e^{-x}) - x = \ln(1 + e^{-x})$

$e^{-x} < 0$

car $\frac{1}{e^{x}} < 0$

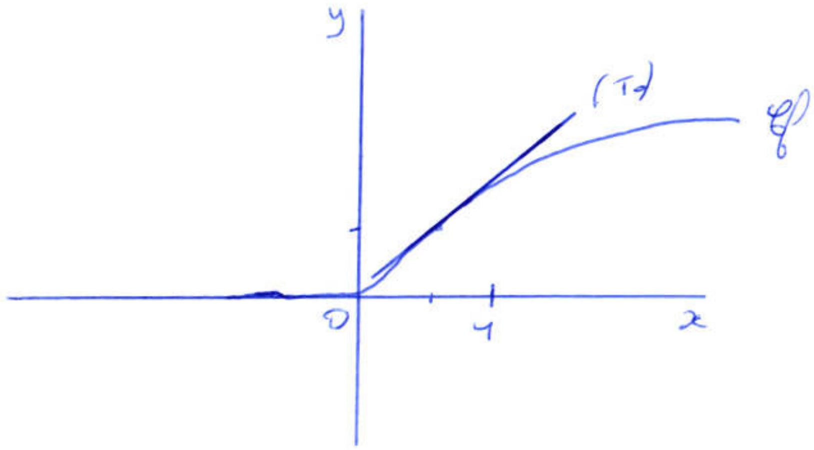
5. $y = f'(0)(x - 0) + f(0) = \frac{1}{2}(x - 0) + \ln(2)$

$$\boxed{y = \frac{1}{2}x + \ln(2)}$$

6. a)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
variations de f	0	$f(0) = \ln(2)$	$+\infty$

b)



Partie 2 :

7 a)

b) On a $g_{n+1}(x) \leq g_n(x)$

$$\int_0^1 g_{n+1}(x)\,dx \leq \int_0^1 g_n(x)\,dx$$

$$\int_0^1 g_{n+1}(x)\,dx - \int_0^1 g_n(x)\,dx \leq 0$$

donc $(I_n)_{n\geq 0}$ est décroissante, d'après la négativité de l'intégrale de deux fonctions négatives.

c) $g_n(x)$ est minorée par 0 et est ~~strictement~~ décroissante d'après 7 a), d'après 7b) (I_n) est décroissante.

Donc d'après le théorème de convergence monotone $(I_n)_{n\geq 0}$ est convergente.

8a) $$I_n = \int_0^1 1 \times \ln(1+e^{-nx})\,dx$$

On procède par intégration par parties :

$$u(x) = \ln(1+e^{-nx}) \qquad u'(x) = \frac{-ne^{-nx}}{1+e^{-nx}}$$

$$v(x) = x \qquad v'(x) = 1$$

$$\int_0^1 1\times \ln(1+e^{-nx})\,dx = [\ln(1+e^{-nx})\times x]_0^1 - \int_0^1 \frac{-ne^{-nx}}{1+e^{-nx}}\,dx$$

$\cdot$ $[\ln(1+e^{-nx})\times x]_0^1 = \ln(1+e^{-n})$

$\cdot$ $-\int_0^1 \frac{-ne^{-nx}}{1+e^{-nx}}\,dx = +n\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-nx}}\,dx$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, on a

$$I_n = \ln(1+e^{-n}) + n\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-nx}}\,dx$$

b) pour tout $n \geq 0$ $I_n \geq 0$

d'après 8a) $I_n = \ln(1+e^{-n}) + n\int_0^1 \frac{xe^{-nx}}{1+e^{-nx}}\,dx$

Ainsi, par encadrement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq I_n \leq \ln(1+e^{-n}) + n\int_0^1 xe^{-nx}\,dx$$

Prénom (s) NOAH

17.1 / 20

Écricome Épreuve : Maths option technologique

Sujet 1 ou 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 05 / 06

Numéro de table 006

d) $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + e^{-n} = 1$

donc $\lim\limits_{X \to 1} \ln(X) = 0$ par composition

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{-e^{-n}}{n} + \frac{1-e^{-n}}{n^2} = 0$ ~~(car $\frac{\ell}{+\infty} = 0$)~~

Ainsi, par somme, ~~$\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(1+e^{-n}) + n\int_0^1 x e^{-nx} dx$~~

$\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(1+e^{-n}) + n\left(-\frac{e^{-n}}{n} + \frac{1-e^{-n}}{n^2}\right) = 0$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

17.1 / 20

D'après le théorème des gendarmes et de l'encadrement de la 8b)

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} I_n = 0}$$

9. a)

```
import numpy as np

def gn (n, x) :
    g = np.log (1 + exp ** -nx)
return g
```

b) On remarque que la suite $(nI_n)_{n \geq 1}$ converge, elle plafonne un peu près à 0,83.

Exercice 3.

1. 3 conditions : positivité, continuité, convergence

▶ si $x < s$, f est nulle donc f est positive.
si $x \geq s$, comme $s > 0$, alors $\frac{2s^2}{x^3} \geq 0$, donc f est positive.

Ainsi, f est positive sur $\mathbb{R}$.

▶ Sur $]-\infty ; s[$, f est constante donc f est continue.

Sur $[5;+\infty[$, f est le quotient de deux fonctions continues, donc f est continue.

Ainsi, f est continue sur $\mathbb{R}$ ou peut-être pas en 0.

- Convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$:

Sur $]-\infty;5[$, f est nulle donc $\int_{-\infty}^{5} f(x)dx$ converge et vaut 0.

Sur $[5;+\infty[$, on doit calculer $\int_{5}^{+\infty} f(x)\,dx$:
Posons $M>0$, $\int_{5}^{M} f(x)\,dx$:

$$2\cdot 5^2 \int_5^M x^{-3}\,dx = 2\cdot 5^2\left[\frac{x^{-3+1}}{-3+1}\right]_5^M = 2\cdot 5^2\left[\frac{x^{-2}}{-2}\right]_5^M$$

$$= 2\cdot 5^2 \times \left(\frac{M^{-2}}{-2} + \frac{5^{-2}}{2}\right) = -\frac{5^2}{M^2} + 1$$

Comme $\lim\limits_{M\to+\infty} \frac{-5^2}{M^2} = 0$

alors, $\lim\limits_{M\to+\infty} \int_5^M f(x)\,dx = 0 + 1 = 1$

Ainsi, $\int_5^{+\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{M\to+\infty} \int_5^M f(x)\,dx = 1$

$\int_5^{+\infty} f(x)\,dx$ converge et vaut 1.

D'après la relation de Chasle :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{5} 0\,dx + \int_5^{+\infty} f(x)\,dx = 0 + 1 = 1$$

Donc, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge et vaut 1.
Ainsi, f est bien une densité de probabilité.

2. $$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

Il en résulte que si $x < s$ sur $]-\infty ; s[$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$$

Il en résulte que si $x \geq s$ sur $[s ; +\infty[$:
D'après la relation de Chasles :
$$F(x) = \int_{-\infty}^{s} 0\,dt + \int_{s}^{x} f(t)\,dt = 0 + 2s^2\left[\frac{t^{-2}}{-2}\right]_s^x = 1 - \left(\frac{s}{x}\right)^2$$
d'après 1.

Ainsi la fonction de répartition de S est bien ~~l~~ définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < s \\ 1 - \left(\frac{s}{x}\right)^2 & \text{sinon} \end{cases}$$

3. $$F'(x) = f(x)$$
donc sur $[s, +\infty[$, $F'(x) = \cancel{\frac{2s^2}{x}}\ \frac{2s^2}{x^3}$

D'après 1. $\frac{2s^2}{x^2}$ est strictement croissante et positive donc :

x	s		$+\infty$
$f(x)$		$+$	
variations de F	$\frac{2}{s}$	$\nearrow$	

$$f(s) = \frac{2s^2}{s^3} = \frac{2}{s}$$

$\cancel{\lim_{x \to +\infty}}$

17.1 / 20

Prénom (s) N O A H

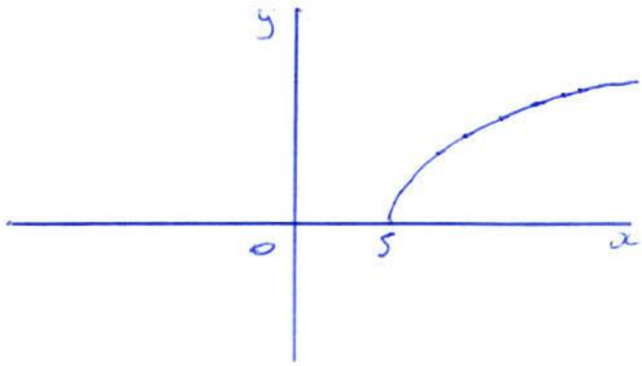
Ecricome Épreuve : Maths option technologique

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 06 / 06

Numéro de table 006



4. a) F est continue sur $[0, 1[$

F est croissante sur $[0, 1[$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$

D'après le théorème de bijection, F est bijective sur $[0, 1[$

b)

c) $F(G(y)) = \cancel{R}\ 1 - \dfrac{5^2}{5\sqrt{\frac{1}{1-y}}^2} = 1 - \dfrac{5^2}{5\frac{1}{1-y}} = \boxed{y}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

17.1 / 20

5a)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ \frac{x-0}{1-0} & si\ x \in [0;1[\quad (\text{se réécrit } x) \\ 1 & si\ x > 1 \end{cases}$$

b) $P(U \leq fx) =$

6. $5 = (x-0)/(1-0)$

7.

10. N_n compte le nombre de succès de salariés ayant un salaire horaire d'au moins $\frac{3}{2}s$. Ainsi, N_n suit une loi Binomiale de paramètre $N = n$ et $p = \frac{4}{9}$.

$$P(\cancel{X}_{N_n} = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{4}{9}\right)^k\left(\frac{5}{9}\right)^{n-k}$$

11. $E(N_n) = np = \boxed{\frac{4n}{9}}$

$$V(N_n) = np(1-p) = \frac{4n}{9}\left(1-\frac{4}{9}\right) = \frac{4n}{9} \times \frac{5}{9} = \boxed{\frac{20n}{81}}$$

12.

13. $M_n = \frac{1}{2n}(S_1 + S_2 + \dots + S_n)$

$$E(M_n) = E\left(\frac{1}{2n}(S_1 + S_2 + \dots + S_n)\right)$$

Comme $S_1, S_2, \dots, S_n$ sont des variables aléatoires indépendantes on procède par linéarité de l'espérance.

donc $E(M_n) = \frac{1}{2n} \times n \times E(S)$

$$= \frac{1}{2n} \times 2s_n = \boxed{S}$$

b)

c) Quand n tend vers $+\infty$, M_n stagne toujours autour de 1350.