Copie anonyme - n°anonymat :

P6-00034 Maths S

Code épreuve : 282	Nombre de pages : 22	Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques I Appro

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie I

1-a) Soit $k \in \mathbb{N}$

on étudie l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x^k f_X(x)\,dx$

on a, $\int_{-\infty}^{+\infty} x^k f_X(x)\,dx = \int_0^1 x^k\,dx$

$$= \left[\frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{k+1}$$

$\int_{-\infty}^{+\infty} |x^k| f_X(x)\,dx$ converge et $\int_{-\infty}^{+\infty} x^k f_X(x)\,dx = \frac{1}{k+1}$

Donc, d'après le théorème de transfert, $\forall k \in \mathbb{N}$,

$E(X^k)$ existe et $E(X^k) = \frac{1}{k+1}$

b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$

$\int_{-\infty}^{+\infty} x^k f_X(x)\,dx = \int_0^{+\infty} x^k \lambda e^{-\lambda x}\,dx.$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\lambda^{k-1}} (\lambda x)^k e^{-\lambda x}\,dx$$

Et en effectuant le changement de variable affine :

$$\begin{cases} u = \lambda x \\ du = \lambda\, dx \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^h f_X(x)\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\lambda^h} u^h e^{-u}\, du$$

et en reconnaissant l'expression de $\Gamma(h+1)$, on obtient :

$$= \frac{\Gamma(h+1)}{\lambda^h}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^h f_X(x)\, dx = \frac{h!}{\lambda^h}$$

Ainsi, $\int_{-\infty}^{+\infty} |x^h| \cdot f_X(x)\, dx$ converge

D'autre part, cette égalité est vérifiée pour $h=0$
En effet, $E(X^0) = 1 = \frac{0!}{\lambda^0}$

Donc, on peut conclure, d'après le théorème de transfert :

$$\forall h \in \mathbb{N},\ E(X^h) \text{ existe et } E(X^h) = \frac{h!}{\lambda^h}$$

Partie-II

2- $(H_3)_{1,1} = v_0$, $(H_3)_{1,2} = v_1$, $(H_3)_{1,3} = v_2$

$(H_3)_{2,1} = v_1$, $(H_3)_{2,2} = v_2$, $(H_3)_{2,3} = v_3$

$(H_3)_{3,1} = u_2$, $(H_3)_{3,2} = u_3$, $(H_3) = u_4$

Donc, $H_3 = \begin{pmatrix} u_0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ u_2 & u_3 & u_4 \end{pmatrix}$

Comme ~~$\forall (i,j) \in [\![1,3]\!]^2, (G_3)_{i,j} = (H_3$~~ les coefficients de G_3 sont ceux de H_3 avec 1 sommé à l'indexation des termes u_i, on obtient :

$$G_3 = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_2 & u_3 & u_4 \\ u_3 & u_4 & u_5 \end{pmatrix}$$

3 - ▷. ${}^t\omega H_n \omega \in M_1(\mathbb{R})$ et :

$${}^t\omega H_n \omega = \sum_{i=1}^{n} ({}^t\omega)_{1,i} (H_n \omega)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (\omega)_{i,1} (H_n)_{i,j} (\omega)_{j,1}$$

$${}^t\omega H_n \omega = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j u_{i+j-2}$$

▷ Comme f est une densité de X adaptée à $M^*(J)$

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad u_{i+j-2} = E(X^{i+j-2})$$

Donc, d'après ce qui précède, d'après le théorème de transfert et comme f est nulle sur $\mathbb{R}_-^*$:

$${}^t\omega H_n \omega = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j \int_0^{+\infty} x^{i+j-2} f(x)\, dx$$

et par linéarité de l'intégration :

$$= \int_0^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j x^{i+j-2} \right) f(x)\, dx$$

Or, $\forall x \in \mathbb{R}$, $(P(x))^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^{i-1}\right)^2$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i x^{i-1})^2 + \sum_{i \neq j} \alpha_i \alpha_j x^{i-1} x^{j-1}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \alpha_i x^{i+i-2} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \alpha_i \alpha_j x^{i-1} x^{j-1}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $(P(x))^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j x^{i+j-2}$

Donc, on peut conclure :

$${}^t\omega H_n \omega = \int_0^{+\infty} (P(x))^2 f(x)\, dx$$

4- Soit $n \geq 1$. Soit $\omega = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{R})$

Comme f est une densité, $x \mapsto (P(x))^2 f(x)$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$

D'autre part, $\int_0^{+\infty} (P(x))^2 f(x)\, dx$ converge

Donc, par croissance de l'intégration,

$\int_0^{+\infty} (P(x))^2 f(x)\, dx \geq 0$ soit d'après q3- :

${}^t\omega H_n \omega \geq 0$

En notant q_n la forme quadratique associée à H_n, c'est-à-dire l'application telle que $q_n : \omega \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \mapsto {}^t\omega H_n \omega$

Alors, on a : $\forall \omega \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, $q_n(\omega) \geq 0$

▷ Soit $\lambda \in Sp(H_n)$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 282	Nombre de pages :	Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques I Appro

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Alors $\exists\, \omega \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \mid H_n \omega = \lambda \omega$ d'où :

$${}^t\omega H_n \omega = \lambda \|\omega\|^2 \quad \text{soit :}$$

$$q(\omega) = \lambda \|\omega\|^2$$

et comme $\|\omega\|^2 > 0$ (car ω est un vecteur propre de H_n) alors :

$$\lambda = \frac{q(\omega)}{\|\omega\|^2}$$ et d'après le résultat précédent :

$$\lambda \geqslant 0$$

Ainsi, $\forall n \geqslant 1$, $Sp(H_n) \subset \mathbb{R}_+$

5 - Soit $n \geqslant 1$. Soit $\omega = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{R})$

On peut montrer, de la même manière qu'en Q3- :

$${}^t\omega G_n \omega = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j u_{i+j-1}$$

Et donc, en posant $\forall x \in \mathbb{R}$, $q(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^{i-\frac{1}{2}}$, on obtient d'après Q3- :

${}^t\omega G_n \omega = \int_0^{+\infty} (q(x))^2 f(x)\, dx$ d'où d'après Q3- :

${}^t\omega G_n \omega \geqslant 0$

Ainsi, d'après Q4-, $\forall n \geqslant 1$, $Sp(G_n) \subset \mathbb{R}_+$

6- D'après le théorème de transfert et la relation de chasles :

$$U_3 = \int_0^{+\infty} x^3 f(x)\, dx$$

$$= \int_0^1 x^3 f(x)\, dx + \int_1^{+\infty} x^3 f(x)\, dx$$

or, $\forall x \geqslant 1$, $x^3 f(x) \geqslant x^2 f(x)$

Et comme ces fonctions sont continues sur $[1, +\infty[$ d'intégrales convergentes, par croissance de l'intégration :

$$\int_1^{+\infty} x^3 f(x)\, dx \geqslant \int_1^{+\infty} x^2 f(x)\, dx$$

d'où, d'après le théorème de transfert :

$$\geqslant U_2$$

$$\geqslant \frac{1}{3}$$

D'autre part, comme $x \mapsto x^3 f(x)$ est continue et positive sur $[0,1]$, par croissance de l'intégration :

$$\int_0^1 x^3 f(x)\, dx \geqslant 0$$

Donc, $U_3 \geq 0 + \frac{1}{3}$

$\geq \frac{3}{9}$ et comme $\frac{3}{9} \geq \frac{2}{9}$, on a nécessaire-
-ment :

$U_3 \geq \frac{2}{9}$

7-a) Soit $n \geq 1$. Soit $t > 0$.

$t^n \exp(-t\theta) \leq \left(\frac{n}{\theta}\right)^{\frac{n}{\theta}} \exp\left(-\frac{n}{\theta}\right)$ et comme $\begin{cases} t^n > 0 \\ \exp(-t\theta) > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{t^n} \left(\frac{n}{\theta}\right)^{\frac{n}{\theta}} \exp\left(t\theta - \frac{n}{\theta}\right) \geq 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{t\theta} \left(\frac{n}{t}\right)^{\frac{n}{\theta}} \left(\frac{n}{\theta}\right)^{\frac{n}{\theta}} \exp\left(t\theta - \frac{n}{\theta}\right) \geq 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{t\theta} \left(\frac{n}{t\theta}\right)^{\frac{n}{\theta}} \exp\left(t\theta - \frac{n}{\theta}\right) \geq 0$

et comme la dernière équivalence est vraie car

$\begin{cases} \frac{1}{t\theta} > 0 \\ \left(\frac{n}{t\theta}\right)^{\frac{n}{\theta}} \geq 0 \\ \exp\left(t\theta - \frac{n}{\theta}\right) > 0 \end{cases}$

Alors, $\forall t > 0$, $t^n \exp(-t\theta) \leq \left(\frac{n}{\theta}\right)^{\frac{n}{\theta}} \exp\left(-\frac{n}{\theta}\right)$

D'autre part, pour $t = 0$:

$t^n \exp(-t\theta) = 0$ et $\left(\frac{n}{\theta}\right)^{\frac{n}{\theta}} \exp\left(-\frac{n}{\theta}\right) > 0$

Donc, la relation est toujours vérifiée

Ainsi, on peut conclure :

$\forall n \geq 1, \forall t \geq 0, \quad t^n \exp(-t\theta) \leq \left(\frac{n}{\theta}\right)^{\frac{n}{\theta}} \exp\left(-\frac{n}{\theta}\right)$

6)

8 -
```
import numpy as np
import numpy.linalg as al
def test_stieltjes(U):
 N = len(U) - 1
 m = 1 + N//2
 H = np.zeros((m,m))
 for n in range(1, m+1):
     for i in range(n+1, m+1):
         H[i, n-1] = U[i+n-1]
         H[n-1, i] = H[i, n-1]
     valp = al.eigvalsh(H)

   for k in range(0, m):
       if (valp[k] < 0):
           return 0
   return 1
```

II.2)

9 - $t \mapsto t^n e^{-t} \sin(t)$ est continue sur $[0,+\infty[$

$\forall t \in \mathbb{R}_+, \; |t^n e^{-t} \sin(t)| = |t^n e^{-t}| . |\sin(t)|$

et comme $\forall t \in \mathbb{R}_+, \; |\sin(t)| \leq 1$

$\leq t^n e^{-t}$.

Et, par croissances comparées:

$\lim\limits_{t \to +\infty} t^{n+2} e^{-t} = 0$ donc :

$t^n e^{-t} \underset{t \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 282

Nombre de pages :

Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques I Appro

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Or, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ converge (intégrale de Riemann)

Et, $\forall t \geq 1, \frac{1}{t^2} \geq 0$

Donc, par comparaison, $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,dt$ converge

Ainsi, par comparaison, $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \sin(t)\,dt$ converge (absolument) donc converge

Ainsi, $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \sin(t)\,dt$ existe

▷ $t \mapsto t^n e^{-t} \cos(t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$

De la même façon, on montre que :

$\forall t \in \mathbb{R}_+, 0 \leq |t^n e^{-t} \cos(t)| \leq t^n e^{-t}$ (car cos est bornée sur $\mathbb{R}_+$)

D'après ce qui précède, $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,dt$ converge

Donc, par comparaison, $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \cos(t)\,dt$ converge (absolument) donc converge

Ainsi, $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \cos(t)\,dt$ existe

10- $S_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t} \sin(t)\, dt$

Soit $A > 0$

$\int_0^A e^{-t} \sin(t)\, dt$

$f_1'(t) = e^{-t}$ $\quad f_1(t) = -e^{-t}$
$g_1(t) = \sin(t)$ $\quad g_1'(t) = \cos(t)$

Comme f_1 et g_1 sont de classe C^1 sur $[0, A]$, par intégration par parties:

$$\int_0^A e^{-t} \sin(t)\, dt = [-e^{-t}\sin(t)]_0^A + \int_0^A e^{-t}\cos(t)\, dt$$

$$= -e^{-A}\sin(A) + \int_0^A e^{-t}\cos(t)\, dt$$

$f_2'(t) = e^{-t}$ $\quad f_2(t) = -e^{-t}$
$g_2(t) = \cos(t)$ $\quad g_2'(t) = -\sin(t)$

Comme f_2 et g_2 sont de classe C^1 sur $[0, A]$, par intégration par parties:

$$\int_0^A e^{-t} \sin(t)\, dt = -e^{-A}\sin(A) + [-e^{-t}\cos(t)]_0^A - \int_0^A e^{-t}\sin(t)\, dt$$

D'où, $2\int_0^A e^{-t}\sin(t)\, dt = -e^{-A}\sin(A) - e^{-A}\cos(A) + 1.$

Comme $\begin{cases} \lim\limits_{A \to +\infty} \int_0^A e^{-t}\sin(t) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\sin(t)\, dt \\ \lim\limits_{A \to +\infty} -e^{-A}\sin(A) = 0 \quad \text{(car sin est bornée sur } \mathbb{R}) \\ \lim\limits_{A \to +\infty} -e^{-A}\cos(A) = 0 \quad \text{(car cos est bornée sur } \mathbb{R}) \end{cases}$

Alors, on obtient :

$$2\int_0^{+\infty} e^{-t}\sin(t)\,dt = 1 \quad \text{d'où :}$$

$$\underline{S_0 = \frac{1}{2}}$$

11- Soit $n \in \mathbb{N}$

Par linéarité de l'intégration :

$$S_{n+1} + T_{n+1} = \int_0^{+\infty} t^{n+1} e^{-t}(\sin(t)+\cos(t))\,dt$$

Soit $A > 0$:

$$\int_0^A e^{-t}\, t^{n+1}(\sin(t)+\cos(t))\,dt$$

$$f'(t) = e^{-t} \qquad f(t) = -e^{-t}$$

$$g(t) = t^{n+1}(\sin(t)+\cos(t)) \qquad g'(t) = (n+1)t^n(\sin(t)+\cos(t))$$

$$+ t^{n+1}(\cos(t)-\sin(t))$$

Comme

12- Soit $n \in \mathbb{N}$

En sommant (3) et (4) et en faisant (3) − (4) dans Q11, on obtient :

$$\begin{cases} 2S_{n+1} = (n+1)(T_n+S_n) \\ -2T_{n+1} = (n+1)(S_n-T_n) \end{cases} \quad \text{d'où :}$$

$$\begin{cases} 2S_{n+1} = (n+1)(T_n+S_n) \\ 2T_{n+1} = (n+1)(T_n-S_n) \end{cases} \quad \text{donc :}$$

$$2V_{n+1} = (n+1)\begin{pmatrix} T_n + S_n \\ -S_n + T_n \end{pmatrix} \quad \text{soit :}$$

$$V_{n+1} = (n+1)\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S_n \\ T_n \end{pmatrix} \quad \text{d'où :}$$

$$\underline{V_{n+1} = (n+1) M V_n}$$

13- Posons, $\forall n \in \mathbb{N}$, $A(n)$: " $V_n = n!\, M^n V_0$ "

$*$ $V_0 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

$= 0!\, I_2 \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

$= 0!\, M^0 V_0$

Donc, $A(0)$ est vraie

$*$ soit $n \in \mathbb{N}$. supposons que $A(n)$ est vraie

D'après 9/12- :

$V_{n+1} = (n+1) M V_n$ donc d'après $A(n)$

$= (n+1) M (n!\, M^n V_0)$

$= (n+1)!\, M^{n+1} V_0$

Donc, $A(n+1)$ est vraie

$*$ $\underline{\forall n \in \mathbb{N},\ V_n = n!\, M^n V_0}$

14- $M^2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

Copie anonyme - n°anonymat :

Emplacement QR Code

Code épreuve : 282	**Nombre de pages :**	**Session :** 2023

Épreuve de : Mathématiques I Appro

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Donc, $M^4 = M^2 . M^2$

$$= \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$M^4 = -\frac{1}{4} I_2$$

15 - Soit $n \geq 0$

D'après q14-, $S_{4n+3} = 0$ soit :

$$\int_0^{+\infty} (t^4)^n t^3 e^{-t} \sin(t)\, dt = 0$$

Posons $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$
$t \mapsto t^4$

qui est de classe C^1, bijective et strictement croissante

Ainsi, d'après la formule du changement de variable,

(comme $\begin{cases} t^4 = x \\ 4t^3 dt = dx \end{cases}$)

$\int_0^{+\infty} x^n \times \frac{1}{4} e^{-x^{1/4}} \sin(x^{1/4})\, dx = 0$ d'où :

$\int_0^{+\infty} x^n g(x)\, dx = 0$ (et ceci pour tout $n \in \mathbb{N}$)

16- Posons $\begin{cases} g_1 = g \\ g_2 = \Theta \end{cases}$ où Θ est la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$

g_1 et g_2 sont deux fonctions positives, distinctes :

$\left(g_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = \exp\left(-\frac{\pi}{2}^{1/4}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}^{1/4}\right) \right)$

$\neq 0$

$\neq \Theta\left(\frac{\pi}{2}\right)$

et d'après q15-, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} x^n g_1(x)\, dx = 0$

Et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} x^n g_2(x)\, dx = 0$

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, les deux intégrales $\int_0^{+\infty} x^n g_1(x)\, dx$ et $\int_0^{+\infty} x^n g_2(x)\, dx$ existent et sont égales.

Ainsi, on peut conclure :

Un tel couple existe.

17- quand $J = [0, +\infty[$, $M^*(J)$ n'admet pas une unique solution (d'après q16-)

Partie III -

11 - Soit $n \in \mathbb{N}$

Soit $A > 0$

▷ $\int_0^A t^{n+1} e^{-t} \cos(t)\, dt$

$f_1'(t) = e^{-t}$ $f_1(t) = -e^{-t}$
$g_1(t) = t^{n+1}\cos(t)$ $g_1'(t) = (n+1)t^n \cos(t) - t^{n+1}\sin(t)$

f_1 et g_1 sont de classe C^1 sur $[0,A]$ donc par intégration par parties:

$\int_0^A t^{n+1} e^{-t} \cos(t)\, dt = [-e^{-t} t^{n+1}\cos(t)]_0^A$

$(n+1)\int_0^A t^n e^{-t}\sin(t)\, dt$

$- \int_0^A t^{n+1} e^{-t}\sin(t)\, dt$

Comme les intégrales en jeu convergent et que $\lim\limits_{A \to +\infty} -e^{-A} A^{n+1}\cos(A) = 0$

car cos est bornée sur $\mathbb{R}$ et par croissances comparées, alors:

$I_{n+1} = (n+1) I_n - S_{n+1}$ donc:

$I_{n+1} + S_{n+1} = (n+1) I_n$ (3)

▷ $\int_0^A t^{n+1} e^{-t} \sin(t)\, dt$

$f_2'(t) = e^{-t}$ $f_2(t) = -e^{-t}$
$g_2(t) = t^{n+1}\sin(t)$ $g_2'(t) = (n+1)t^n \sin(t) + t^{n+1}\cos(t)$

f_1 et g_2 sont de classe C^1 sur $[0,A]$ donc par intégration par parties:

$\int_0^A t^{n+1} e^{-t} \sin(t) dt = [-e^{-t} t^{n+1} \sin(t)]_0^A + (n+1) \int_0^A t^n e^{-t} \sin(t) dt$

$+ \int_0^A t^{n+1} e^{-t} \cos(t) dt$

Comme sin est bornée sur $\mathbb{R}$ et par croissances comparées :

$$\lim_{A \to +\infty} -e^{-A} A^{n+1} \sin(A) = 0$$

Donc, en faisant tendre A vers $+\infty$ comme toutes les intégrales en jeu convergent :

$$S_{n+1} = (n+1) S_n + T_{n+1} \quad \text{d'où}$$

$$S_{n+1} - T_{n+1} = (n+1) S_n \quad (4)$$

Ainsi, on a bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} S_{n+1} + T_{n+1} = (n+1) T_n & (3) \\ S_{n+1} - T_{n+1} = (n+1) S_n & (4) \end{cases}$$

Partie - III

18- Soit $n \in \mathbb{N}$ d'après le théorème de transfert :

$$U_n = \int_0^1 x^n f(x) dx$$

Comme f est une densité, nulle sur $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$, et que $\int_0^1 f(x) dx = 1$, alors $x \mapsto x^n f(x)$ est non identiquement nulle, positive et continue sur $[0,1]$

Donc, par stricte positivité de l'intégration :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n = \int_0^1 x^n f(x) dx > 0$$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 282	Nombre de pages :	Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques I Appro

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Emplacement QR Code

19- Soit $(i,j) \in \mathbb{N}^2$. D'après le théorème de transfert

$$\sum_{k=0}^{j} (-1)^k \binom{j}{k} u_{i+k}$$

$$= \sum_{k=0}^{j} (-1)^k \binom{j}{k} \int_0^1 x^{i+k} f(x)\,dx.$$

$$= \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} (-x)^k 1^{j-k} \right) x^i f(x)\,dx$$

et d'après la formule du binôme de Newton.

$$= \int_0^1 (1-x)^j x^i f(x)\,dx$$

comme $x \mapsto (1-x)^j x^i f(x)$ est continue, positive et non identiquement nulle sur $[0,1]$, donc par stricte positivité de l'intégration :

$$\int_0^1 (1-x)^j x^i f(x)\,dx > 0 \quad \text{soit :}$$

$$\sum_{k=0}^{j} (-1)^k \binom{j}{k} u_{i+k} > 0$$

21- Soit $\alpha > 0$

▷ Si $\alpha > 1$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

On a d'après le théorème de transfert :

$u_n = \int_0^1 x^n f(x)\, dx$

et comme $\forall x \in [0,1]$, $x^n f(x) \leq f(x)$
et que ces fonctions sont continues sur $[0,1]$,
par croissance de l'intégration :

$u_n \leq \int_0^1 f(x)\, dx$ et comme f est une densité nulle sur $\mathbb{R} \setminus [0,1]$:

$\frac{u_n}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n^\alpha}$ et comme $u_n \geq 0$ (918-) :

$0 \leq \frac{u_n}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n^\alpha}$

Comme $\alpha > 0$, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge (Riemann) donc

par comparaison, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{u_n}{n^\alpha}$ converge.

~~J'admets le cas pour $\alpha \in]0,1[$.~~

▷ Pour $\alpha = 0$, on a :

soit $N \geq 0$

$\sum_{n=0}^{N} \frac{u_n}{n^0} = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{N} x^n\right) f(x)\, dx$

Notons, $\forall x \in [0,1[$ $S_x = \sum_{n=0}^{N} x^n$

18/

III. 2)

22- $\Delta_{n,0} = \sum_{k=0}^{0} (-1)^k \binom{j}{k} u_{n+k}$

$= \binom{j}{0} u_{n+0}$

$\Delta_{n,0} = u_n$

23- Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $j \in [\![0,n]\!]$

$\Delta_{n+1,j+1} = \sum_{k=0}^{j+1} (-1)^k \binom{j+1}{k} u_{n+1+k-(j+1)}$

$= \sum_{k=0}^{j+1} (-1)^k \binom{j+1}{k} u_{n+k-j}$

Et, $\Delta_{n,j} - \Delta_{n+1,j} = \sum_{k=0}^{j} (-1)^k \binom{j}{k} u_{n+k-j} - \sum_{k=0}^{j} (-1)^k \binom{j}{k} u_{n+1+k-j}$

$= \sum_{k=0}^{j} (-1)^k \binom{j}{k} u_{n+k-j} + \sum_{k=0}^{j} (-1)^{k+1} \binom{j}{k} u_{n+1+k-j}$

et en posant $k' = k+1$

$= \sum_{k=0}^{j} (-1)^k \binom{j}{k} u_{n+k-j} + \sum_{k=1}^{j+1} (-1)^k \binom{j}{k-1} u_{n+k-j}$

et d'après la formule du triangle de Pascal
et en regroupant les termes, on obtient :

$= \sum_{k=0}^{j+1} (-1)^k \binom{j+1}{k} u_{n+k-j}$ soit d'après ce qui précède :

$\Delta_{n,j} - \Delta_{n+1,j} = \Delta_{n+1,j+1}$

III.37

26- ~~soit $(x,y) \in [0,1]^2$~~

f_2' est continue sur le segment $[0,1]$ donc $\exists M \in \mathbb{R}^+$ tel que

$\forall x \in [0,1], \ |f_2'(x)| \leq M$

f_1' est continue sur $[0,1]$ donc $\exists N \in \mathbb{R}^+$ tel que

$\forall x \in [0,1], \ |f_1'(x)| \leq N$

Donc, $\forall x \in [0,1], \ |h(x)| = |(f_2' - f_1')(x)|$

soit d'après l'inégalité triangulaire :

$|h(x)| \leq M+N$ et en notant $K = M+N$

$|h(x)| \leq K$

Ainsi, comme h est également de classe C^1 sur $[0,1]$, d'après l'inégalité des accroissements finis :

$\exists K \in \mathbb{R}^+ \ / \ \forall (x,y) \in [0,1]^2, \ |h(x) - h(y)| \leq K|x-y|$

27-b) D'après q27-a) et d'après la formule de Koenig-Huygens (car Z_1 admet une variance comme $Z_1(\Omega)$ est fini :

$|h(x) - E(h(Z_1))| \leq K \sqrt{E(|Z_1 - x|)^2}$

$\leq K \sqrt{E((Z_1-x)^2) - V(Z_1-x)}$

et comme $E((Z_1-x)^2) - V(Z_1-x) \leq E((Z_1-x)^2)$

et que $t \mapsto \sqrt{t}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 282	Nombre de pages :	Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques I Appro

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

On peut conclure :

$$|h(x) - E(h(Z_n))| \leqslant K\sqrt{E((Z_n - x)^2)}$$

27.a) Pour $y = Z_n$: par croissance de l'espérance d'après q26.