PREPA Option Maths approfondies

Mathématiques approfondies Mathématiques

CLAVERIE

STANISLAS

Note de délibération : 19.93 / 20

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom CLAVERIE

Prénom (s) STANISLAS PIERRE

19.93 / 20

Écricome Épreuve : MATHS APPROFONDIES

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 1 / 5

Numéro de table 5

Exercice n° 1 :

I) 1) a)

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad BA = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

I) 1) b) • Pour AB, la matrice est triangulaire supérieure, donc ses valeurs propres sont $\boxed{Sp(AB) = \{2 ; -1\}}$

On a $(AB - 2I_2)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

D'où le sous-espace propre associé à 2 de AB est $Vect\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$

On a $(AB + I_2)\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

D'où le sous-espace propre associé à -1 de AB est $Vect\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$

• Pour BA, on trouve de même que $\boxed{Sp(BA) = \{-1 ; 2\}}$

et que le sous-espace propre associé à -1 est $Vect\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$

————————————— à 2 est $Vect\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.93 / 20

I) 2) a) Procédons par l'absurde en supposant que $BX = 0$,

On a alors :

- $ABX = \underbrace{\lambda X}_{\neq 0}$ car X est vecteur propre de λ non nulle
- $BX = 0$ d'où $ABX = 0$

$\boxed{\text{Ce qui est absurde, d'où } BX \neq 0}$

I) 2.b) On a : $BA(BX) = B(ABX)$
$= B(\lambda X)$
$= \lambda BX \neq 0$ d'après 2.a).

$\boxed{\text{D'où } BX \text{ est vecteur propre de } BA \text{ associé à } \lambda, \text{ d'où } \lambda \in Sp(BA)}$

I) 3.a) Comme B est inversible, alors $Ker(B) = \{0\}$

Or comme $X \neq 0$ car X est un vecteur propre

$\boxed{\text{On a } BX \neq 0}$

On a $BA(BX) = B(ABX)$
$= B \times 0$
$= 0 \times BX$

Or comme $BX \neq 0$, c'est un vecteur propre de BA associé à la valeur propre 0. D'où $\boxed{0 \in Sp(BA)}$

I) 3.b) On a alors $Ker(B)$ de dimension supérieure ou égale à 1.

Soit X tel que $AX \in Ker(B)$.

On a alors $BAX = 0$ d'où $X \in Ker(BA)$

Ainsi $\dim(Ker\, BA) \geq 1$

Donc par théorème du rang, $\boxed{rg(BA) < n}$

De plus comme $\dim(Ker\, BA) \geq 1$, $\exists X \neq 0 \in Ker(BA)$ tel que $BAX = 0 \times X$

$\boxed{\text{D'où } 0 \in Sp(BA)}$

I) 4) Soit $\lambda \in Sp(AB)$ non nulle, on a d'après 2.b) que $\lambda \in Sp(BA)$.

. Soit $0 \in Sp(AB)$, on a d'après 3.b) que $0 \in Sp(BA)$.

D'où $Sp(AB) \subset Sp(BA)$.

Par symétrie en inversant les rôles joués par A et B, on a

$Sp(BA) \subset Sp(AB)$

$\boxed{\text{Donc } Sp(BA) = Sp(AB)}$

I) 5.) L'exemple de la question 1) nous montre que AB et BA peuvent avoir des sous-espaces propres avec les mêmes composante mais non associés aux mêmes valeurs propres.

$\boxed{\text{Ainsi les sous-espaces propres de } AB \text{ et de } BA \text{ ne sont pas identiques.}}$

II) 6) a) Posons $Q = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k X^k$, On a $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $Q(A) = 0$ d'après l'énoncé.

$\boxed{\text{Ainsi } A \text{ admet un polynôme annulateur } Q \text{ avec } \deg(Q) \leq n-1.}$

II) 6.b) Comme $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ sont des valeurs propres deux à deux distinctes de A, elles sont également racines de Q. Ainsi Q admet n racines distinctes alors qu'il est de degré $n-1$, c'est

donc le polynôme nul. $\boxed{\text{On a donc nécessairement } \alpha_0 = \dots = \alpha_{n-1} = 0}$
Ce qui est contradictoire.

II)6. c) On vient de montrer que

$\forall (\alpha_0, \dots \alpha_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ tels que $\alpha_0 I_n + \dots + \alpha_{n-1} A^{n-1} = 0$

On a $\alpha_0 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$

$\boxed{\text{Cela traduit la liberté de la famille } (I_n, \dots, A^{n-1})}$

II) 7.a). Comme • A admet n valeurs propres distinctes

• $\sum_{i=1}^{n} \dim(E_{\lambda_i}(A)) = n$ avec $\forall i \in [\![1,n]\!]$ $E_{\lambda_i}(A)$ le sous-espace propre associé à λ_i

On a nécessairement $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\dim(E_{\lambda_i}(A)) = n$.

• D'où si $\lambda \in Sp(A)$, on a $\exists i \in [\![1,n]\!]$ tel que $\lambda = \lambda_i$ et $X \in E_{\lambda_i}(A)$.
Or comme $\dim(E_{\lambda_i}(A)) = 1$, X forme une famille libre de cardinal égal à la dimension de $E_{\lambda_i}(A)$, c'est donc une base de $E_{\lambda_i}(A)$.

$\boxed{\text{Ainsi, l'espace propre de } A \text{ associé à } \lambda \text{ est la droite vectorielle engendrée par } X.}$

7.b). On a . $BAX = B\lambda X = \lambda BX$

. $BAX = ABX$

$\boxed{\text{D'où } BAX = \lambda BX = ABX}$

7.c) . Si $BX = 0$ alors $BX \in Vect(X)$.

. Si $BX \neq 0$ alors comme $A(BX) = \lambda BX$, $BX \in E_\lambda(A) = Vect(X)$.

D'où $BX \in Vect(X)$

Bilan : $\boxed{BX \in Vect(X)}$

Numéro d'inscription 50663

Né(e) le 17/02/2003

Nom CLAVERIE

Prénom (s) STANISLAS PIERRE

Signature S. claverie

19.93 / 20

Écricome Épreuve : MATHS APPROFONDIES

Sujet 1 ou 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 2/5

Numéro de table 5

II) 8) Soit X vecteur propre de A, on a

II) 9)a) Comme A et B partagent les mêmes vecteurs propres d'après 8) par symétrie, on ordonne les $(X_1, \dots, X_n)$ tels que $\forall i \in [\![1,n]\!], X_i \in E_{\lambda_i}(A)$

$\boxed{\text{On obtient } \forall i \in [\![1,n]\!], AX_i = \lambda_i X_i}$

9.b) Soit $i \in [\![1,n]\!]$, $ABX_i = A\mu_i X_i$

$= \mu_i A X_i$

$= \mu_i \times \lambda_i X_i$

$= \lambda_i \mu_i X_i$

Comme $X_i \neq 0$, on a $\lambda_i \mu_i \in Sp(AB)$

D'où $\forall i \in [\![1,n]\!], \lambda_i \mu_i \in Sp(AB)$

$\boxed{\text{D'où } Sp(AB) = \{\lambda_i \mu_i, i \in [\![1,n]\!]\}}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.93 / 20

I/10.) a) <u>Linéarité</u> : Soit $(P,Q) \in (\mathbb{R}_{n-1})^2$, Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, on a en notant φ l'application

$$\varphi(\alpha P + \beta Q) = ((\alpha P + \beta Q)(\lambda_1), \dots, (\alpha P + \beta Q)(\lambda_n))$$
$$= \alpha (P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n)) + \beta (Q(\lambda_1), \dots, Q(\lambda_n))$$
$$= \alpha \varphi(P) + \beta \varphi(Q)$$

D'où la linéarité.

. <u>Injectivité</u> : Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $\varphi(P) = (0, \dots, 0)$

On a alors $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $P(\lambda_i) = 0$

Alors P admet n racines deux à deux distincts, d'où P est le polynôme nul.

Ainsi $\mathrm{Ker}(\varphi) = 0_{\mathbb{R}_{n-1}[X]}$ d'où $\boxed{\varphi \text{ est injective}}$

Comme $\dim(\mathbb{R}_{n-1}[X]) = n = \dim(\mathbb{R}^n)$

On a φ qui est bijective

$\boxed{\text{Bilan : } \varphi \text{ est bijective et linéaire, c'est donc un isomorphisme.}}$

I/10. b) Soit P, Q tel que : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $BX_i = P(\lambda_i)X_i$

: $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $BX_i = Q(\lambda_i)X_i$

On a alors $\forall i \in [\![1,n]\!]$ $(P(\lambda_i) - Q(\lambda_i))X_i = 0$

Or comme $X_i \neq 0$, $\forall i \in [\![1,n]\!]$ $(P(\lambda_i) - Q(\lambda_i)) = 0$

D'où $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $(P-Q)(\lambda_i) = 0$

D'où $P-Q$ admet n racines distincts et est de degré $n-1$, c'est donc le polynôme nul. D'où $P = Q$. $\boxed{\text{Ainsi } \exists! P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \text{ tel que } \forall i \in [\![1,n]\!]\ BX_i = P(\lambda_i)X_i}$

II) 10.c) Soit $i \in [\![1, n]\!]$, $P(A)X_i = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^k (X_i)$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \lambda_i^k X_i$$

$$= P(\lambda_i) X_i$$

$$= B X_i \text{ d'après b)}$$

D'où $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $P(A)X_i = BX_i$

Ainsi $P(A)$ et B coïncident sur une base de $M_{n,1}(\mathbb{R})$, ils sont donc égaux. $\boxed{\text{D'où } P(A) = B}$

II) 11.a) On a • $\mathcal{C}(A) \subset M_n(\mathbb{R})$

• $0 \in \mathcal{C}(A)$ car $A \times 0 = 0 = B \times 0$

• Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, Soit $(C, B) \in \mathcal{C}(A)^2$, on a :

$$A(\lambda C + \mu B) = \lambda AC + \mu AB$$

$$= \lambda CA + \mu BA \quad \text{car } (C, B) \in \mathcal{C}^2(A)$$

$$= (\lambda C + \mu B)A$$

D'où $(\lambda C + \mu B) \in \mathcal{C}(A)$

$\boxed{\text{Bilan : } \mathcal{C}(A) \text{ est un sous-espace vectoriel de } M_n(\mathbb{R})}$

11.b) D'après 10.c) $\{B \in M_n(\mathbb{R}) \,,\, AB = BA\} = \{P(A), P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]\}$ car $B = P(A)$.

D'où $\boxed{\mathcal{C}(A) = \{P(A), P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]\}}$

11.c) D'après 6), on a $(I_n, A, \dots, A^{n-1})$ qui est une famille libre et génératrice de $\{P(A), P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]\}$
C'est donc une base de $\{P(A), P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]\} = \mathcal{C}(A)$

D'où $\dim(\mathcal{C}(A)) = \text{Card}(I_n, A, \dots, A^{n-1}) = n$.

$\boxed{\text{Ainsi } \dim(\mathcal{C}(A)) = n.}$

Exercice n° 2 :

1) Comme 0 n'est pas valeur propre de f, on a $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.
D'où f est injective et donc a fortiori bijective car c'est un endomorphisme.

$\boxed{f \text{ est donc un endomorphisme bijectif, c'est-à-dire un automorphisme}}$

2) a) $\boxed{f \text{ est symétrique, alors } \forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ \langle f(x), y \rangle = \langle f(y), x \rangle}$

2) b) Comme A est la matrice de f symétrique, on a :
$\boxed{{}^tA = A}$

2) c) A est une matrice symétrique réelle, Donc d'après le théorème spectral,

$\boxed{\exists P \text{ orthogonale et } D \text{ diagonale tels que : } D = {}^tPAP}$

2.d). Soit $x \in \mathbb{R}^n$, écrivons x dans une base orthonormée de vecteurs propres $(x_1, \dots, x_n)$ associés aux valeurs propres $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ de A qui existe d'après le théorème spectral, on a :

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \quad \text{avec} \quad (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n.$$

D'où
$$\langle f(x), x \rangle = \langle f(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i), \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j \rangle$$
$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j \langle \lambda_i x_i, x_j \rangle \text{ par linéarité}$$
$$= \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \lambda_i$$

Or comme $\forall i \in [\![1, n]\!]$ $\lambda_1 \leq \lambda_i \leq \lambda_n$, on a
$$\lambda_1 \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \leq \langle f(x), x \rangle \leq \lambda_n \sum_{j=1}^n \alpha_i^2$$

$\boxed{\text{D'où } \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \lambda_1 \|x\|^2 \leq \langle f(x), x \rangle \leq \lambda_n \|x\|^2}$

Numéro d'inscription 500663

Né(e) le 17/02/2003

Signature S. claverie

Nom CLAVERIE

Prénom (s) STANISLAS PIERRE

19.93 / 20

Écricome Épreuve : MATHS APPROFONDIES

Sujet 1 ou 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 3 / 5

Numéro de table 5

2) e) . Si $x = 0$, alors $\langle f(x), x\rangle = 0$

. Si $\langle f(x), x\rangle = 0$

alors nécessairement $\langle f(x), x\rangle = \lambda_1 \|x\|^2 = 0$

Or $\|x\|^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

D'où $x = 0$

$\boxed{\text{Bilan } x = 0 \Leftrightarrow \langle f(x), x\rangle = 0}$

3) a) . $g(x) = \frac{1}{2}\langle f(x), x\rangle - \langle u, x\rangle$

$= \frac{1}{2} \times 2 \sum_{0 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} u_i x_i$

$\boxed{\text{Bilan. } \forall x \in \mathbb{R}^n, \ g(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + \sum_{0 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j - \sum_{i=1}^{n} u_i x_i}$

3. b) g est polynomiale sur $\mathbb{R}^n$, $\boxed{\text{elle est donc de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}^n}$

et on a :

$$\partial_1 g(x) = a_{11} x_1 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^{n} a_{1j} x_j - u_1$$

$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \partial_1 g(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j - u_1}$

3. c) Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\nabla(g(x)) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j - u_1, \dots, \sum_{j=1}^{n} a_{nj} x_j - u_n\right)$

$= \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j, \dots, \sum_{j=1}^{n} a_{nj} x_j\right) - \sum_{i=1}^{n} u_i$

$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^n, \ \nabla(g)(x) = f(x) - u}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.93 / 20

4) m st point critique de $g \Leftrightarrow \nabla g(m) = 0$

$\Leftrightarrow f(m) = u$

$\boxed{m \text{ st point critique de } g \Leftrightarrow m = f^{-1}(u) \text{ par bijectivité de } f.}$

5)
Soit $x \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$g(x) - g(m) = \frac{1}{2}\langle f(x), x\rangle - \langle u, x\rangle - \frac{1}{2}\langle f(m), m\rangle + \langle u, m\rangle$$

$$= \frac{1}{2}\langle f(x), x\rangle - \langle u, x\rangle - \frac{1}{2}\langle u, m\rangle + \langle u, m\rangle$$

$$= \frac{1}{2}\langle f(x), x\rangle - \langle u, x\rangle + \frac{1}{2}\langle u, m\rangle$$

$$= \frac{1}{2}\langle f(x), x\rangle + \frac{1}{2}\langle u, m - x\rangle - \frac{1}{2}\langle u, x\rangle$$

$$= \frac{1}{2}\langle f(x) - u, x - m\rangle \cancel{+\frac{1}{2}}\langle f(x), m\rangle - \frac{1}{2}\langle f(m), x\rangle$$

$$= \frac{1}{2}\langle f(x - m), x - m\rangle + \frac{1}{2}\langle f(x), m\rangle - \frac{1}{2}\langle m, f(x)\rangle$$

par symétrie

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^n, g(x) - g(m) = \frac{1}{2}\langle f(x - m), x - m\rangle}$$

6) On a $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\frac{1}{2}\langle f(x - m), x - m\rangle \geq \lambda_1 \frac{\|x - m\|^2}{2} \geq 0$ d'après 2).d).
D'où $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $g(x) - g(m) \geq 0$

$\boxed{\text{Bilan : } g \text{ admet un minimum global en } m}$

7)a) $\langle f(a+h), a+h\rangle = \langle f(a)+f(h), a+h\rangle$

$= \langle f(a),a\rangle + \langle f(a),h\rangle + \langle a, f(h)\rangle + \langle f(h),h\rangle$

$\boxed{\langle f(a+h), a+h\rangle = \langle f(a),a\rangle + 2\langle f(a),h\rangle + \langle f(h),h\rangle}$ par symétrie de f.

7.b) $g(a+h) = \frac{1}{2}\langle f(a+h), a+h\rangle - \langle u, a+h\rangle$

$= \frac{1}{2}\langle f(a),a\rangle - \langle u,a\rangle + \frac{1}{2}\langle f(h),h\rangle + \langle f(a),h\rangle - \langle u,h\rangle$

$= g(a) + \frac{1}{2}\langle f(h),h\rangle + \langle f(a)-u, h\rangle$

$\boxed{g(a+h) = g(a) + \langle \nabla g(a), h\rangle + \frac{1}{2}\langle f(h),h\rangle}$ d'après 3.c)

8.a) Soit $p\in\mathbb{N}$ Appliquons cette égalité à $a = m_p$ et $h = -\alpha \nabla g(m_p)$

On a $g(m_p - \alpha\nabla g(m_p)) = g(m_p) - \alpha\langle \nabla g(m_p), \nabla g(m_p)\rangle + \frac{\alpha^2}{2}\langle f(\nabla g(m_p)), \nabla g(m_p)\rangle$

$\boxed{\text{D'où } \forall p\in\mathbb{N},\ g(m_{p+1}) = g(m_p) - \alpha\,\|\nabla g(m_p)\|^2 + \frac{\alpha^2}{2}\langle f(\nabla g(m_p)), \nabla g(m_p)\rangle}$

8.b) Soit $p\in\mathbb{N}$, on a $\langle f(\nabla g(m_p)), \nabla g(m_p)\rangle \leq \lambda_n \|\nabla g(m_p)\|^2$ d'après 2.d)

D'où $g(m_{p+1}) \leq g(m_p) - \alpha\|\nabla g(m_p)\|^2 + \frac{\lambda_n \alpha^2}{2}\|\nabla g(m_p)\|^2$

$\boxed{\text{D'où } \forall p\in\mathbb{N},\ g(m_{p+1}) \leq g(m_p) - \alpha\left(1 - \frac{\alpha\lambda_n}{2}\right)\|\nabla g(m_p)\|^2}$

9.a), on a • $g(m_p)_{p\in\mathbb{N}}$ minorée par $g(m)$ d'après 6)

• $\forall p\in\mathbb{N}$, $g(m_{p+1}) \leq g(m_p)$ d'après 8.b) avec $\alpha \in \left]0, \frac{1}{\lambda_n}\right]$

D'où $(g(m_p))_{p\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

$\boxed{(g(m_p))_{p\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante et minorée, elle est donc convergente.}}$

9.b) On a d'après 5) avec $x = m_p$ et d'après 2 1)

Soit $p \in \mathbb{N}$

$$\frac{\lambda_1}{2} \|m_p - m\|^2 \leq \frac{1}{2} \langle f(m_p - m), m_p - m \rangle = g(m_p) - g(m)$$

$$\boxed{\text{D'où } \forall p \in \mathbb{N},\ \|m_p - m\|^2 \leq \frac{2}{\lambda_1}\left(g(m_p) - g(m)\right)}$$

9.c) Comme $(g(m_p))_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers $g(m)$, on a $\lim\limits_{p\to+\infty} (g(m_p) - g(m)) = 0$

D'où par encadrement, $\lim\limits_{p\to+\infty} \|m_p - m\|^2 = 0$

$$\boxed{\text{D'où } \lim_{p\to+\infty} \|m_p - m\| = 0}$$

---

10) a) • Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, Soit $((x,y),(x',y')) \in (\mathbb{R}^2)^2$, on a :

$$\begin{aligned} f(\lambda(x,y) + \mu(x',y')) &= (2\lambda x + 2\mu x' + \lambda y + \mu y', \lambda x + \mu x' + 2\lambda y + 2\mu y') \\ &= \lambda(2x+y, x+2y) + \mu(2x'+y', x'+2y') \\ &= \lambda f(x,y) + \mu f(x',y') \text{ d'où la linéarité} \end{aligned}$$

• Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (2x+y, x+2y) \in \mathbb{R}^2$

D'où $f(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^2$

$\boxed{\text{Ainsi } f \text{ est un endomorphisme.}}$

Soit $((x,y),(x',y')) \in (\mathbb{R}^2)^2$, on a $\langle f(x,y), (x',y') \rangle$

$$\begin{aligned} &= \langle (2x+y), (x+2y), (x',y') \rangle \\ &= 2xx' + yx' + xy' + 2yy' \\ &= (2x'+y')x + (x'+2y')y \\ &= \langle (x,y), (2x'+y', x'+2y') \rangle \\ &= \langle (x,y), f(x',y') \rangle \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Ainsi } f \text{ est symétrique car } \forall ((x,y),(x',y')) \in (\mathbb{R}^2)^2,\ \langle f(x,y),(x',y')\rangle = \langle (x,y), f(x',y')\rangle}$

Numéro d'inscription 500663

Né(e) le 17/02/2003

Nom CLAVERIE

Prénom (s) STANISLAS PIERRE

19.93 / 20

Écricome Épreuve : MATHS APPROFONDIES

Sujet 1 ou 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 4 / 5

Numéro de table 5

Signature

10) b) ◦ On a la courbe de $g(m_p)$ pour $\alpha = \alpha_0$ qui converge vers 0,2 d'après le graphique a) alors que pour $\alpha = \alpha_1$, $g(m_p)$ ne semble pas converger

◦ De même, dans b), on voit que m_p converge vers $(1,0)$ pour $\alpha = \alpha_0$ et ne converge pas pour $\alpha = \alpha_1$

$\boxed{\alpha_1 \text{ ne vérifie pas les hypothèses.}}$

En effet, en notant $B = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, on a

$$\mathrm{Mat}_B(f) = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \end{array} \end{array}$$

Or $\lambda \in Sp(f) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$ non inversible

$\Leftrightarrow (2-\lambda)^2 - 1^2 = 0$

$\Leftrightarrow (3-\lambda)(1-\lambda) = 0$

D'où $Sp(f) = \{1, 3\}$ d'où $\lambda_2 = 3$.

Or $0,67 > \frac{1}{\lambda_2} = 0,33$

D'où $\alpha_1 \notin]0, \frac{1}{\lambda_2}[$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.93 / 20

10. c) $\boxed{\text{La valeur de } m \text{ semble être } (1,0)}$

10. d) . On a $d_0 = 0{,}2 \in]0, \frac{1}{\lambda_2}] \approx]0, 0{,}33]$

. On a $m = f^{-1}(2,1)$
$= (1,0)$

D'où les résultats expérimentaux sont en adéquation avec ce qui a été démontré. En effet $\lim\limits_{p\to+\infty} \|m_p - m\| = \|(1,0)-(1,0)\| = 0$.

Problème:

I) 1)

```
def F(x):
    return (np.exp(x)/(1+ np.exp(x)))
```

I) 2) $v : x \longmapsto \frac{1}{1+e^x}$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, d'où par quotient de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, $\boxed{F \text{ est } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}}$.

On a $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}}$

D'où $f'(x) = \frac{e^x(1+e^x)^2 - 2e^x(1+e^x)}{(1+e^x)^4}$

$= \frac{e^x - (e^x)^2}{(1+e^x)^3}$

$\boxed{\text{D'où } f' : x \longmapsto \frac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}}$

I)3) On a :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0
$F'(x)$			$+$		
F	0		$\nearrow$		1

I)4) Soit $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \dfrac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} = \dfrac{e^{x}}{(1+e^{-x})^2 \times (e^{x})^2} = \dfrac{e^{x}}{(1+e^{x})^2} = f(x)$

$\boxed{\text{D'où } f \text{ est paire.}}$

$$F(-x) - \frac{1}{2} = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{(1+e^{x})} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{-e^{x} + 1 + e^{x}}{(1+e^{x})} - \frac{1}{2}$$

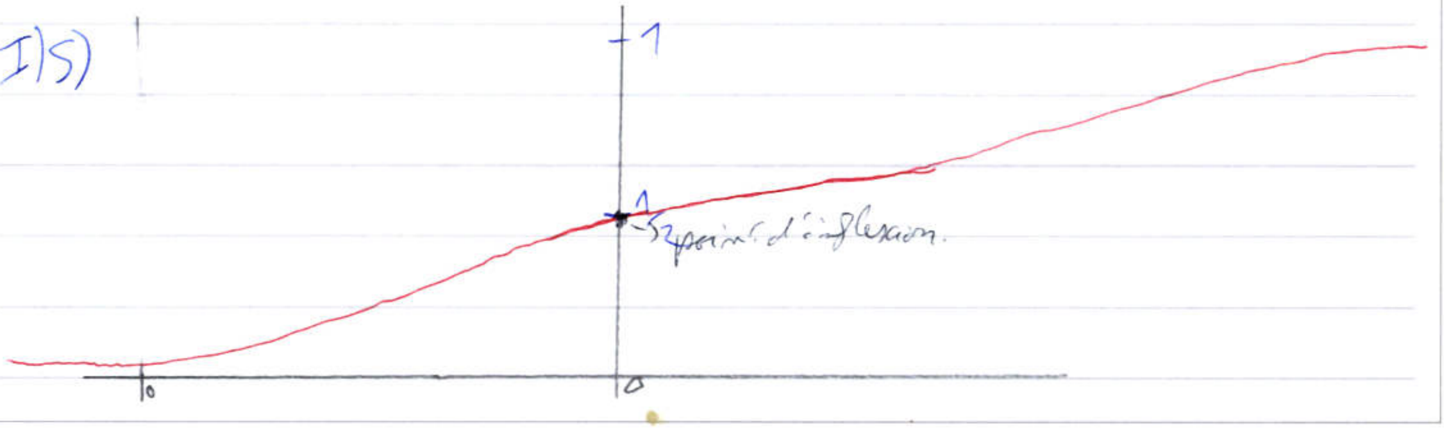
$$= -F(x) + 1 - \frac{1}{2}$$

$$= -F(x) + \frac{1}{2}$$

$$= -\left(F(x) - \frac{1}{2}\right)$$

$\boxed{\text{D'où } F - \frac{1}{2} \text{ est impaire.}}$

I)5)



II) 7) On a $\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$ or $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge d'après Riemann.

Donc par comparaison, $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ converge absolument.

$\boxed{\text{Donc a fortiori } \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \text{ converge}}$

II) 8) On a : . f continue sur $\mathbb{R}$

. f est définie positive sur $\mathbb{R}$.

. $\int_A^B f(t)dt = [F(t)]_A^B$

$= \frac{e^B}{1+e^B} - \frac{e^A}{1+e^A}$

Or $\lim_{A\to -\infty} \frac{e^A}{1+e^A} = 0$ et $\lim_{B\to +\infty} \frac{e^B}{1+e^B} = 1$

D'où $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$.

$\boxed{\text{Ainsi } f \text{ est bien une densité de probabilité}}$ et sa fonction de répartition est

$\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = [F(t)]_{A\to -\infty}^{x}$

$= F(x)$

$\boxed{\text{D'où } F \text{ est bien la fonction de répartition associée.}}$

9) Étudions la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)dt$, on a :

$\lim_{t\to -\infty} t^2 \times t^2 \times \frac{e^t}{1+e^t} = 0$ par croissance comparée.

D'où $|t^2 f(t)| = \underset{t\to -\infty}{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{t^2} dt$ converge d'après Riemann

Donc par comparaison d'intégrales positives, $\int_{-\infty}^{0} t^2 f(t)dt$ converge.

De même, $|t^2 f(t)| = \underset{t\to +\infty}{O} \frac{1}{t^2}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge d'après Riemann.

D'où $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)dt$ converge absolument.

$\boxed{\text{Donc } f \text{ admet une variance et a fortiori une espérance}}$

Numéro d'inscription S00663

Né(e) le 17/02/2003

Signature S. Laverie

Nom CLAVERIE

Prénom (s) STANISLAS PIERRE

19.93 / 20

Ecricome Épreuve : Maths approfondies.

Sujet 1 ou 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 5 / 5

Numéro de table 5

II) 10) a) $\int_{-\infty}^{0} x f(x)dx \underset{=}{\overset{u=-x}{=}}$ → changement de variable affine $\int_{+\infty}^{0} -u f(-u) \times (-1) du$

$= -\int_{0}^{+\infty} u f(-u) du$

$\boxed{\text{D'où } \int_{-\infty}^{0} x f(x)dx = -\int_{0}^{+\infty} u f(u) du \text{ par parité de } f}$

10. b) On a $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{-\infty}^{0} x f(x) dx + \int_{0}^{+\infty} x f(x) dx$

$\boxed{E(X) = 0}$

11) : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ Koenig Huygens

$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$

$\boxed{V(X) = 2\int_{0}^{+\infty} x^2 \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx \text{ par parité}}$

~~$u = x^2$ → changement de variable C^1 bijectif~~

~~$= 2\int_{0}^{+\infty} u \frac{e^{\sqrt{u}}}{(1+e^{\sqrt{u}})^2} \times \frac{1}{2\sqrt{u}}$~~

12). Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\lim_{x \to +\infty} x^2 \times x e^{-nx} = 0$ par croissance comparée

D'où $x e^{-nx} = \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge d'après Riemann.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.93 / 20

Par comparaison, d'intégrales à termes positifs,

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^{+\infty} x e^{-nx} dx \text{ converge}}$

$$\int_0^{+\infty} x e^{-nx} dx \overset{u=nx}{=} \int_0^{+\infty} \frac{u}{n} e^{-u} \times \frac{1}{n} du$$

$$= \frac{1}{n^2} \int_0^{+\infty} u e^{-u}$$

$$= \frac{1}{n^2} \times \Gamma(2)$$

$$\boxed{\int_0^{+\infty} x e^{-nx} = \frac{1}{n^2}}$$

14)a) Soit $N \in \mathbb{N}^*$, Soit $x \in \mathbb{R}_+$, on a

$$|R_N(x)| = \left| \frac{x e^{-(N+1)x}}{1+e^{-x}} \right|$$

$\boxed{\forall N \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+ \ |R_N(x)| \leq x e^{-(N+1)x} \text{ car } 1+e^{-x} \geq 1}$

14b) Soit $N \in \mathbb{N}^*$, On a $\int_0^{+\infty} |R_N(x) dx| \leq \int_0^{+\infty} x e^{-(N+1)x}$

$$\leq \frac{1}{(N+1)^2} \text{ d'après 12).}$$

D'où $\left| \int_0^{+\infty} R_N(x) dx \right| \leq \frac{1}{(N+1)^2}$ par Inégalité triangulaire

Et comme $\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{(N+1)^2} = 0$

$\boxed{\text{Par encadrement, } \lim_{N \to +\infty} \int_0^{+\infty} R_N(x) dx = 0}$

15) $V(X) = 4\left(\sum_{n=1}^{N} \left((-1)^{n-1}\int_0^{+\infty} x e^{-nx}dx\right) + (-1)^N \int_0^{+\infty} R_N(x)dx\right)$

$= 4\left(\sum_{n=1}^{n} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} + (-1)^N \int_0^{+\infty} R_N(x)dx\right)$

Or comme $\lim_{N\to+\infty} \int_0^{+\infty} R_N(x)dx = 0$, on a

$V(X) = 4\sum_{n=1}^{n} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$

$= 4 \times \frac{\pi^2}{12}$

$\boxed{\text{D'où } V(X) = \frac{\pi^2}{3}}$

16) On a, $E(V_n) = \frac{1}{n} \times n E(X^2)$ par linéarité

$= V(X) + E(X)^2$

$= V(X)$ car $E(X) = 0$

$= \frac{\pi^2}{3}$

• $V(V_n) = \frac{1}{n^2} \times n V(X^2)$ par indépendance

$= \frac{1}{n} V(X^2) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$

$\boxed{\text{D'où } V_n \text{ converge en probabilité vers } \frac{\pi^2}{3}}$

17) Posons : $T_n = f(V_n)$ avec : $f : x \to \sqrt{3x}$

Comme f est continue sur $\mathbb{R}^+$ et

$\begin{cases} V_n(\Omega) = \mathbb{R}^+ \\ (V_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \xrightarrow{\text{proba}} \frac{\pi^2}{3} \end{cases}$

$\boxed{\text{On a par propriété } T_n \xrightarrow{\text{proba}} f\left(\frac{\pi^2}{3}\right) = \pi}$

18) On a ~~$P(X \leq x) =$~~ $P(F^{-1}(U) \leq x)$

$$= P(U \leq F(x))$$

$$= F(x) \text{ car } F(x) \in [0,1]$$

D'où $P(F^{-1}(U) \leq x) = F(x) = P(X \leq x)$

$\boxed{\text{Ainsi } F^{-1}(U) \text{ et } X \text{ suivent la même loi}}$

19) $\frac{e^x}{1+e^x} = U \Leftrightarrow \frac{1}{e^{-x}+1} = U$

$$\Leftrightarrow e^{-x}+1 = \frac{1}{U}$$

$$\Leftrightarrow e^{-x} = \frac{1}{U} - 1$$

$$\Leftrightarrow -x = \ln\left(\frac{1}{U} - 1\right)$$

$$\Leftrightarrow x = -\ln\left(\frac{1}{U} - 1\right)$$

```
from math import *
def realisation_X():
    return (-log(1/rd.random() - 1))
```

```
20) def estimation_pi(n):
        T = 0
        for k in range(n):
            T = T + (realisation_X())**2
        return (sqrt(3*T/n))
```