PREPA Option Maths appliquées

Mathématiques appliqués Mathématiques

MANON

Note de délibération : 17.79 / 20

Prénom (s) MANON

17.79 / 20

ecricome Épreuve : Mathématiques appliquées

Sujet ☒ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 01 / 06

Numéro de table 013

Exercice 3 :

PARTIE I

1) a) Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$, montrons que la famille $\mathcal{B}$ est libre :

$$a(-1,1,0,1) + b(0,-1,1,0) + c(0,1,1,0) + d(1,0,0,1) = (0,0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a + d = 0 \\ a - b + c = 0 \\ b + c = 0 \\ a + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = a \\ a + 2c = 0 \\ b = -c \\ a = -d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ d = 0 \\ 2c = 0 \\ b = -c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

↳ car $d = a$ et $a = -d \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ d = 0 \end{cases}$

On a $a = b = c = d = 0$ la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est donc libre or elle est composée de 4 vecteurs et $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$ donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^4$

b) $f(u_1) = f(-1,1,0,1)$

$= -f(e_1) + f(e_2) + f(e_4)$

$= -(1,1,1,1) + (0,1,1,0) + (1,0,0,1)$

$= (0,0,0,0)$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

17.79 / 20

$$\begin{aligned} f(u_2) &= f(0,-1,1,0) \\ &= -f(e_2) + f(e_3) \\ &= -(0,1,1,0) + (0,1,1,0) \\ &= (0,0,0,0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(u_3) &= f(0,1,1,0) \\ &= f(e_2) + f(e_3) \\ &= (0,1,1,0) + (0,1,1,0) \\ &= (0,2,2,0) = 2u_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(u_4) &= f(1,0,0,1) \\ &= f(e_1) + f(e_4) \\ &= (1,1,1,1) + (1,0,0,1) \\ &= (2,1,1,2) = u_3 + 2u_4 \end{aligned}$$

Ainsi on obtient en notant T la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}$:

$$T = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} f(u_1) & f(u_2) & f(u_3) & f(u_4) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{array} \end{array}$$

c) P est la matrice de passage de la base $\mathcal{C}$ à la base $\mathcal{B}$

Ainsi,

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

T est la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}$ donc on a bien $A = PTP^{-1}$

2) a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 4 \\ 8 & 4 & 4 & 4 \\ 8 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$4A^2 - 4A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 8 \\ 12 & 8 & 8 & 4 \\ 12 & 8 & 8 & 4 \\ 8 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 4 \\ 8 & 4 & 4 & 4 \\ 8 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = A^3$$

b) Soit $P(n)$: " $A^n = a_n A^2 + b_n A$ "

Initialisation : pour $n = 1$,

on a $A = a_1 A^2 + b_1 A$

avec $a_1 = 0$ et $b_1 = 1$

donc $P(1)$ est vraie

Hérédité : Supposons $P(n)$ vraie pour un entier n fixé

Montron que $P(n+1)$ est vraie pour un entier n fixé

On a $A^{n+1} = A^n \times A$

$= (a_n A^2 + b_n A) \times A$

$= a_n A^3 + b_n A^2$

$= a_{n+1} A^2 + b_{n+1} A$

avec $a_{n+1} = a_n A$ et $b_{n+1} = b_n A$

~~Conclusion : $P(n)$ est vraie~~

On a $A^{n+1} = A^n \times A$

$= (a_n A^2 + b_n A) A$

$= a_n A^3 + b_n A^2$

$= a_n (4A^2 - 4A) + b_n A^2$

$= (4a_n + b_n) A^2 - 4a_n A$

$= a_{n+1} A^2 + b_{n+1} A$

avec $a_{n+1} = 4a_n + b_n$

et $b_{n+1} = -4a_n$

Prénom (s) MANON

17.79 / 20

Écricome Épreuve : Mathématiques appliquées

Sujet ☒ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 02 / 06

Numéro de table 013

3) On a $a_{n+1} = 4a_n + b_n$, résonnons par récurrence avec $P(n)$: " $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$ "

Initialisation : Avec $n=1$, $a_3 = 4$ (d'après question 2.a)
et $4a_2 - 4a_1 = 4a_2 = 4$ car $A^2 = a_2 A^2 + b_2 A$
donc $\underline{a_2 = 1}$ et $b_2 = 0$

donc $P(1)$ est vraie

Hérédité : Supposons $P(n)$ vraie pour un entier n fixé
Montrons que $P(n+1)$ est vraie pour un entier n fixé
c'est à dire que $a_{n+3} = 4a_{n+2} - 4a_{n+1}$
On a

$a_{n+3} = 4a_{n+2} + b_{n+2}$ d'après la question 2.b
$= 4a_{n+2} - 4a_{n+1}$ d'après question 2.b

Conclusion : $P(n)$ est vraie

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

17.79 / 20

3)b. On a $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0$ en posant $a_{n+2} = U_{n+2}$

$a_{n+1} = U_{n+1}$

$a_n = U_n$

on a $U_{n+2} - 4U_{n+1} + 4U_n = 0$, équation que l'on sait résoudre :

On résout $x^2 - 4x + 4 = 0$

$\Delta = 16 - 16 = 0$ donc $q = \frac{4}{2} = 2$

Ainsi, $U_n = (\alpha n + \beta) \times 2^n$

On pose $n = 1$ et $n = 2$ on a :

$$\begin{cases} U_1 = (\alpha + \beta) \times 2 \\ U_2 = (2\alpha + \beta) \times 4 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 = 2\alpha + 2\beta \\ 1 = 8\alpha + 4\beta \end{cases} \iff \begin{cases} 8\alpha + 4\beta = 1 \\ 2\alpha + 2\beta = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 8\alpha + 4\beta = 1 \\ 4\beta = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} 8\alpha = 2 \\ \beta = -\frac{1}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \frac{1}{4} \\ \beta = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Ainsi on a $u_n = \left(\frac{1}{4}n - \frac{1}{4}\right) \times 2^n \iff \boxed{a_n = \left(\frac{1}{4}n - \frac{1}{4}\right) \times 2^n}$

c) On a $b_n = a_{n+1} - 4a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$= \left(\frac{1}{4}(n+1) - \frac{1}{4}\right) \times 2^{n+1} - 4\left(\frac{1}{4}n - \frac{1}{4}\right) \times 2^n$$

$$= \frac{2^{n+1}}{4}(n+1) - \frac{2^{n+1}}{4} - n2^n + 2^n$$

$$= 2^n\left(\frac{1}{2}(n+1) - \frac{1}{2} - n + 1\right)$$

$$= 2^n\left(\frac{1}{2}n + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{2}} - n + 1\right)$$

$$\boxed{= 2^n\left(-\frac{1}{2}n + 1\right)} = -n2^{n-1} + 2^n$$

4) On a $a_n = \left(\frac{1}{4}n - \frac{1}{4}\right)2^n = \frac{2^n}{4}n - \frac{2^n}{4} = n2^{n-2} - 2^{n-2}$

$$A^n = a_n A^2 + b_n A = (n2^{n-2} - 2^{n-2})\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + (-n2^{n-1} + 2^n)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \cancel{\begin{pmatrix} n2^{n-1} - 2^{n-1} - n2^{n-1} + 2^n & 0 & 0 & n2^{n-1} - 2^{n-1} - n2^{n-1} + 2^n \\ 3(n2^{n-2} - 2^{n-2}) - n2^{n-1} + 2^n & n2^{n-1} - 2^{n-1} - n2^{n-1} + 2^n & & \end{pmatrix}}$$

~~4 coins et centre~~

On a
- $(n\cancel{2^{n-1}} - 2^{n-1}) - \cancel{n2^{n-1}} + 2^n = 2^{n-1}(2-1) = \boxed{2^{n-1}}$
- $3(n2^{n-2} - 2^{n-2}) - n2^{n-1} + 2^n = 2^{n-2}(3n - 3 - 2n + 4)$

$$= \boxed{2^{n-2}(n+1)}$$

1^re colonne 2 et 3^e lignes

- $n2^{n-2} - 2^{n-2} = 2^{n-2}(n-1)$

↳ 4^e colonne 2 et 3^e lignes.

Ainsi, avec le calcul matriciel on trouve bien la matrice A^n demandée.

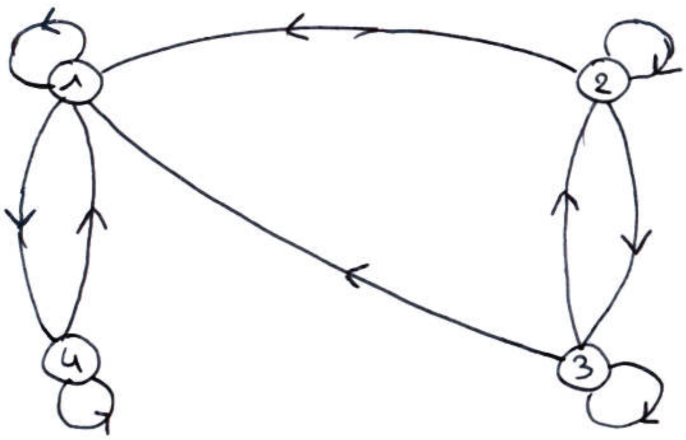
Partie 2 :

5) a.

La matrice d'adjacence a comme coefficient à la colonne i et la ligne j le nombre d'arrête allant du sommet i au sommet j avec $i \in [\![1,4]\!]$ et $j \in [\![1,4]\!]$ pour le graph G.

b) le coefficient situé à la ligne i et à la colonne j dans la matrice M^n est le nombre de chaines de taille n c'est à dire avec n arrêtes qui relient le sommet i au sommet j.

6) a.



b) ~~Oui G est connex car tous les sommets du graph peuvent être reliés par au moin une chaine, il n'y a pas de sommet isolé.~~

le graph n'est pas connexe car on ne peut pas aller du sommet 4 au sommet 2 ou 3 par exemple.

Prénom (s) MANON

17.79 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques appliquées

Sujet ☒ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 03 / 06

Numéro de table 013

c) A est la matrice d'adjacence du graphe G donc le nombre de chemins de longueur n menant du s_3 au sommet s_0 est le 1 coefficient de la troisième ligne de A^n donc le nombre de sommet de longueur n est $\underline{(n+1)2^{n-2}}$

```
import numpy as np
```

f)
```
def matrice_vers_liste (A):
    A = np.array ([[1,0,0,1], [1,1,1,0], [1,1,1,0], [1,0,0,1]])
```

8) a) La liste distance renvoie les valeur

[0 , 0 , 0 , 1]

b)
```
def parcours (L, i0):
    p = len (L)
    distances = [0]*n
    distances [i0] = 0
    a_explorer = p          :
    marques = i0
```

```
while
    s =

for v in         :
    if v not in marques:
```

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

17.79 / 20

Exercice 2 :

$$\forall x \in]0;+\infty[, \quad f(x) = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}$$

1) a. $\forall x \in]0;+\infty[$, $\sqrt{x} \neq 0$ donc f est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme quotient de fonctions usuelles dérivables sur $]0;+\infty[$

$$\forall x \in]0;+\infty[, \quad f'(x) = \frac{\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} \times \sqrt{x} - e^{\frac{x}{2}} \times \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}$$

$$= \frac{\frac{x e^{\frac{x}{2}} - e^{\frac{x}{2}}}{2\sqrt{x}}}{x}$$

$$= \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}} \times \frac{x-1}{2x}.$$

$$\boxed{= f(x) \times \frac{(x-1)}{2x}}$$

b. $f(x) > 0$ sur $]0, +\infty[$ car $e^{\frac{x}{2}} > 0$ et $\sqrt{x} > 0$ donc f' est du signe $\frac{(x-1)}{2x}$ OR $2x > 0$ donc du signe de $x-1$: $x - 1 \geqslant 0 \iff x \geqslant 1$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ $+\infty$	↘	$\sqrt{e}$	↗	$+\infty$

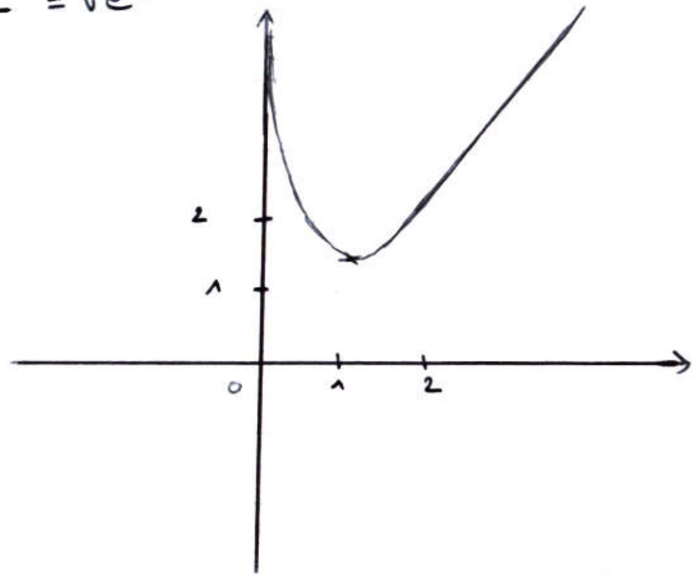
OR • $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(e^{x})^{1/2}}{x^{1/2}} = +\infty$ par quotient

car $\lim\limits_{x \to 0} e^{x} = 1$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(e^{x})^{1/2}}{x^{1/2}} = +\infty$ par croissances comparées

• $f(1) = \dfrac{\sqrt{e}}{1} = \sqrt{e}$

c)



d) Soit $n \geq 2$, sur $]0, 1[$, f est strictement décroissante et continue (car dérivable). De plus, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$ et $f(1) = \sqrt{e} < 2$ car $2 < e < 3 \iff \sqrt{2} < \sqrt{e} < \sqrt{3} < 2$.

donc d'après le théorème des valeurs intermédiaire

n est une valeur intermédiaires donc sur $]0, 1]$, l'équation $f(x) = n$ admet une seule solution que l'on note U_n.

Idem sur $[1; +\infty[$, on a f strictement croissante et continue, n est une valeur intermédiaire car $\sqrt{e} < 2$ donc l'équation $f(x) = n$ admet une seule solution sur $[1; +\infty[$ ~~dor~~ notée V_n.

Or $u_n \in]0,1[$ et $v_n \in [1;+\infty[$ donc on a bien $0 < u_n < 1 < v_n$.

2) a. Par définition $f(v_n) = n$ donc $v_n = f^{-1}(n)$

Or $v_n \in [1;+\infty[$ or sur $[1;+\infty[$ f est strictement croissante donc f^{-1} aussi car la fonction réciproque admet les même variation que f donc $f^{-1}(n)$ est strictement croissante

donc <u>la suite $(v_n)_{n\geq 2}$ est croissante</u>.

b. Résonnons par l'absurde, admettons que la suite $(v_n)_{n\geq 2}$ converge alors d'après le théorème du point fixe (v_n) tend vers un réel ℓ vérifiant $f(\ell) = \ell$ et ℓ doit appartenir à $[1;+\infty[$

Or, $f(\ell) = \ell \iff \dfrac{e^{\frac{\ell}{2}}}{\sqrt{\ell}} = \ell$

$$\iff e^{\frac{\ell}{2}} = \sqrt{\ell}\,\ell$$
$$\iff e^{\frac{\ell}{2}} = \ell^{3/2}$$
$$\iff e^{\ell} = \ell^{3}$$
$$\iff \ell = \ln(\ell^{3})$$
$$\iff \ell = 3\ln(\ell)$$
$$\iff \ell - 3\ln(\ell) = 0$$

Or posont $e(x) = x - 3\ln(x)$, e est dérivable sur $[1;+\infty[$ comme somme de fonctions usuelles dérivables.

$e'(x) = 1 - \dfrac{3}{x} = \dfrac{x-3}{x}$ donc e' est du signe de $x-3$: $x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$

x	1		3		$+\infty$
$e'(x)$		$-$	0	$+$	
e		$\searrow$	$e(3)$	$\nearrow$	

avec $e(3) = 3 - 3\ln(3)$

$= 3(1 - \ln(3)) > 0$

car $\ln(3) < 1$

Prénom (s) MANON

17.79 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques appliqués

Sujet ☒ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 04 / 06

Numéro de table 013

Ainsi, $e(x) > 0$ donc $l - 3\ln(l) = 0$ n'admet pas de solution donc il n'y a pas de point fixe donc $(V_n)_{n\geq 2}$ ne converge pas et tend vers $+\infty$ puisqu'elle est croissante.

3) a. Par définition $f(u_n) = n \iff u_n = f^{-1}(n)$ or f est decroissante sur $]0,1]$ et $u_n \in]0,1]$ donc f^{-1} admettant les mêmes variations que f on a bien $(u_n)_{n\geq 2}$ qui est décroissante.

b) $(u_n)_{n\geq 2}$ est décroissante et minorée par 0 donc d'après le théorème de la limite monotone $(u_n)_{n\geq 2}$ converge.

c) Supposons $l \neq 0$ alors d'après le théorème des point fixe la solution de $f(l) = l$ est donc differente de 0.

Or $f(l) = l \iff \dfrac{e^{\frac{l}{2}}}{\sqrt{e}} = l$

$\iff e^{l/2} = l^{3/2}$

$\iff e^{l} = l^{3}$

$\iff l = 3\ln(l)$ ceci n'admet pas de solution sur $]0,1]$ donc $l \notin]0,1]$ donc $l = 0$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

17.79 / 20

d) On a $\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell \iff \lim_{n \to +\infty} u_n = 0$

on en dédeit donc que $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{1/n^2} = 1$

donc que $\boxed{u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}}$

4) a.

```
import numpy as np
def approx_u(n, eps):
    a = 0
    b = 1
    while (approx_u) - c >= eps :
        c = (a+b)/2
        if np.exp(c/2)/np.sqrt(c) < n :
            b = c
        else :
            a = c
    return (a+b)/2.
```

Exercice 1 :

1. X est la variable aléatoire égale au numéro de la premiere boule tirée OR l'urne contient n boules numérotées de 1 à n donc $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$ et on reconnait que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])$

Ainsi, $E(X) = \frac{n+1}{2}$ et $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$

2. Y est la variable aléatoire égale au numéro de la deuxième boule tirée donc $Y(\Omega) = [\![1, n]\!]$ car l'urne 2 ne contient que les boules numérotées de 1 à k avec k le numéroté de la boule tirée dans la première urne. OR $k \in [\![1, n]\!]$

3) a. Si $[X=k]$ est réalisé alors 1 boule numerotée 1 puis 2 boules numérotées 2 et ainsi de suite avec k boules numérotées k.
Ainsi on en déduit que le nombre total de boules présentes dans la seconde urne est égal à :

$$\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$$

b. Cas où $j \geqslant k+1$: $P_{(X=k)}(Y=j) = 0$ car si $[X=k]$ alors il n'y a dans la seconde urne que des boules numérotées de 1 à k.

Cas où $j \leqslant k$: $P_{(X=k)}(Y=j) = \dfrac{j}{\frac{k(k+1)}{2}} = \dfrac{2j}{k(k+1)}$

car il y a j boules numérotées j sur un nombre total de boules égal à $\frac{b(k+1)}{2}$ d'après la question 2.a)

4) a) $\dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1} = \dfrac{ak+a+bk}{k(k+1)} = \dfrac{k(a+b)+a}{k(k+1)}$

Par identification : $\begin{cases} a+b=0 \\ a=1 \end{cases} \iff \begin{cases} b=-1 \\ a=1 \end{cases}$

Prénom (s) MANON

17.79 / 20

ecricome Épreuve : Mathématiques appliqués

Sujet ☒ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 05 / 06

Numéro de table 013

b) D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènement $(Y=k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ on a :

$$P(Y=j) = \sum_{k=1}^{n} P((X=k)\cap(Y=j))$$

$$= \sum_{k=1}^{n} P(X=k)\, P_{(X=k)}(Y=j)$$ d'après la formule des probabilités composées

$$= \sum_{k=j}^{n} \frac{1}{n} \times \frac{2j}{k(k+1)}$$ car $P_{(X=k)}(Y=j) = 0$ si $j \geqslant k+1$

$$= \frac{2j}{n} \sum_{k=j}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

$$= \frac{2j}{n} \sum_{k=j}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

$$= \frac{2j}{n} \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{n+1}\right)$$ par télescopage

$$\cancel{= \frac{2j}{n} - \frac{2j}{n(n+1)} = \frac{2j(n+1) - 2j}{n(n+1)} = \frac{2(jn + j - j)}{n(n+1)}}$$

$$= \frac{2}{n} - \frac{2j}{n(n+1)} = \frac{2(n+1) - 2j}{n(n+1)} = \boxed{\frac{2(n+1-j)}{n(n+1)}}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

17.79 / 20

5)

Y admet une espérance car son support est fini ($Y(\Omega) = [\![1, n]\!]$)

$$E(Y) = \sum_{j=1}^{n} j\, P(Y=j)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} j \times \frac{2(n+1-j)}{n(n+1)}$$

$$= \frac{2}{n(n+1)} \times \sum_{j=1}^{n} j(n+1-j)$$

$$= \frac{2}{n(n+1)} \left(n \sum_{j=1}^{n} j + \sum_{j=1}^{n} j - \sum_{j=1}^{n} j^2 \right)$$

$$= \frac{2}{(n(n+1))} \left(n \times \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right)$$

$$= n + 1 - \frac{2(2n+1)}{6} = n + 1 - \frac{1}{3}(2n+1)$$

$$= n - \frac{2}{3}n + 1 - \frac{1}{3}$$

$$= \boxed{\frac{1}{3}n + \frac{2}{3}} = \boxed{\frac{n+2}{3}}$$

6) On a $P(X=k)P(Y=j) = \frac{1}{n} \times \frac{2(n+1-j)}{n(n+1)} = \frac{2(n+1-j)}{n^2(n+1)}$

et $P((X=k) \cap (Y=j)) = P(X=k)\, P_{(X=k)}(Y=j)$

$$= \frac{1}{n} \times \frac{2j}{k(k+1)} = \frac{2j}{nk(k+1)} \neq \frac{2(n+1-j)}{n^2(n+1)}$$

<u>Ainsi X et Y ne sont pas indépendantes.</u>

7) a. D'après le théorème du transfert on a :

$$E(XY) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} kj \; P(X=k)P(Y=j)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} kj \times \frac{1}{n} \times 2(n+1-j)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)} 2 \sum_{j=1}^{k} j^2$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{\cancel{(k+1)}} \times \frac{k\cancel{(k+1)}(2k+1)}{\cancel{1}2}$$

$$= \frac{1}{6} \times \sum_{k=1}^{n} 2k^2 + k$$

$$= \frac{1}{6}\left(2\sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k\right)$$

$$= \frac{1}{6}\left(2 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} + \frac{n(n+1)}{6}\right)$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{36} + \frac{n(n+1)}{36}$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2+n+n)}{36}$$

$$= \frac{2(n+1)(n^2+n)}{36} = \frac{(n+1)(n(n+1))}{18}$$

désolé voir derniere page.

b) D'après la formule de Koenig-Huygens, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{cov}(X,Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) \\
&= \frac{(n+1)(4n+5)}{18} - \left(\frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3}\right) \\
&= \frac{(n+1)(4n+5)}{18} - \frac{(n+1)(n+2)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(4n+5) - 3(n+1)(n+2)}{18} \\
&= \frac{4n^2+5n+4n+5-3(n^2+2n+n+2)}{18} \\
&= \boxed{\frac{n^2-1}{18}}
\end{aligned}$$

8) a.

b.
```
import numpy.random as rd
def simul_XY (n):
    X = rd.randint(1, n)
    urne2 = seconde_urne (X)
    nb = len(urne2)
```

Prénom (s) MANON

17.79 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques appliquées

Sujet ☒ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 06 / 06

Numéro de table 013


```
i = rd.randint(0, nb)
Y = 2*i / nb
return X, Y
```

c) Les éléments de la liste renvoyé permettent d'estimer la chance de piocher la boule numéroté 1 pour le premier élément après un très grand nombre d'experience et pareil pour chaque élément de la liste.

D'après le théorème du transfert

7) a. $E(XY) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} kj \, P(X=k) P(Y=j)$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} kj \times \frac{1}{n} \times \frac{2(n+1-j)}{n(n+1)}$$

$$= \frac{2}{n^2(n+1)} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} kj(n+1-j)$$

$$= \frac{2}{n^2(n+1)} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} nkj + kj - kj^2$$

$$= \frac{2}{n^2(n+1)} \left(\sum_{k=1}^{n} \left(nk \sum_{j=1}^{k} j + k \sum_{j=1}^{k} j - k \sum_{j=1}^{k} j^2 \right) \right.$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

17.79 / 20

$$= \frac{2}{n^2(n+1)} \left(\sum_{k=1}^{n} \left(nk \times \frac{k(k+1)}{2} + k \times \frac{k(k+1)}{2} - k \times \frac{k(k+1)(2k+1)}{12} \right) \right.$$

$$= \frac{2}{n^2(n+1)} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{nk^2(k+1)}{2} + \frac{k^2(k+1)}{2} - \frac{k^2(k+1)(2k+1)}{12} \right)$$

$$= \frac{2}{n^2(n+1)} \left(\frac{(n+1)}{2} \sum_{k=1}^{n} k^2(k+1) - \frac{1}{12} \times k^2(k+1)(2k+1) \right)$$

$$= \frac{2}{n^2(n+1)} \left(= \sum_{k=1}^{n} k^2(k+1) \left(\left(\frac{n+1}{2}\right) - \frac{(2k+1)}{12} \right) \right.$$

$$= \frac{2}{n^2(n+1)} \left(\sum_{k=1}^{n} k^2 (k+1) \left(\frac{6n+6-2k-1}{12} \right) \right)$$

$$= \frac{2}{n^2(n+1)} \left(\sum_{k=1}^{n} k^2(k+1) \times \left(\frac{6n+5-2k}{12} \right) \right)$$

$$\cancel{\frac{2}{n^2(n+1)} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} kj\,(n+1-j)}$$

$$\cancel{= \frac{2}{n^2(n+1)} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=n}^{n+1-k} k j^2} \qquad j = n+1-j$$

$$\cancel{= \frac{2}{n^2(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k \times (n+1-k)(n+2-k)(}$$