Copie anonyme - n°anonymat :

T7-00146
Maths E

Code épreuve : 296 | **Nombre de pages :** 13 | **Session :** 2023

Épreuve de : Mathématiques appliquées

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Exercice 2

Partie I

1. a) On a $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $rg(A-2I_3) = 1$

b) Comme $rg(A-2I_3) < 3$,

$A - 2I_3$ n'est pas inversible et $2 \in Sp(A)$

D'après le théorème du rang, $\dim Ker(A-2I_3) + rg(A-2I_3) = 3$

$\iff \dim E_2(A) = 2$

c) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un vecteur de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$(A-2I_3)X = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \iff x = -y - z$

Et donc $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de A.

d) A peut admettre au plus une seule valeur propre $\lambda \neq 2$,
car en cas d'existence on a $\begin{cases} \dim E_\lambda(A) \geq 1 \\ \dim E_\lambda(A) + \dim E_2(A) \leq 3 \end{cases}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

2. a) Les coefficients de MU représentent la somme des coefficients par ligne de M.

b) On a $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\4\\4\end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ donc $4 \in Sp(A)$

et $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_4(A)$, qui est de dimension 1.

3. Comme $\dim E_2(A) + \dim E_4(A) = 3 = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$,

A est diagonalisable et $A = PDP^{-1}$

avec $P = \begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\1 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}$

Partie II

4. En écrivant $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, on peut écrire le système sous forme matricielle avec $(S) : X' = AX$

Les solutions sont $\left\{X : t \mapsto \alpha\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}e^{4t} + \beta\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}e^{2t} + \gamma\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}e^{2t} / \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}\right\}$

On trouve ainsi $\forall t \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} x(t) = \alpha e^{4t} - (\beta+\gamma)e^{2t} \\ y(t) = \alpha e^{4t} + \beta e^{2t} \\ z(t) = \alpha e^{4t} + \gamma e^{2t} \end{cases}$ où $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

5. a) Le problème de Cauchy permet d'affirmer l'existence et l'unicité de X_0.

b) $\begin{pmatrix}x_0(0)\\y_0(0)\\z_0(0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases}\alpha - \beta - \gamma = 1\\ \alpha + \beta = -1\\ \alpha + \gamma = 0\end{cases} \iff \begin{cases}\alpha = 0\\ \beta = -1\\ \gamma = 0\end{cases}$

Il reste alors $\underline{X_0 : t \mapsto \begin{pmatrix} e^{2t} \\ -e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}}$

Partie III

6. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$B - \lambda I_2$ non inversible $\Leftrightarrow \det(B - \lambda I_2) = 0$

$\Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda = 1$

Donc $\underline{Sp(B) = \{1\}}$

7. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

On résout $(B - 2I_2)X = 0_{\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 4y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = -2y$

Ainsi $E_2(B) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $\dim E_2(B) < \dim \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$

<u>B n'est pas diagonalisable</u>

8. a) v_1 et v_2 n'étant pas colinéaires, ils forment une famille libre et génératrice de $\mathbb{R}^2$.

<u>β est une base de $\mathbb{R}^2$.</u>

b) En posant $V_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

on obtient que $BV_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = V_1$

et $BV_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = V_1 + V_2$

A partir des images des vecteurs de β on peut construire

$$\underline{T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

c) Avec la formule du changement de base on a

$B = QTQ^{-1}$ où Q est inversible et est la matrice de passage de β à la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

En inversant la matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ de passage de la base canonique à β, on obtient que

$$\underline{Q = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}}$$

9. On peut encore résoudre le système sous forme matricielle.

En effet (Σ) : $X' = BX$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow X' = QTQ^{-1} X$$

$$\Leftrightarrow Q^{-1}X' = TQ^{-1} X$$

Posons $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = Q^{-1}X$ et résolvons $U' = TU$ où u et v sont deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$(\Sigma')\begin{cases} u' = u + v \\ v' = v \end{cases}$ $\quad \forall t \in \mathbb{R},\ v(t) = \mu e^t$ où $\mu \in \mathbb{R}$

et en additionnant solution particulière et homogène,
$\forall t \in \mathbb{R},\ u(t) = (\lambda + \mu)e^t$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$

Ainsi $U = \begin{pmatrix} (\lambda+\mu)e^t \\ \mu e^t \end{pmatrix}$

Et comme $X = QU$; $\quad QU = \begin{pmatrix} -\mu e^t \\ -(\lambda + 3\mu)e^t \end{pmatrix}$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 296

Nombre de pages :

Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques appliquées

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} x(t) = -\mu e^t \\ y(t) = -(\lambda + 3\mu)e^t \end{cases}$ où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

Exercice 3

Partie I

1. a) h est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions continues.

De plus $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x \ln x = 0$ ainsi $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} h(x) = h(0)$

Donc h est continue en zéro et puisque $\mathbb{R}_+^* \cup \{0\} = \mathbb{R}_+$,

h est continue sur $\mathbb{R}_+$.

b) On étudie pour $x > 0$, $\dfrac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \dfrac{x \ln x}{x} = \ln x$

Or $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$ qui n'est pas une limite finie.

Alors h n'est pas dérivable en zéro.

c) On a $h(0) = 0$ et $\forall x > 0$, $x \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Les antécédents de 0 par h sont 0 et 1.

2. $\forall x \in [0,1], \quad 1-x \in [0,1]$

g est dérivable sur $]0,1[$ comme combinaison linéaire de fonctions dérivables.

$\forall x \in]0,1[, \quad g(x) = -x\ln x - (1-x)\ln(1-x)$

$$g'(x) = \ln\left(\frac{1}{x} - 1\right)$$

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$\frac{1}{x} - 1$		$+$		$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g	0	$\nearrow$	$\ln(2)$	$\searrow$	0

avec $\dfrac{1}{\frac{1}{2}} - 1 = 1$

et $\frac{1}{x} - 1 > 1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$

Partie II

3. $H(U) = -\sum_{i=1}^{n} h(P(X=i)) = -\sum_{i=1}^{n} h\left(\frac{1}{n}\right)$

$$= -\frac{n}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\right)$$

$H(U) = \ln(n)$

4. $H(X) = -h(p) - h(1-p)$
$= g(p)$

Or $\forall p \in]0,1[, \quad g(p) \leq \ln 2$

donc $H(X) \leq \ln 2$ avec égalité si $p = \frac{1}{2}$
car $g(\frac{1}{2}) = \ln 2$

5. a) $(X_1+X_2)(\Omega) = \{0,1,2\}$

b) $p = P(Z=1)$

$= P(X_1+X_2=1)$

$= P(((X_1=1)\cap(X_2=0))\cup((X_1=0)\cap(X_2=1)))$

$= P(X_1=1, X_2=0) + P(X_1=0, X_2=1)$ par incompatibilité

$p = p_1(1-p_2)+p_2(1-p_1)$ par indépendance entre X_1 et X_2

c) $1-2p = 1-2p_1(1-p_2)-2p_2(1-p_1)$

$1-2p = 1-2p_1-2p_2+4p_1p_2$

$1-2p = (1-2p_1)(1-2p_2)$ après factorisation

6. a) $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$

b) Montrons $HR(n)$: « $1-2P(Z_n=1) = (1-2p)^n$ » par récurrence sur $\mathbb{N}^*$

initialisation : en reprenant le résultat obtenu à la question 5. c) on a $p_1 = p_2$

et $1-2P(Z_1=1) = 1-2p$

$HR(1)$ est vraie

hérédité : Supposons la propriété vraie à un rang n fixé.

Alors $1-2P(Z_n=1)=(1-2p)^n \Leftrightarrow P(Z_n=1) = \frac{1-(1-2p)^n}{2}$

En considérant la formule des probabilités totales associées au système complet d'événements (« S_n pair, S_n impair »)

On a $P(Z_{n+1}=1) = P(« S_n \text{ pair} » \cap (X_{n+1}=1)) + P(« S_n \text{ impair} » \cap (X_{n+1}=0))$

$= p(1-P(Z_n=1)) + (1-p)P(Z_n=1)$

car S_n et X_{n+1} sont indépendantes d'après le lemme de coalitions

On calcule $P(Z_{n+1}=1) = p\left(1 - \frac{1-(1-2p)^n}{2}\right) + (1-p)\frac{1-(1-2p)^n}{2}$

$= p + \left(\frac{1-(1-2p)^n}{2}\right)(1-\cancel{2}p)$

$= \frac{1}{2} - (1-2p)^{n+1}$.

D'où $1 - 2P(Z_{n+1}=1) = (1-2p)^{n+1}$

$HR(n+1)$ est vraie.

La propriété est initialisée et héréditaire, On en conclue que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1-2P(Z_n=1) = (1-2p)^n$

c) Admis

Partie III

7. a) l'intégrale $-\int_{-\infty}^{+\infty} h(f(t))\,dt$ vaut $-\int_a^b h\left(\frac{1}{b-a}\right)dx$

en posant $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a,b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$-h\left(\frac{1}{b-a}\right)\int_a^b dx$ étant une valeur réelle finie,

U admet une entropie

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 296	Nombre de pages :	Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques appliquées

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

b) $H(U) = \frac{b-a}{b-a}\left(-\ln\left(\frac{1}{b-a}\right)\right)$

$\underline{H(U) = \ln(b-a)}$

8. a) $\int_0^{+\infty} \underline{\lambda f(t)\,dt} = E(X)$ donc cette intégrale est convergente et vaut $\underline{\frac{1}{\lambda}}$

b) On calcule l'intégrale $-\int_0^{+\infty} h(\lambda e^{-\lambda x})\,dx$ impropre en $+\infty$

$$-\int_0^{+\infty} h(\lambda e^{-\lambda x})\,dx = -\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} \ln(\lambda e^{-\lambda x})\,dx$$

$$= -\ln\lambda \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}\,dx + \lambda \int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}\,dx$$

$$= \lambda E(X) - \ln\lambda \int_0^{+\infty} f(t)\,dt$$

$$= 1 - \ln\lambda$$

$\underline{X \text{ admet donc une entropie et } H(X) = 1 - \ln\lambda}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

9. a) $E(X) = m$; $V(X) = \sigma^2$

De plus $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \phi(t)\,dt = E(X^2)$

$$= V(X) + E(X)^2$$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \phi(t)\,dt = m^2 + \sigma^2$

b) Calcul de $-\int_{-\infty}^{+\infty} \ln(\phi(t))\,dt$:

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt\right)$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right) dt$$

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \left(-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}\right) e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt$$

$$= \frac{1}{2}\ln(2\pi\sigma^2)\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)\,dt + \frac{1}{2}$$ admis

Donc $H(X)$ existe et $H(X) = \frac{\ln(2\pi\sigma^2) + 1}{2}$

Exercice 1

1. a) f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ (comme quotient)

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \frac{-xe^{-x} - e^{-x}}{x^2} = -\frac{e^{-x}}{x^2}(x+1)$$

$f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante

x	0	$+\infty$
f	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$ 0

b) $\mathbb{R}_+^*$ étant stable par f ($f(\mathbb{R}_+^*) \subset \mathbb{R}_+^*$), on peut montrer à l'aide d'une récurrence rapide que :
$\forall n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n > 0$.

2. a)

```
def Fonc_1(a):
        from numpy import exp
        u = 1
        n = 0
        while u <= a :
                u = exp(-u)/u
                n = n + 1
        return n
```

b) u_5 prend une valeur très petite alors que u_6 prend une valeur très grande.
Les termes pairs et impairs de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ semblent s'éloigner plus n est grand.

c)

```
import numpy as np
def suite(n):
        u = 1
```

```
    for k in range(n):
        u = np.exp(-u)/u
    return u
```

3. a) g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = -2x - e^{-x}$

$$g'(x) < 0$$

Autrement dit g est strictement décroissante,
et $g(0) = 1$; $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

D'après le théorème de la bijection, comme g est strictement décroissante et continue sur $\mathbb{R}_+$,
g réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $g(\mathbb{R}_+) =]-\infty, 1]$

b) Ainsi $\exists! \, \alpha \in \mathbb{R}_+ \, / \, g(\alpha) = 0$

$$e^{-\alpha} = \alpha^2$$

$$f(\alpha) = \alpha$$

L'équation $f(x) = x$ possède une unique solution α dans $\mathbb{R}_+^*$

c) On a $f(1) = e^{-1}$ donc $f(1) < 1 \Rightarrow \alpha > 1$

et $f(e^{-1}) = \exp(1 + \frac{1}{e})$ donc $f(e^{-1}) > e^{-1} \Rightarrow \alpha < e^{-1}$

Donc $\frac{1}{e} < \alpha < 1$

~~4. a) On déduit de cette inégalité que $f(e^{-1}) > \alpha > f(1)$~~

4. a) Admis
b) Admis
c) Admis

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 296	Nombre de pages :	Session : 2023

Emplacement QR Code

Épreuve de : Mathématiques appliquées

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

5. a) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $h(x) = \dfrac{x \exp\left(-\frac{e^{-x}}{x}\right)}{e^{-x}}$

b) Admis

c) Admis

d) D'après le théorème du point fixe, comme $f(x) \geq x$ pour $x \in]0, \alpha[$, (u_{2n+1}) converge vers α.

6. h n'admet pas de point fixe supérieur à α donc (u_{2n}) diverge vers $+\infty$.