Copie anonyme - n°anonymat :

Z9-00076 Maths S

Code épreuve : 297 | **Nombre de pages :** 32 | **Session :** 2023

Épreuve de : Mathématiques - EDHEC BS

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Exercice 1 :

1) D'après le théorème du rang, comme $Rg(M) = Rg(f) = 1$, et $\text{Dim } \mathbb{R}^n = n$, il vient que

$\text{Dim Ker}(f) = n-1$

Ainsi $0 \in Sp(f)$

2)a) $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ donc $CL \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

~~C et L sont non nulles~~

Donc il existe une matrice $L = (1, \ell_2 \dots \ell_n) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ telle que $M = CL$

b) $Tr(M) = Tr(CL) = Tr(LC)$ car ~~$\forall (A,B) \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})^2$, $Tr(AB) = Tr(BA)$~~

$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \forall B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$
$Tr(AB) = Tr(BA)$

Or $LC \in \mathbb{R} = \mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$

D'où , $Tr(LC) = LC$

Bilan : $Tr(M) = LC$

c) $Tr(M)M = LCCL = LC^2L$

$=$

~~Je n'abon~~

3) $M^2 = Tr(M)M$. Donc $P = X^2 - Tr(X)X$ est un polynôme annulateur de f.

Donc $Sp(f) \subset \{0 ; Tr(M)\}$

Comme $M^2 = Tr(M)M$,

$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $M \times MX = Tr(M) \times MX$ $(X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})})$

Donc $Tr(M)$ est valeur propre de f associé au vecteur propre MX

4) On suppose que $Tr(M) = 0$

Donc $Sp(f) = \{0\}$. Or $Dim\ Ker(f) = n-1 \neq n$

Donc M n'est pas diagonalisable

Bilan : $Tr(M) = 0 \Rightarrow M$ n'est pas diagonalisable

5) On suppose que $Tr(M) \neq 0$

$Sp(f) = \{0 ; Tr(M)\}$

Donc $Ker(f - Tr(M)Id) \geqslant 1$

Donc $\operatorname{Dim} \operatorname{Ker}(f) + \operatorname{Dim} \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Tr}(M) Id) \geq n$

Or d'après le cours $\operatorname{Dim} \operatorname{Ker}(f) + \operatorname{Dim} \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Tr}(M) Id) \leq n$

Donc $\operatorname{Dim} \operatorname{Ker}(f) + \operatorname{Dim} \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Tr}(M) Id) = n$

Donc f est diagonalisable

6)a) On suppose que $ac \neq b$

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

$$AX = 0 \iff \begin{cases} x + \frac{1}{a} y + \frac{1}{b} z = 0 \\ ax + y + \frac{1}{c} z = 0 \\ bx + cy + z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} abx + by + az = 0 & L_1 \leftarrow ab L_1 \\ acx + cy + z = 0 & L_2 \leftarrow c L_2 \\ bx + cy + z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} abx + by + az = 0 \\ acx + cy + z = 0 \\ abx + acy + az = 0 & L_3 \leftarrow a L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} abx + by + az = 0 \\ acx + cy + z = 0 \\ acy - by = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} abx + by + az = 0 \\ acx + cy + z = 0 \\ y(ac - b) = 0 \end{cases}$$

Or on suppose $ac \neq b$. Donc $ac-b \neq 0$

Donc $y=0$

Donc $\begin{cases} abx + az = 0 \\ acx + z = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} abx+az=0 \\ a^2cx+az=0 \end{cases}$ $L_2 \leftarrow aL_2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} abx+az=0 \\ a^2cx-abx=0 \end{cases}$ $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} abx+az=0 \\ ax(ac-b)=0 \end{cases}$

Or $ac-b \neq 0$

Donc $ax=0$. Donc $x=0$ $(a\neq 0)$

Donc $z=0$

Donc $AX=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Donc $\mathrm{Ker}(A) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

Or ~~Rg(~~ A n'est pas inversible. Donc $\mathrm{Dim}\,\mathrm{Ker}(A) \geq 1$

Donc c'est absurde.

Bilan : $ac=b$

b) Donc $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/a & 1/ac \\ a & 1 & 1/c \\ ac & c & 1 \end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a & a \\ ac & ac & ac \end{pmatrix}$ $C_2 \leftarrow aC_2$ et $C_3 \leftarrow acC_3$

Copie anonyme - n°anonymat :

Emplacement QR Code

Code épreuve : 297 | **Nombre de pages :** | **Session :** 2023

Épreuve de : Mathématiques - EDHEC BS

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Donc $Rg(A) = 1$

7)a) $Rg(A) = 1$. Donc d'après 5), comme la 1ère colonne de A est non nulle, ~~Sp~~ et $Tr(A) = 3 \neq 0$, on a : $Sp(g) = \{3 ; 0\}$ et g est diagonalisable

~~b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. A est diagonalisable donc il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible et une matrice diagonale $D = diag(0;0;3)$ telles que~~

~~$A = PDP^{-1}$~~

~~Donc $A^n = PD^nP^{-1}$~~

b) On a donc d'après 2)c), $A^2 = 3A$

Donc $A^3 = 3A^2 = 3 \times 3A = 9A$

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

P_n : « $A^n = 3^{n-1} A$ »

Initialisation : $A^1 = 3^0 A = A$ d'où P_0 vraie

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que P_n est vraie
Montrons P_{n+1}

$A^{n+1} = A^n \times A = 3^{n-1} A \times A$ par hypothèse de récurrence

$= 3^{n-1} A^2$

$= 3^{n-1} \times 3A$

$= 3^n A$ d'où P_{n+1}

Bilan : $\forall n \in \mathbb{N}^*, A^n = 3^{n-1} A$

Donc $\exists \lambda \in \mathbb{R} \,/\, \forall n \in \mathbb{N}^*, A^n = \lambda A$.

Donc $A^n \in \mathrm{Vect}(A)$

Exercice 2 :

1) . $c > 2$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$

. La fonction $x \mapsto \frac{c}{x^{c+1}}$ est continue sur $[1; +\infty[$

et la fonction nulle est continue sur $]-\infty; 1[$.

Donc f est continue sur $\mathbb{R}^*$ ..

. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{c}{x^{c+1}}\,dx$ car f est nulle ailleurs

Soit $A \in [1; +\infty[$

$\int_1^A \frac{c}{x^{c+1}}\,dx = c\left[\frac{x^{-c}}{-c}\right]_1^A = c\left(-\frac{1}{A^c c} + \frac{1}{c}\right)$

$\xrightarrow[A \to +\infty]{} \frac{1}{c} \times c = 1$

Donc f est une densité de probabilité

2) Montrons que $\int_1^{+\infty} x \times \frac{c}{x^{c+1}} dx$ et $\int_1^{+\infty} x^2 \frac{c}{x^{c+1}} dx$

convergent :

$x \mapsto \frac{xc}{x^{c+1}}$ et $x \mapsto \frac{x^2 c}{x^{c+1}}$ sont continues sur

$[1 ; +\infty[$ donc ces intégrales sont impropres en $+\infty$

Soit $A \in [1 ; +\infty[$

- $\int_1^A \frac{xc}{x^{c+1}} dx = \int_1^A \frac{c}{x^c} dx = c\left[\frac{x^{-c+1}}{-c+1}\right]_1^A$

$= c\left(\frac{A^{1-c}}{1-c} - \frac{1}{1-c}\right)$

$= c\left(\frac{1}{A^{c-1}(1-c)} - \frac{1}{1-c}\right)$

$\xrightarrow[A \to +\infty]{} \frac{c}{c-1}$ car $c > 2$ donc $c-1 > 1$

Donc $\int_1^{+\infty} x \times \frac{c}{x^{c+1}} dx$ converge donc $E(X)$ existe

et $E(X) = \frac{c}{c-1}$

- $\int_1^A \frac{x^2 c}{x^{c+1}} dx = \int_1^A \frac{c}{x^{c-1}} dx = c\left[\frac{x^{2-c}}{2-c}\right]_1^A$

$\xrightarrow[A \to +\infty]{} \frac{c}{c-2}$. de la même manière que pour $E(X)$

Donc $E(X^2) = \dfrac{c}{c-2}$

Donc d'après la formule de Huygens,

$$V(X) = \frac{c}{c-2} - \left(\frac{c}{c-1}\right)^2$$

$$= \frac{c}{c-2} - \frac{c^2}{(c-1)^2} = \frac{c(c-1)^2 - c^2(c-2)}{(c-2)(c-1)^2}$$

$$= \frac{c(c^2-2c+1) - c^3 + 2c^2}{(c-2)(c-1)^2}$$

$$= \frac{c^3 - 2c^2 + c - c^3 + 2c^2}{(c-2)(c-1)^2}$$

$$= \frac{c}{(c-2)(c-1)^2}$$

Bilan : $E(X)$ et $V(X)$ existent et $E(X) = \dfrac{c}{c-1}$ et $V(X) = \dfrac{c}{(c-2)(c-1)^2}$

3) $X(\Omega) = [1 ; +\infty[$. Soit $x \in \mathbb{R}$

- Si $x < 1$.

$F(x) = 0$

- Si $x \geq 1$:

$$F(x) = \int_1^x \frac{c}{t^{c+1}}\, dt = c\left[\frac{t^{-c}}{-c}\right]_1^x$$

$$= c\left(-\frac{1}{x^c} + \frac{1}{c}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{x^c}$$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 297 | Nombre de pages : | Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques - EDHEC BS

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

Bilan : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{x^c} \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$$

4) a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$X(\Omega) = [1;+\infty[$ donc $Y(\Omega) = [0;+\infty[$

- <u>Si $x < 0$:</u>

$G(x) = 0$

- <u>Si $x \geq 0$:</u>

$G(x) = P(\ln(X) \leq x) = P(X \leq e^x)$ car $x \mapsto e^x$ est croissante

$$= 1 - \frac{1}{(e^x)^c}$$

$$\cancel{= 1 - \frac{1}{e^{cx}}}$$

$$= 1 - \frac{1}{e^{cx}} = F(e^x)$$

Bilan : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$G(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ F(e^x) \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

b) Ainsi, $G(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 1 - \frac{1}{e^{xc}} \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$

$$= \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 1 - e^{-cx} \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

Ainsi $Y = h(X) \hookrightarrow \mathcal{E}(c)$

c)
```
def simul X(c) :
    Y = rd.exponential (1/c)
    return (np.exp (Y))
```

5)
```
def simul Z (c) :
    X = simul X (c)
    Y = simul X (c)
    return (X * Y)
```

6) $E(Z) = E(X_1 X_2) = E(X_1) \times E(X_2)$
car X_1 et X_2 sont indépendantes

$$= \frac{c^2}{(c-1)^2}$$

$$\cancel{E(Z^2) = E(X_1 X_2 X_1 X_2) = E(X_1)^2 \, E(X_2)^2}$$

$$\cancel{= \frac{c^4}{(c-1)^4} \text{ par in}}$$

$$\cancel{\text{D'où, } V(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2}$$

$$\cancel{= \frac{c^4}{(c-1)^4} - c^4}$$

$$E(Z^2) = E(X_1 X_2 X_1 X_2) = E(X_1^2 X_2^2)$$

comme X_1 et X_2 sont indépendantes, par coallition, X_1^2 et X_2^2 le sont aussi

Donc $E(Z^2) = E(X_1^2) \, E(X_2^2)$

$$= \frac{c^2}{(c-2)^2}$$

Donc, $V(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2$

$$= \frac{c^2}{(c-2)^2} - \frac{c^4}{(c-1)^4}$$

$$= \frac{c^2 (c-1)^4 - c^4 (c-2)^2}{(c-2)^2 (c-1)^4}$$

$$= \frac{c^2 \left((c-1)^4 - c^2 (c-2)^2 \right)}{(c-2)^2 (c-1)^4}$$

$$= \frac{c^2 \left(\left((c-1)^2 - c(c-2)\right)\left((c-1)^2 + c(c-2)\right) \right)}{(c-2)^2 (c-1)^4} \quad \text{par identité remarquable}$$

$$= \frac{c^2 (2c^2 - 4c + 1)}{(c-2)^2 (c-1)^4}$$

Bilan : $V(Z) = \dfrac{c^2(2c^2-4c+1)}{(c-2)^2(c-1)^4}$

7)a) $(cY_1)(\Omega) = [c\,;+\infty[$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

• $\forall x < c$:

$P(cY_1 \leq x) = 0$

• $\forall x \geq c$:

$P(cY_1 \leq x) = P\left(Y_1 \leq \frac{x}{c}\right)$

$= 1 - \dfrac{1}{\left(\frac{x}{c}\right)^c}$

~~Bilan : cY_1~~

7)a) $Y_1(\Omega) = [0\,;+\infty[$. Soit $x \in \mathbb{R}$

donc $cY_1(\Omega) = [0\,;+\infty[$

• Si $x < 0$:

• $P(Y_1 \leq x) = 0$

• Si $x \geq 0$:

$P(cY_1 \leq x) = \cancel{1-\exp}\ 1-\exp(-x)$

Donc $cY_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ et $cY_2 \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$

b) Donc $cY_1 + cY_2 \hookrightarrow \gamma(2)$ car

• $cY_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(1) \Longrightarrow cY_1 \hookrightarrow \gamma(1)$

et comme X_1 et X_2 sont indépendantes, par coalition

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 297

Nombre de pages :

Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques - EDHEC BS

Consignes
• Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
• Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
• Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
• Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
• Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

$c Y_1$ et $c Y_2$ sont indépendantes

8)a)

9)a). La fonction $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^{\alpha}}$ est continue sur $[1;+\infty[$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^{\alpha}} dx$ est impropre en $+\infty$.

• Soit $A \in [1;+\infty[$. On pose :

$$I_A = \int_1^A \frac{\ln(x)}{x^{\alpha}} dx$$

• On pose :

$$\begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ v'(x) = x^{-\alpha} \end{cases} \qquad \begin{cases} u'(x) = 1/x \\ v(x) = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \end{cases}$$

$(u,v) \in \mathcal{C}^1([1;A])$ donc par intégration par parties

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$$I_A = \left[\frac{\ln(x) \times x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_1^A - \int_1^A \frac{x^{1-\alpha}}{x(1-\alpha)} dx$$

$$\xrightarrow[A \to +\infty]{} - \int_1^{+\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{x(1-\alpha)} dx$$

~~Car~~ par croissance comparée car $\frac{\ln(x)}{x^{\alpha-1}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

$(\alpha > 1)$ (donc $\alpha - 1 > 0$)

~~Or~~ Soit $A \in [1 ; +\infty[$

$$-\int_1^A \frac{x^{1-\alpha}}{x(1-\alpha)} dx = \frac{-1}{1-\alpha} \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha} \right]_1^A$$

$$\xrightarrow[A \to +\infty]{} \frac{1}{\alpha-1} \times \left(-\frac{1}{1-\alpha} \right)$$

$$= \frac{1}{(\alpha-1)^2}$$

Bilan : $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} dx$ converge et $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} dx = \frac{1}{(\alpha-1)^2}$

Exercice 3 :

1) a) • $X(\Omega) = [\![0 ; +\infty [\![$ car on peut obtenir le premier "pile" au 1er lancer comme on peut n'obtenir que des faces à l'infini.

Soit $k \in \mathbb{N}$

• $[X = k] = [F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_k \cap P_{k+1}]$

Donc $P(X=k) = P(F_1 \cap F_2 \cap \dots F_k \cap P_{k+1})$

$= P(F_1) \times P(F_2) \times \dots \times P(F_k) \times P(P_{k+1})$

par indépendance

$= q^k p$

Bilan : • $X(\Omega) = \mathbb{N}$

• $\forall k \in \mathbb{N}, P(X=k) = q^k p$

b) ~~$(X+1)(\Omega) = \mathbb{N}^*$~~ ~~$\forall$~~ On pose $Y = X+1$

• $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$

• $\forall k \in \mathbb{N}^*, P(Y=k)$

$= P(X=k-1) = q^{k-1} p$

Donc $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

Donc $E(X+1) = \frac{1}{p} \iff E(X) = \frac{1}{p} - 1$

(par linéarité de l'espérance)

De même $V(Y) = V(X+1) = V(X) = \frac{1-p}{p^2}$

2) a) $[Q=k] = \left[\frac{1}{3}(X-R)=k\right]$

$= [X-R=3k]$

$= [X=3k+R]$

$= [X=3k] \cup [X=3k+1] \cup [X=3k+2]$

b) • $Q(\Omega)=\mathbb{N}$

• $\forall k \in \mathbb{N}$,

$P(Q=k) = P([X=3k] \cup [X=3k+1] \cup [X=3k+2])$

$= P(X=3k)+P(X=3k+1)+P(X=3k+2)$ par incompatibilité des évènements (X ne peut pas valoir 3k et 3k+1)

$= q^{3k}p + q^{3k+1}p + q^{3k+2}p$

$= q^{3k}p(1+q+q^2)$

$= q^{3k}(1-q)(1+q+q^2)$ car $p=1-q$

$= (q^3)^k(1-q^3)$ car $\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2$,
$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

Donc $Q \hookrightarrow BN(1-q^3)$

3) $P(R=0) = P(X=3Q)$

$=$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 297

Nombre de pages :

Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques – EDHEC BS

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Emplacement QR Code

4) ~~Soit $k \in \mathbb{N}$~~, Soit $i \in \mathbb{N}$, $j \in \{0;1;2\}$

~~$P[(Q=i) \cap [R=j])$~~ Montrons que $P[(Q=i) \cap (R=j)] = P(Q=i) \times P(R=j)$

- Si $j=0$:

$$P([Q=i] \cap [R=0]) = P(X=3i)$$
$$= q^{3i} p$$

et $P([Q=i]) \times P(R=0) = q^{3i}(1-q^3) \times \frac{1}{1+q+q^2}$

$$= q^{3i} p$$

- Si $j=1$:

$$P([Q=i] \cap [R=1]) = P(X=3i+1) = q^{3i+1} p$$

~~$= P(X-1 = 3i)$~~

$=$

et $P[Q=i] \times P([R=1]) = q^{3i}(1-q^3) \times \frac{q}{1+q+q^2}$

$$= q^{3i} q \, p = q^{3i+1} p$$

- Si $j = 2$:

- $P(X = 3i + 2) = P([Q = i] \cap [R = 2])$

$= q^{3i+2} p$

et $P(Q=i) \times P(R=2) = q^{3i} p \, (1+q+q^2) \times \frac{q^2}{1+q+q^2}$

$= q^{3i+2} p$

Donc R et Q sont indépendants

5) a) Comme montré dans 1) b) $(X+1) \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$

donc ce programme simule bien X

b) Q = simul X (1 - (1-p) * 3)   car $Q \hookrightarrow BN(1-q^3)$
R = . .   X - 3 * Q

Problème :

1) Soit $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$

$$h(k+n) = \cos\left(\frac{2(k+n)\pi}{n}\right)$$
$$= \cos\left(\frac{2k\pi + 2n\pi}{n}\right)$$
$$= \cos\left(\frac{2k\pi}{n} + 2\pi\right) = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$$

car $x \mapsto \cos(x)$ est 2π-périodique

Donc $h \in F_n$

2) • $F_n \subset E$
• La fonction nulle est n-périodique
• Soit $(f, g) \in F_n^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$\forall k \in \mathbb{Z}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, $(f+\lambda g)(k+n) = f(k+n) + \lambda g(k+n)$
$$= f(k) + \lambda g(k)$$
$$= (f+\lambda g)(k)$$

Donc F_n est stable par combinaison linéaire.

Bilan : F_n est un sous espace vectoriel de E

3) Soit $k \in \mathbb{Z}$. $\forall f \in F_n$,

~~$f(k) = f(nq+r)$~~ =

On a $k = nq + r$
nq désigne q périodes ~~de~~ donc $f(nq) = f(n)$

Donc $f(k) = f(nq+r) = f(n+r) = f(r)$.

h) a) Soit $i \in I_n$, $f \in F_n$

~~$\forall k \in I_n, \ f(k) = f($~~

$\forall k \in \mathbb{Z}, \ \sum_{i=0}^{n-2} f(i) e_i(k) = \underbrace{f(0) e_0(k)}_{=0} + \dots$

$+ \underbrace{f(k) e_k(k)}_{=f(k)} +$

$+ \underbrace{f(n-2) e_{n-2}(k)}_{=0}$

$= f(k)$

Donc $\forall k \in \mathbb{Z}, \ f(k) = \sum_{i=0}^{n-2} f(i) e_i(k)$

h) Ainsi $\forall f \in F_n, \ f = \sum_{i=0}^{n-2} f(i) \times e_i$

Ainsi toute fonction f de F_n s'exprime comme combinaison linéaire des éléments de la famille $(e_0 \dots e_{n-2})$

Donc cette famille est génératrice de F_n

- Soit $(\lambda_0 \dots \lambda_{n-2}) \in \mathbb{R}^n$ tels que

$\lambda_0 e_1 + \dots + \lambda_{n-2} e_{n-2} = 0$

- En évaluant en 1 on obtient

$\lambda_0 e_1 = \lambda_0 = 0$ par définition de e_i

En évaluant successivement en 1, en 2 ... en $n-2$ on obtient que $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_{n-2} = 0$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 297

Nombre de pages :

Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques - EDHEC BS

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Donc la famille est libre.

Donc $(e_0 \dots e_{n-2})$ est une base de F_n

c) ~~Les coordonnées de~~ La décomposition

$$f = \sum_{k=0}^{n-2} f(i) e_i$$ est donc unique $(\forall f \in F_n)$

Donc la matrice des coordonnées de f dans B_n est donnée par :

$$\begin{pmatrix} f(1) \\ \vdots \\ f(n-1) \end{pmatrix}$$

5)a) • $\langle \cdot \rangle$ est bien une application de $F_n \times F_n$ à valeur dans $\mathbb{R}$

Donc $\langle \cdot \rangle$ est défini

• Soit $(f, g) \in F_n^2$

$$\langle f, g \rangle = \sum_{k=0}^{n-2} f(k) g(k) = \sum_{k=0}^{n-2} g(k) f(k)$$

$= \langle g, f \rangle$ Donc $\langle ; \rangle$ est symétrique

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

- Soit $(f, g, h) \in F_n^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\langle f+\lambda g ; h \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} (f+\lambda g)(k)\, h(k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} f(k)\, h(k) + \lambda \sum_{k=0}^{n-1} g(k) h(k)$$

par linéarité de la somme

$$= \langle f, h \rangle + \lambda \langle g, h \rangle$$

Donc $\langle\ ;\ \rangle$ est symétrique à gauche et par symétrie à droite aussi

- Soit $f \in F_n$

$$\langle f, f \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} f^2(k) \geq 0$$ car une somme de carrées est toujours positive

On suppose que $\langle f, f \rangle = 0$

Donc $\sum_{k=0}^{n-1} f^2(k) = 0$. Donc $\forall k \in [\![0 ; n-1]\!]$, $f^2(k) = 0$

car une somme de termes positifs est nulle ssi tous les termes sont nuls

Donc $\forall k \in [\![0 ; n-1]\!]$, $f(k) = 0$

Or $\forall f \in F_n$, $f = \sum_{i=0}^{n-1} f(i)\, e_i$ (4)a)

Donc si $\forall i \in I_n$, $f(i) = 0$, $f = 0$

Donc f est l'application nulle. Donc $\langle\ ;\ \rangle$ est définie positive

Bilan : $\langle \, ; \, \rangle$ est un produit scalaire sur F_n

b) $\forall (i,j) \in I_n^2, \; i \neq j$

- $\langle e_i , e_i \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} e_i^2(k) = 1$ donc $\|e_i\| = 1$

- $\langle e_i ; e_j \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{e_i(k)}_{=\begin{cases} 0 \text{ si } j \neq k \\ 1 \text{ si } j = k \end{cases}} \underbrace{e_j(k)}_{=\begin{cases} 1 \text{ si } j = k \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}}$

$= 0$

Donc $(e_0 \dots e_{n-1})$ est une base orthonormée pour $\langle \, ; \, \rangle$

c) $\sum_{k=0}^{n-1} \cos(a+kb) = \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{\sin\left(a + \frac{(2k+1)b}{2}\right) - \sin\left(a + \frac{(2k-1)b}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{b}{2}\right)}$

~~car $\sin\left(\frac{b}{2}\right) = 0 \iff \frac{b}{2} = 0$ ou $\frac{b}{2} = \pi$~~

~~$\iff b = 0$ ou $b = 2\pi$~~

car $\forall b \in \,]0 ; 2\pi[, \; \sin\left(\frac{b}{2}\right) \neq 0$

$\left(\frac{b}{2} \neq 0 \text{ et } \frac{b}{2} \neq \pi \right)$

$= \dfrac{1}{2\sin\left(\frac{b}{2}\right)} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{(2k+1)b}{2}\right) - \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{(2k-1)b}{2}\right) \right)$

$= \dfrac{1}{2\sin\left(\frac{b}{2}\right)} \sin\left(\frac{(2n-1)b}{2}\right) - \sin\left(a - \frac{b}{2}\right)$

(par télescoppage)

$\cancel{d) \ \|h\| = \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)^2}$

$\cancel{d) \ \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{4k\pi}{n}\right)}$

d) Soit $a = \frac{3k\pi}{n}$ et $h = \frac{\pi}{n}$

$$\sin\left(a + \frac{(2n-1)h}{2}\right) = \sin\left(\frac{3k\pi}{n} + \pi - \frac{\pi}{2n}\right)$$

~~Or sin est π périodique~~

Or $\sin(x+\pi) = -\sin(x)$

Donc $\sin\left(\frac{3k\pi}{n} + \pi - \frac{\pi}{2n}\right) = -\sin\left(\frac{3k\pi}{n} - \frac{\pi}{2n}\right)$

Je n'aboutis pas. On suppose les résultats vrais

$\cancel{e) \ \|h\|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} \cos k\pi}$

e) $\|h\|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)^2$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\cos\left(\frac{4k\pi}{n}\right) + 1}{2} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2}$$

$$= \frac{n}{2}$$

Donc $\|h\| = \sqrt{\frac{n}{2}}$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 297	Nombre de pages :	Session : 2023

Épreuve de : Maths - EDHEC

Emplacement QR Code

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

6) a) Soit $k \in \mathbb{Z}$,

$$D_f(k+n) = f(k+1+n) - f(k+n)$$
$$= f(k+1) - f(k) \text{ car } f \in F_n$$
$$= D_f(k)$$

Donc $D_f \in F_n$

b) Soit $(f,g) \in F_n^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$. $\forall k \in \mathbb{Z}$

$$D_{f+\lambda g}(k) = (f+\lambda g)(k+1) - (f+\lambda g)(k)$$
$$= f(k+1) - f(k) + \lambda g(k+1) - g(k))$$
$$= D_f(k) + \lambda D_g(k)$$

Donc $D(f+\lambda g) = D(f) + \lambda . D(g)$

Donc D est linéaire. D'après a), D est à valeur dans F_n.

Donc $D \in \mathcal{L}(F_n)$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

c) $D_k(k) = \cos\left(\frac{2(k+1)\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \quad (k \in \mathbb{R})$

$= \cos\left(\frac{2k\pi}{n} + \frac{2\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$

Or, $\cos\left(\frac{2k\pi}{n} + \frac{2\pi}{n}\right) = \cos\left(\frac{2k+1}{n}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)$

$- \sin\left(\frac{2k+1}{n}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$

Donc $D_k(k) = \cos\left(\frac{2k+1}{n}\right)\left(\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) - 1\right) -$

$\sin\left(\frac{2k+1}{n}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$

c) $D_k(k) = \cos\left(\frac{2(k+1)\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$

$= \cos\left(\frac{2k\pi + 2\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$

$= \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{n} + \frac{\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{n} - \frac{\pi}{n}\right)$

$= \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) - \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$

$- \left(\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)$

$= -2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{2k\pi}{n} + \frac{\pi}{n}\right)$

d)

7) a) Soit $(f,g) \in F_n^2$,

$\langle f, \Delta g \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} f(k)\left(g(k+1) - 2g(k) + g(k-1)\right)$

$= \sum_{k=0}^{n-1} f(k)g(k+1) - 2f(k)g(k) + f(k)g(k-1)$

$= \sum_{k=0}^{n-1} f(k)g(k+1) - f(k)g(k) - \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} f(k)g(k) + f(k)g(k-1)}$

$=$ $\qquad = \sum_{k=0}^{n-1} f(k+1)g(k+1) + f(k+1)g(k)$

(car $f(n) = f(0)$)

Or $\forall k \in [\![0;n-1]\!]$, $-(f(k+1)-f(k))(g(k+1)-g(k))$

$= f(k)g(k+1) - f(k)g(k) - f(k+1)g(k+1) + f(k+1)g(k)$

Donc $\langle f ; \Delta g \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} f(k)g(k+1) - f(k)g(k) - f(k+1)g(k+1) + f(k+1)g(k)$

$= - \langle Df ; Dg \rangle$

b) Ainsi, $\langle \Delta f ; g \rangle = \langle g ; \Delta f \rangle$

$= - \langle Dg ; Df \rangle$

$= - \langle Df ; Dg \rangle$

par symétrie de $\langle ; \rangle$

Donc $\langle \Delta f ; g \rangle = \langle g ; \Delta f \rangle$

Donc Δ est symétrique

c) Soit $\lambda \in Sp(\Delta)$, $f \in Ker(\Delta - \lambda Id)$

Donc $\Delta(f) = \lambda f$

~~Donc~~ $\cancel{\langle \Delta f ; g \rangle = \lambda \langle f ; g \rangle}$

~~Donc~~ $\cancel{- \langle Df ; Dg \rangle = \lambda \langle f ; g \rangle}$

Donc $\langle \Delta f ; f \rangle = \lambda \langle f ; f \rangle$

Donc $- \| Df \|^2 = \lambda \| f \|^2$

Donc $- \dfrac{\| Df \|^2}{\| f \|^2} = \lambda$ (f est un vecteur propre donc non nul)

Donc $\lambda \leq 0$

Bilan : $Sp(\Delta) \subset \mathbb{R}^-$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 292

Nombre de pages :

Session : 2023

Épreuve de : Maths. EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

8) a) $\Delta(\mathcal{E}_0) = 1 - 2 + 1 = 0$

Donc $\mathcal{E}_0 \in \mathrm{Ker}(\Delta)$

b) On a montré que $\mathrm{Vect}(\mathcal{E}_0) \subset \mathrm{Ker}(\Delta)$

9) a) On a Δ symétrique d'après 7) b). Donc Δ est diagonalisable dans une base orthonormée de F_n

- Soit $(\mathcal{E}_0 \dots \mathcal{E}_{n-2})$ une base orthogonale où

$\forall i \in [\![1; n-2]\!], \quad \|\mathcal{E}_i\| = 1$

$\|\mathcal{E}_0\|^2 = \langle \mathcal{E}_0 ; \mathcal{E}_0 \rangle = n$ où $\mathcal{E}_0$ est défini dans 8)

Donc $\frac{1}{\sqrt{n}} \mathcal{E}_0$ est normé

~~Ainsi $\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \mathcal{E}_0 \dots \mathcal{E}_{n-2}\right)$ est une base orthon~~

Ainsi il existe une base orthonormée $\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \mathcal{E}_0 \dots \mathcal{E}_{n-2}\right)$ formée de vecteurs propres de f

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Comme ε_0 est un vecteur propre associé à 0,

$\Delta(\varepsilon_0) = 0$

Donc il existe $(\alpha_1 \dots \alpha_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ / $f = \sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i \varepsilon_i$

où $\forall i \in [\![1 ; n-2]\!]$, α_i est une valeur propre de f associée à ε_i (Notons que les α_i ne sont pas nécessairement tous distincts)

b) $\|D_f\|^2 = \sum_{k=0}^{n-2} (f(k+1) - f(k))^2$

$\cancel{= \sum_{k=0}^{n-2} f(k+1)^2 - 2f(k)f(k+1) + f(k)^2}$

$= \sum_{k=0}^{n-1} f(k+1)^2 - 2f(k)f(k+1) + f(k)^2$

~~Or~~ $\cancel{f(k) = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \varepsilon_i(k)}$

~~Donc~~ $\cancel{f(k+1) - f(k) = \sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i \varepsilon_i(1)}$ ~~par linéarité de~~ $\cancel{\varepsilon_i}$

$\geq \sum_{k=0}^{n-2} f(k)^2 - 2f(k)f(k+1)$ Je n'aboutis pas

$\cancel{\geq \|f\|^2 - 2\sum_{k=0}^{n-2} f(k)f(k+1)}$

10) a) ~~$\Delta(\varepsilon_0)(k) = \varepsilon_0(k+1) - 2\varepsilon_0(k) + \varepsilon_0(k-1)$~~

$$\Delta(e_0)(k) = e_0(k+1) - 2e_0(k) + e_0(k-1)$$

$$=$$

b) $A^2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{bmatrix} = -3A$$

Ainsi $P = X^2 + 3X$ est un polynôme annulateur de degré 2 de A

Ainsi $Sp(\Delta) \subset \{0 ; -3\}$

~~• $0 \in Sp$~~

A est symétrique donc diagonalisable. Donc A admet au moins 1 valeur propre

• Si seul 0 est valeur propre alors $A = 0$ ce qui est absurde

• Si seul -3 est valeur propre, alors $A = -3I$
ce qui est absurde

Bilan : $Sp(A) = \{0 ; 3\}$

IMPRIMERIE NATIONALE – 2023-02-PF 018 751