PREPA Option Maths appliquées

Mathématiques appliqués Mathématiques

ELSA

Note de délibération : 18.22 / 20

Prénom (s) ELSA

18.22 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques Appliquées

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 1 / 6

Numéro de table 10

Exercice 1

1. $X(\Omega) = [\![1;n]\!]$

$X \hookrightarrow \mathcal{U}_{[\![1;n]\!]}$ donc $E(X) = \frac{n+1}{2}$ et $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$

2. Soit $k \in X(\Omega)$. $Y(\Omega) = [\![1; \sum_{j=1}^{k} j]\!] = [\![1; \frac{k(k+1)}{2}]\!]$

3. Soit $k \in [\![1;n]\!]$

a) Si $[X=k]$ réalisé, alors il y a $\sum_{j=1}^{k} j = \frac{k(k+1)}{2}$ boules dans la seconde urne.

3. b) Soit $j \in [\![1;n]\!]$, soit $k \in X(\Omega)$. $P([X=k]) \neq 0$

. Si $j \geq k+1$, $P_{[X=k]}([Y=j]) = 0$, car le numéro de la boule tirée est entre 1 et k.

. si $j \leq k$, $P_{[X=k]}([Y=j]) = \frac{j}{\frac{k(k+1)}{2}} = \frac{2j}{k(k+1)}$

il y a j cas favorables sur $\frac{k(k+1)}{2}$ cas possibles.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.22 / 20

Donc

Donc $\forall j \leq k,\ P_{[X=k]}([Y=j]) = \dfrac{2j}{k(k+1)}$

$\forall j \geq k+1,\ P_{[X=k]}([Y=j]) = 0$

2. a) Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} = \frac{(k+1)a + bk}{k(k+1)} = \frac{ak + a + bk}{k(k+1)} = \frac{k(a+b) + a}{k(k+1)}$$

Donc $\begin{cases} (a+b) = 0 \\ a = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} b = -1 \\ a = 1 \end{cases}$

Donc $(a,b) = (1;-1)$

2. b) Soit $j \in Y(\Omega)$. $\{[X=k],\ k \in [\![1;n]\!]\}$ est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales,

$$P([Y=j]) = \sum_{k=1}^{n} P([Y=j] \cap [X=k]) = \sum_{k=1}^{n} P_{[X=k]}(Y=j).\ P([X=k])$$

$$= \sum_{k=j}^{n} \frac{2j}{k(k+1)} \cdot \frac{1}{n}$$

$$= \frac{2j}{n} \sum_{k=j}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$ d'après question 4. a)

$$= \frac{2j}{n} \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{2j(n+1-j)}{jn(n+1)}$$

Donc $\forall j \in Y(\Omega)$ / $P([Y=j]) = \dfrac{2(n+1-j)}{n(n+1)}$

5. $Y(\Omega)$ est fini donc Y admet une espérance. Soit $j \in Y(\Omega)$.

$$E(Y) = \sum_{j=1}^{k} j P([Y=j])$$

$$= \sum_{j=1}^{n} j \left(\frac{2(n+1-j)}{n(n+1)} \right)$$

$$= \frac{2}{n(n+1)} \sum_{j=1}^{n} j(n+1-j)$$

$$= \frac{2}{n(n+1)} (n+1) \sum_{j=1}^{n} j - \frac{2}{n(n+1)} \sum_{j=1}^{n} j^2$$

$$= \frac{2}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} - \frac{2}{n(n+1)} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= n+1 - \frac{(2n+1)}{3} = \frac{n+2}{3}$$

Donc $E(Y) = \dfrac{n+2}{3}$

6. Soient $(i,j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$.

$$P([X=i] \cap [Y=j]) = P_{[X=i]}([Y=j]) . P([X=i]) = \frac{1}{n} \cdot \frac{2j}{i(i+1)}$$

$$P([X=i]) . P([Y=j]) = \frac{1}{n} \cdot \frac{2(n+1-j)}{n+1} \neq P_{[X=i]}([Y=j]) P([X=i])$$

Donc X et Y ne sont pas indépendantes.

7. a)

7. b) $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X).E(Y)$ d'après Koenig-Huygens.

donc $Cov(X,Y) = \frac{(n+1)(4n+5)}{18} - \left(\frac{n+1}{2}\right)\left(\frac{n+2}{3}\right)$

$= \frac{(n+1)(4n+5)}{18} - \frac{3(n+1)(n+2)}{18}$

$= \frac{4n^2 + 5n + 4n + 5 - 3n^2 - 6n - 3n - 6}{18}$

Donc $Cov(X,Y) = \frac{n^2 - 1}{18}$

8. a)

```
def seconde_urne(k) :
    T = [ ] * (k*(k+1)/2)
    T[0] = 1
    for i in range(1, len(T)):

        T.append(T[i])*i
    return T
```

Prénom (s) ELSA

18.22 / 20

Écricome Épreuve : Mathématiques Appliquées

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 2 / 6

Numéro de table 10

8. b)
```
import numpy.random as rd

def simul_XY(n) :
    X = rd.randint(1, n)
    urne2 = seconde_urne(x)
    nb = len(urne 2)
    i = rd.randint(0, nb)
    Y = i
    return X, Y
```

8. c) Les éléments de la liste renvoyée permettent d'estimer l'espérance de XY par la loi faible des grands nombres.

9. a) en considérant les deux points les plus aux extrémités dans chaque figure, $(\bar{x}, \bar{y}) \simeq$ $(E(X); E(Y)) = (10,5; 7,5)$

9. b) $y = \frac{s_{x,y}}{s_x^2} \cdot x - \bar{y} + \frac{s_{x,y}}{s_x^2} \cdot \bar{x}$

$y = \frac{12}{400-1} \frac{400-1}{18} \cdot x - \frac{22}{3} + \frac{400-1}{18} \cdot \frac{12}{400-1} \cdot \frac{21}{2}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.22 / 20

$y = \frac{12}{18}x - \frac{22}{3} + 7$

$y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$

le coefficient directeur est positif donc ce n'est pas la figure 4.

$E(X)$ et $E(Y)$ sont proches mais $E(X) > E(Y)$, donc figure 3.

Prénom (s) ELSA

18.22 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques Appliquées

Sujet 1 ou 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 3 / 5

Numéro de table 10

Exercice 2.

1. a) Soit $x \in]0;+\infty[$.

$x \mapsto e^{x/2}$ et $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc f est dérivable sur $]0;+\infty[$.

Soit $x \in]0;+\infty[$,

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} . \sqrt{x} - e^{\frac{x}{2}} . \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{x}$$

$$f'(x) = \frac{e^{x/2}\left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{x}$$

$$f'(x) = \frac{e^{x/2}}{\sqrt{x}}\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = f(x) . \frac{(x-1)}{2x}$$

1. b) $f'(x) < 0 \iff x-1 < 0$

$\iff x < 1$

f est continue sur $]0;+\infty[$, donc $\forall x \in]0;1]$, f est strictement décroissante, et $\forall x \in [1;+\infty[$, f est strictement croissante.

Donc

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	$f(1) = e^{1/2}$	↗	$+\infty$

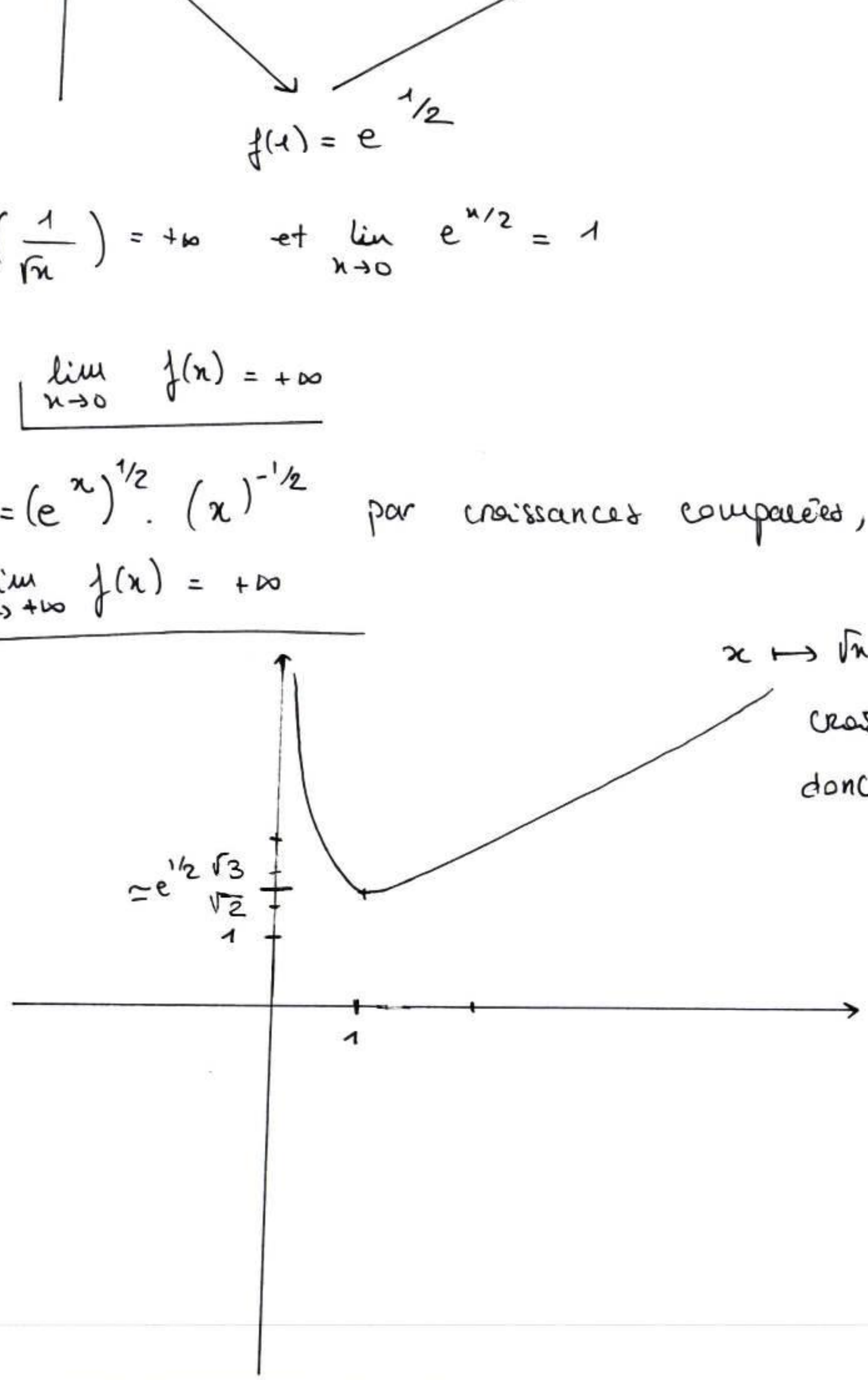
- $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} e^{x/2} = 1$

donc $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty}$

- $f(x) = (e^{x})^{1/2} \cdot (x)^{-1/2}$ par croissances comparées,

$\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

1. c)



$x \mapsto \sqrt{x}$ est strict croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc $e^{1/2} \in]\sqrt{2}; \sqrt{3}[$

1. d) Soit $n \geq 2$.

f est continue, strictement décroissante sur $]0;1]$ et strictement croissante sur $[1;+\infty[$. D'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $]0;1]$ sur $]+\infty; e^{1/2}]$ et de $[1;+\infty[$ sur $[e^{1/2};+\infty[$.

$n \geq e^{1/2}$ car $2 \geq e^{1/2}$, donc f possède exactement deux solutions U_n et v_n sur $]0;+\infty[$, telles que $U_n \in]0;1[$ et $v_n > 1$.

Donc $0 < U_n < 1 < v_n$

2. a) Soit $n \geq 2$.

Soit $v_n \in]1;+\infty[$. f est strictement croissante sur $]1;+\infty[$, donc $f(v_{n+1}) > f(v_n) \Rightarrow v_{n+1} > v_n$.

Donc $\forall n \geq 2$, (v_n) est croissante.

2. b) Supposons $\lim_{n \to +\infty} (v_n) = l \in \mathbb{R}$. Donc $1 < v_n \leq l$ donc comme est strictement croissante sur $]1;+\infty[$, $f(1) < n \leq f(l)$, or $\lim_{n \to +\infty} n = +\infty$, donc $\lim_{n \to +\infty} (v_n) = +\infty$ (car (v_n) est croissante).

3. a) Soit $U_n \in]0;1[$. f est strictement décroissante sur $]0;1[$, donc $f(U_n) < f(U_{n+1}) \Rightarrow U_n > U_{n+1}$. Donc $\forall n \geq 2$,

(U_n) est décroissante.

3. b) (U_n) est décroissante et minorée par 0, donc d'après le théorème de la limite monotone, (U_n) converge.

3. c)

3. d)

4. a)

```
import numpy as np
def approx_u (n, eps) :
a = 0
b = 1
while b - a > eps :
    c = (a + b)/2
    if np.exp (c/2) / np.sqrt (c) < n :
        b = c
    else
        a = c
return (a+b)/2
```

4. b)

```
def sp (N, eps):
S = 0
for i in range (N+1) :
    S = S + approx_u (i, eps)
return S
```

Prénom (s) ELSA

18.22 / 20

Écricome Épreuve : Mathématiques Appliquées

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 4 / 6

Numéro de table 10

Exercice 3

Partie 1

1. a) $(U_1, U_2, U_3, U_4) \in \mathbb{R}^4$

Soient $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in \mathbb{R}^4 \,/\, \sum_{i=1}^{4} \alpha_i U_i = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 = 0 \\ -\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = \alpha_3 \\ \alpha_2 = 0 \\ -\alpha_1 = \alpha_4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0 \end{cases}$$

Donc (U_1, U_2, U_3, U_4) est une famille libre de $\mathbb{R}^4$. $\mathcal{B}$ est libre et génératrice de $\mathbb{R}^4$ et $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$, donc

$\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.22 / 20

1. b) * $f(u_1) = -f(e_1) + f(e_2) + f(e_4)$

$= -(e_1 + e_2 + e_3 + e_4) + e_2 + e_3 + e_1 + e_4$

$= 0$

* $f(u_2) = -f(e_2) + f(e_3) = -e_2 - e_3 + e_2 + e_3$

$= 0$

* $f(u_3) = f(e_2) + f(e_3)$

$= 2e_2 + 2e_3$

$= 2(e_2 + e_3) = 2u_3$

* $f(u_4) = f(e_1) + f(e_4)$

$= e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_1 + e_4$

$= 2e_1 + 2e_4 + e_2 + e_3$

$= 2u_4 + u_3$

Donc

$$Mat(f)_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. c) P est la matrice de passage de la base $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$, et T est la matrice représentative de f dans $\mathcal{B}$.

$$\text{Donc } T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sont telles que $A = PTP^{-1}$

2. a) $$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 4 \\ 8 & 4 & 4 & 4 \\ 8 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 4 \\ 8 & 4 & 4 & 4 \\ 8 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

- $$4A^2 - 4A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 8 \\ 12 & 8 & 8 & 4 \\ 12 & 8 & 8 & 4 \\ 8 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & -4 \\ -4 & -4 & -4 & 0 \\ -4 & -4 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$4A^2 - 4A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 4 \\ 8 & 4 & 4 & 4 \\ 8 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Donc $A^3 = 4A^2 - 4A$

2. b) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, la proposition P_n :
" $\exists (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2 \; / A^n = a_n A^2 + b_n A$" est vraie.

· pour $n=1$, $A^1 = 0.A^2 + 1.A$, en posant $\begin{cases} a_1 = 0 \\ b_1 = 1 \end{cases}$, P_1 est vraie.

Supposons P_n vraie pour un certain entier $n \geq 1$, et montrons que P_{n+1} est vraie.

D'après l'hypothèse de récurrence, $\exists (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2 /$

$$A^n = a_n A^2 + b_n A$$

donc $A^{n+1} = a_n A^3 + b_n A^2$ or d'après q. 2.a)

$A^{n+1} = a_n (4A^2 - 4A) + b_n A^2$

$A^{n+1} = (4a_n + b_n) A^2 - 4a_n A$

en posant $\begin{cases} a_{n+1} = 4a_n + b_n \\ b_{n+1} = -4a_n \end{cases}$, la proposition est héréditaire.

Donc par principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2 /$

$A^n = a_n A^2 + b_n A$. et $a_{n+1} = 4a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -4a_n$.

3. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$a_{n+2} = 4a_{n+1} + b_{n+1} = 4a_{n+1} - 4a_n$ d'après 2. b)

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$.

Prénom (s) ELSA

Écricome Épreuve : Mathématiques appliquées

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 5 / 6

Numéro de table 10

18.22 / 20

3. b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On reconnaît une suite récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique (E) : $x^2 - 4x + 4 = 0$

de discriminant $\Delta = 16 - 16 = 0$

donc la seule racine double est $x_0 = \frac{4}{2} = 2$

Donc $\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = (\alpha + \beta n).2^n$

. $a_1 = 0$ et $a_2 = 1 \iff \begin{cases} (\alpha + \beta).2 = 0 \\ (\alpha + 2\beta).4 = 1 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} \alpha = -\beta \\ 4\beta = 1 \end{cases}$ donc $\begin{cases} \alpha = -\frac{1}{4} \\ \beta = \frac{1}{4} \end{cases}$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \left(\frac{1}{4}n - \frac{1}{4}\right).2^n = (n-1).2^{n-2}$

18.22 / 20

3. c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après q. 2. b), $b_n = a_{n+1} - 4a_n$

Donc $b_n = \left(\frac{1}{4}(n+1) - \frac{1}{4}\right) \cdot 2^{n+1} - 4\left(\frac{1}{4}n - \frac{1}{4}\right) \cdot 2^n$

$$b_n = \frac{1}{4}n \cdot 2^{n+1} - (n-1)2^n$$

$$b_n = 2^n\left(\frac{1}{2} \cdot n - n + 1\right)$$

$\boxed{\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n = 2^n\left(1 - \frac{1}{2}n\right)}$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

D'après q. 2.b), $A^n = a_n A^2 + b_n A$

donc $A^n = \frac{1}{4}(n-1) \cdot 2^n \cdot A^2 + \left(1 - \frac{1}{2}n\right) \cdot 2^n \cdot A$

Donc $A^n = (n-1) \cdot 2^{n-2} A^2 + \left(1 - \frac{1}{2}n\right) 2^n \cdot A$

. $(n-1) 2^{n-2} \cdot 2 + \left(1 - \frac{1}{2}n\right) 2^n = 2^{n-1}$

. $(n-1) 2^{n-2} \cdot 3 + \left(1 - \frac{1}{2}n\right) 2^n = 2^{n-2}(3n - 3 + 4 - 2n)$

$$= 2^{n-2}(n+1)$$

Donc $A^n = \begin{pmatrix} 2n-1 & 0 & 0 & 2^{n-1} \\ (n+1)2^{n-2} & 2^{n-1} & 2^{n-1} & (n-1)2^{n-2} \\ (n+1)2^{n-2} & 2^{n-1} & 2^{n-1} & (n-1)2^{n-2} \\ 2^{n-1} & 0 & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$

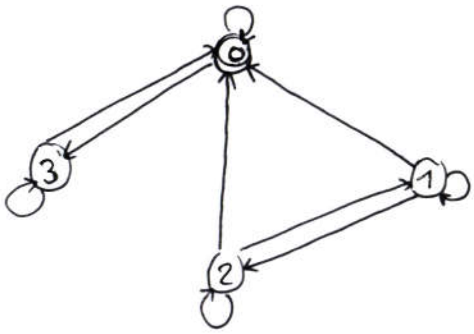
Partie 2 .

5. a) La matrice d'adjacence du graphe G est telle que
$\forall (i,j) \in [\![1;p]\!]^2$ $m_{i,j} = 1$ si les sommets i et j sont liés, 0 sinon.

5. b) le coefficient situé ligne i colonne j dans M^n présente les liaisons possibles entre i et j par une chaîne de longueur n.

6. Soit $p = 4$.

a)



6. b) Les coefficients de A ne sont pas tous strictement positifs, donc A n'est pas connexe.

6. c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$
D'après la question 4, il y a 2^{n-1} chemins de longueur n menant de s_3 à s_0.

7.

```
def matrice_vers_liste (A, p) :
    G = [ ] * p
    for i in range (p) :
        for j in range (1, p+1) :
            if A[i][j] == 1 :
                G.append (j)
    return G
```

8. a) à l'issue de l'exécution de l'algorithme, on obtient [1, 0, 1, 2].

8. b)

```
def parcours (L, i0) :
    p = len(L)
    distances = [ ] * p
    distances [i0] = 0
    a_explorer = [i0] * p
    marques = [i0] * p
    while a_explorer != 0 :
        s = a_explorer [0]
        a_explorer. del (s)
        for v in a_explorer :
            if v not in marques :
                marques. append (v)
                a_explorer [-1] = v
                v = distance [s] + 1
    return distance
```

Prénom (s) ELSA

18.22 / 20

ecricome Épreuve : Mathématiques appliquées

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 6 / 6

Numéro de table 10

8.c) en modifiant la fin de l'algorithme :

```
T = [ ] * p
for i in range len(L) :
    for j in range (len(L)+1):
        if L[i][j] == 1 :
            T.append(j)
return T
```

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.22 / 20