Copie anonyme - n°anonymat :

T7-00146 Maths E

Code épreuve : 298	Nombre de pages : 14	Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques appliquées EDHEC

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Exercice 2

1) Pour vérifier (*), d'après l'inégalité des accroissements finis, f doit être dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifier $\forall x \in \mathbb{R}, |f'(x)| \leq K$

Par exemple $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{K}{2}x$ vérifie (*)

2) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme elle est K-contractante.

f est dérivable sur $\mathbb{R} \Rightarrow$ f est continue sur $\mathbb{R}$

C'est une condition nécessaire

3) Supposons d'abord que $f(x) = x$ admet une solution $x_0 \in \mathbb{R}^*$

On aurait alors $\left|\frac{f(x_0)}{x_0}\right| = 1$ qui découle de $f(x_0) = x_0$

Or $\forall x \in \mathbb{R}^*, \left|\frac{f(x)}{x}\right| \leq K < 1$ en posant $y = 0$

On arrive donc à une contradiction. L'équation $f(x) = x$ n'admet pas de solution sur $\mathbb{R}^*$.

Il existe au plus une solution qui est 0 si elle existe

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

4) a) On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $HR(n)$: " $|u_{n+1} - u_n| \leq K^n |u_1 - u_0|$ "

Montrons cette propriété par récurrence sur $\mathbb{N}$

initialisation : $|u_1 - u_0| = K^0 |u_1 - u_0|$ donc $HR(0)$ est vraie

hérédité : On suppose $HR(n)$ vraie pour un n fixé de $\mathbb{N}$

Alors $|u_{n+1} - u_n| \leq K^n |u_1 - u_0|$

En multipliant par K, $K|u_{n+1} - u_n| \leq K^{n+1} |u_1 - u_0|$

Or $|f(u_{n+1}) - f(u_n)| \leq K |u_{n+1} - u_n|$

Donc $|u_{n+2} - u_{n+1}| \leq K^{n+1} |u_1 - u_0|$

$HR(n+1)$ est vraie

Ainsi la propriété est initialisée et héréditaire.
$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - u_n| \leq K |u_1 - u_0|$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $|u_{k+1} - u_k| \leq K^k |u_1 - u_0|$

Par sommation $0 \leq \sum_{k=0}^{n-1} |u_{k+1} - u_k| \leq \sum_{k=0}^{n-1} K^k |u_1 - u_0|$

et $\sum_{k \geq 0} K^k |u_1 - u_0|$ est une série géométrique convergente car $K \in]0;1[$

Alors par encadrement $\left(\sum_{k=0}^{n-1} |u_{k+1} - u_k|\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est majorée

On en conclue que la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ est convergente car absolument convergente.

Par télescopage, $\sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} - u_k = u_n - u_0$

Donc $(u_n - u_0)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie lorsque $n \to +\infty$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

c) On a alors $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = \lim_{n\to+\infty} u_n$

$\iff f(a) = a$ donc a est un point fixe de f

$f(x) = x$ admet une unique solution

5) a) $\forall i \geq 1$, $|u_{i+1} - u_i| \leq K^i |u_1 - u_0|$ d'après 4) a)

$\forall (n,p) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$, par sommation $\sum_{i=n}^{n+p-1} |u_{i+1} - u_i| \leq \sum_{i=n}^{n+p-1} K^i |u_1 - u_0|$

b) D'après l'inégalité triangulaire,

$$\left|\sum_{i=n}^{n+p-1} u_{i+1} - u_i\right| \leq \sum_{i=n}^{n+p-1} K^i |u_1 - u_0|$$

On effectue le changement d'indice $j = i - n$

Ainsi $$\left|\sum_{j=0}^{p-1} u_{j+n+1} - u_{j+n}\right| \leq \sum_{j=0}^{p-1} K^{j+n} |u_1 - u_0|$$

$$|u_{n+p} - u_n| \leq K^n |u_1 - u_0| \sum_{j=0}^{p-1} K^j \quad \text{par télescopage}$$

$$|u_{n+p} - u_n| \leq K^n \frac{1-K^p}{1-K} |u_1 - u_0|$$

c) En faisant tendre p vers $+\infty$ pour n fixé, avec $\begin{cases} u_{n+p} \xrightarrow[p\to+\infty]{} a \\ K^p \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0 \end{cases}$

On obtient bien que $|a - u_n| \leq \frac{K^n}{1-K} |u_1 - u_0|$

6) $t \mapsto 1 + e^t$ est de classe C^2 et strictement positive sur $\mathbb{R}$

Par inverse, $f : t \mapsto \frac{1}{1+e^t}$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

$\forall t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = \frac{-e^t}{(1+e^t)^2}$ et $f''(t) = \frac{e^t(e^t - 1)}{(1+e^t)^3}$ après simplification

b) On dresse le tableau suivant :

t	$-\infty$		0		$+\infty$
$e^t - 1$		$-$		$+$	
f'	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0

f'' est du signe de $t \mapsto e^t - 1$ sur $\mathbb{R}$

En utilisant le théorème de la bijection avec f' qui est strictement monotone et continue sur les intervalles $]-\infty, 0]$ et $]0, +\infty[$,

on a $f'(\mathbb{R}) = [-\frac{1}{4}, 0]$. $\forall t \in \mathbb{R}, |f'(t)| \leq \frac{1}{4}$

c) D'après l'inégalité des accroissements finis, $\forall x, y \in \mathbb{R}$,

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{4}|x - y|$$

f est donc $\frac{1}{4}$ - contractante.

d) Comme f vérifie les conditions qui nous ont permis d'établir que toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ converge, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Copie anonyme - n°anonymat :

Emplacement QR Code

Code épreuve : 298

Nombre de pages : 14

Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques appliquées EDHEC

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

e)

```
~~import numpy as np~~
def suite(n):
    u = 0
    for k in range(1, n+1):
        u = 1/(1+ np.exp(u))
    return u
```

f) $\forall n \in \mathbb{N}, \ |a - u_n| \leq \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n$ d'après 5/c) avec $\begin{cases} K = \frac{1}{4} \\ u_1 - u_0 = \frac{1}{2} \end{cases}$

On a $\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n \leq 10^{-3} \Rightarrow |a - u_n| \leq 10^{-3}$

Avec $\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n \leq 10^{-3} \iff \left(\frac{1}{4^n}\right) \leq \frac{3}{2000}$

$\iff 4^n \geq \frac{2000}{3}$

u_n est donc une valeur approchée de a à moins de 10^{-3} près dès que n vérifie

$4^n \geq 2000/3$

g)

```
n = 0
while 4**n < 2000/3 :
    n = n+1
print(suite(n))
```

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Exercice 3

1)a) A étant triangulaire supérieure, on a $Sp(A) = \{a, b\}$
Si $a = b$ alors A ne possède qu'une seule valeure propre : a

b) On suppose que A est diagonalisable pour $a = b$.

Dans ce cas $\dim(E_a(A)) = \dim(\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})) = 2$

On pose alors $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur quelconque de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

$$(A - aI_2)X = 0_{\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow y = 0$$

Ainsi $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_a(A)$

On arrive à une contradiction car $\text{card}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 1 < 2$

Ainsi, si $a = b$, A n'est pas diagonalisable

2) a) Comme pour la question 1)a), $Sp(A) = \{a, b\}$

b) On a $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $A\begin{pmatrix} 1 \\ b-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ b(b-a) \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} 1 \\ b-a \end{pmatrix}$

Alors $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ b-a \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres associés aux valeurs propres a et b. Puisque $\begin{cases} \dim E_a(A) \geq 1 \ ; \ \dim E_b(A) \geq 1 \\ \dim E_a(A) + \dim E_b(A) \leq 2 \end{cases}$,

ils constituent des bases des sous-espaces propres associés.

aux valeurs propres a et b.

c) $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\b-a\end{pmatrix}$ sont non colinéaires (il n'existe aucun $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $\lambda(b-a)=0$)

donc la famille B est libre. Elle est aussi génératrice de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ car elle contient 2 vecteurs.
B est une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

De plus on a $P = \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & b-a\end{pmatrix}$ qui est inversible

d) On en déduit que A est diagonalisable et peut en conséquence s'écrire $A = PDP^{-1}$

avec $D = \begin{pmatrix}a & 0\\0 & b\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow AP = PD$

3) a) $(X=Y) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} ((X=n)\cap(Y=n))$

par incompatibilité, $P(X=Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} P((X=n)\cap(Y=n))$

par indépendance, $P(X=Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X=n)P(Y=n)$

b) $P(X=Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$= \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^{n-1}$

$= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n$ qui est une somme de série géométrique convergente

$= \frac{1}{4} \times \frac{1}{\frac{3}{4}}$

Ainsi $P(X=Y) = \frac{1}{3}$

4) a) On note $\overline{D}$ l'évènement "A(X,Y) n'est pas diagonalisable".

$p = P(\overline{D}) = P(X=Y)$ donc $p = \frac{1}{3}$

b) Pour les grandes valeurs de m, i est proche de la probabilité que $X \neq Y$ ou que A soit diagonalisable, c'est-à-dire de $\underline{1-p}$.

Exercice 1

1)
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
où $\forall (i,j) \in [\![1,5]\!]^2$, a_{ij} vaut 1 si il y a une chaîne reliant le sommet noté "$i-1$" au sommet noté "$j-1$" sur le graphe et 0 sinon.

2) a) Il y a 5 chaînes de longueur 3 reliant les sommets 2 et 3 :

C_1 : 2 - 3 - 4 - 3
C_2 : 2 - 3 - 2 - 3
C_3 : 2 - 3 - 0 - 3
C_4 : 2 - 1 - 2 - 3
C_5 : 2 - 3 - 0 - 3

b)
```
B = F(A,3)
n = B[1,2]
print(n)
```

3) a)
$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
par lecture du graphe

b)
$$L = D - A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Copie anonyme - n°anonymat :

Emplacement QR Code

Code épreuve : 298	Nombre de pages : 14	Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques appliquées EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

c) L est symétrique donc elle est diagonalisable.

4) a) ${}^tX \in \mathcal{M}_{1,5}(\mathbb{R})$; $L \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$; $X \in \mathcal{M}_{5,1}(\mathbb{R})$

Donc ${}^tXL \in \mathcal{M}_{1,5}(\mathbb{R})$ et ${}^tXLX \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ ou $\mathbb{R}$

b) ${}^tXL = (2a-b-d \quad -a+2b-c \quad -b+2c-d \quad -a-c+3d-e \quad -d-e)$

$${}^tXLX = {}^tXL \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix}$$

$$= 2a^2-ab-ad-ab+2b^2-bc-bc+2c^2-cd-ad-cd+3d^2-2de-e^2$$

$$= a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2cd+d^2+d^2-2ad+a^2+d^2-2de+e^2$$

Donc ${}^tXLX = (a-b)^2+(b-c)^2+(c-d)^2+(d-a)^2+(d-e)^2$

c) On a alors $LX = \lambda X$ puis ${}^tXLX = \lambda {}^tXX$

Ainsi $\lambda = \dfrac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-d)^2+(d-a)^2+(d-e)^2}{a^2+b^2+c^2+d^2+e^2}$ si $X \neq 0_{\mathcal{M}_{5,1}(\mathbb{R})}$

Donc $\lambda \geq 0$ (somme de carrés et carré d'une somme)

Ainsi toutes les valeurs propres de L sont positives ou nulles.

d) $LV = 0_{\mathcal{M}_{5,1}(\mathbb{R})}$ donc $0 \in Sp(L)$ et comme $(\lambda_i)_{i \in [\![1,5]\!]}$

est croissante avec $\forall i \in [\![1.5]\!]$, $\lambda_i \geqslant 0$, $\lambda_1 = 0$.

5)a) Il faut résoudre $LX = 0_{\mathcal{M}_{5,1}(\mathbb{R})}$ en réduisant L grâce au pivot de Gauss-Jordan pour en déduire que
$X \in \{ M \in \mathcal{M}_{5,1}(\mathbb{R}) \ / \ \exists \lambda \in \mathbb{R}, \ X = \lambda U \}$

On aurait alors $LX = 0_{\mathcal{M}_{5,1}(\mathbb{R})} \Leftrightarrow X \in Vect(U)$

Admis

b) On a donc $\dim E_{\lambda_1}(L) = 1$.

C'est pourquoi $\lambda_2 \neq \lambda_1$.

Autrement dit $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \lambda_4 \leq \lambda_5$
$0 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \lambda_4 \leq \lambda_5$

Problème
Partie 1

1) f est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$ ($c > 0$), et continue sur $\mathbb{R}$ d'après les théorèmes généraux.

De plus, en posant $m \geqslant 1$: $\displaystyle\int_{-\infty}^{m} f(x)dx = \int_{1}^{m} \frac{c}{x^{1+c}} dx = \left[-\frac{1}{x^c} \right]_1^m$
$= 1 - \dfrac{1}{m^c}$

On a alors $\displaystyle\lim_{m \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{m^c}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

f est donc une densité.

2) On utilise les calculs précédents pour montrer que

$$F : x \mapsto \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x^c} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(f étant nulle sur $]-\infty, 1[$, $\int_{-\infty}^{1} f(t)dt = 0$)

3) a) si $x < 1$, $P_{(X>t)}(X \leqslant tx) = 0$ car $(X>t) \cap (X \leqslant tx) = \emptyset$

si $x \geqslant 1$,
$$P_{(X>t)}(X \leqslant tx) = \frac{P(t < X \leqslant tx)}{P(X > t)}$$

$$= \frac{F(tx) - F(t)}{1 - F(t)}$$

$$= \frac{\frac{1}{t^c} - \frac{1}{(tx)^c}}{\frac{1}{t^c}}$$

$$= \frac{\frac{x^c - 1}{(tx)^c}}{\frac{1}{t^c}}$$

$$= \frac{x^c - 1}{x^c}$$

Alors $P_{(X>t)}(X \leqslant tx) = 1 - \dfrac{1}{x^c}$

b) On déduit de ella que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$P_{(X>t)}\left(\frac{X}{t}\leq x\right) = \begin{cases} 1-\frac{1}{x^c} & \text{si } x\geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\left(\frac{X}{t} / X>t\right)$ suit donc la même loi que X.

Partie 2

4) $G(1) = P(Y\leq 1) = P(Y<1) + P(Y=1) = 0$
car Y est une variable à densité et g est nulle sur $]-\infty, 1[$

5) a) $\forall x\geqslant 1, \forall t>1,$

$$G(x) = P(Y\leq x) = P_{(Y>t)}\left(\frac{Y}{t}\leq x\right)$$

$$P(Y\leq x) = \frac{G(tx)-G(t)}{1-G(t)}$$ comme à la 3)a)

b) g est continue sur $]1,+\infty[$ donc, G étant une de ses primitives, G est de classe C^1 sur $]1,+\infty[$.

$\forall x>1, \forall t\geq 1,$ $G'(x) = \left(x\mapsto \frac{G(tx)-G(t)}{1-G(t)}\right)$

$$G'(x) = \frac{tG'(tx)}{1-G(t)}$$ car l'expression dépend de x. C'est donc la dérivée d'une composée.

c) Pour $x=1$, on a :

$$g(1) = \frac{tG'(t)}{1-G(t)} \Leftrightarrow \frac{c}{tG'(t)} = \frac{1}{1-G(t)}$$ avec $G'(t)\neq 0$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 298
Nombre de pages : 14
Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques appliquées EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

En inversant on obtient $\frac{c}{t} G'(t) = 1 - G(t)$

$\Leftrightarrow G(t) + \frac{c}{t} G'(t) = 1$ pour $t > 1$

6) a) y solution de $(E_1) \Leftrightarrow y(t) + \frac{t}{c} y'(t) = 0$ pour $t > 1$

$\Leftrightarrow \frac{z(t)}{t^c} + \frac{t^{c+1} z'(t)}{ct^{2c}} - \frac{z(t)}{t^c} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{t^{c+1}}{ct^{2c}} z'(t) = 0$

$\Leftrightarrow z'(t) = 0$ pour tout t de $]1, +\infty[$

$\Leftrightarrow z$ est constante sur $]1, +\infty[$

7) b) On a $1 - \frac{1}{1^c} = 0$ donc G est continue en 0

et $G : t \mapsto \begin{cases} 1 - \frac{1}{t^c} & \text{si } t \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Y suit bien la loi de Pareto de paramètre c, ce que

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

l'on peut vérifier en dérivant G.

Partie 3

8) a) $Z(\Omega) = \mathbb{R}_+$ ($x \mapsto \ln x$ bijective)

$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ P(Z \leq x) = P(X \leq e^x) = F(e^x)$

$\forall x \in \mathbb{R}_-^*,\ P(Z \leq x) = 0$

$$H : x \mapsto \begin{cases} F(e^x) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

b) $$H : x \mapsto \begin{cases} 1 - e^{-cx} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc $Z \hookrightarrow \mathcal{E}(c)$

c)

```
import numpy.random as rd
def simulX(c) :
        Z = rd.exponential(1/c)
        return np.exp(Z)
```