Copie anonyme - n°anonymat :

W1-00333 Maths S

Code épreuve : 297 | Nombre de pages : 28 | Session : 2023

Épreuve de : Maths - Appro - EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 1 :

Partie 1 :

1] Soit M la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $rg(M) = 1$ et $M \in M_n(\mathbb{R})$ donc d'après le théorème du rang appliquée aux matrice $\dim(\ker(M)) = n-1$.
donc 0 valeure propre de M associée à un sous espace propre de dimension $n-1$, et $\dim(\ker(M)) = \dim(\ker(f))$
$\underline{= n-1}$.

Donc $\underline{0 \text{ valeure propre de } f}$.

2] a. Comme C est la première colonne de M et C est non nulle, le produit matricielle CL donne une matrice $\in M_n(\mathbb{R})$

et avec ~~[illegible]~~ $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ et $L = (1 \ l_2 \ \cdots \ l_n)$

on a alors

$$M = \begin{pmatrix} c_1 & c_1 l_2 & \cdots & c_1 l_n \\ \vdots & & & \vdots \\ c_n & c_n l_2 & \cdots & c_n l_n \end{pmatrix}$$

Donc $\underline{\exists L = (1 \ l_1 \ \cdots \ l_n) \in M_{1,n}(\mathbb{R}), \ M = CL}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

b. d'après la question précédente, on a vu que :

$$M = \begin{pmatrix} c_1 & c_1 l_2 & \cdots & c_1 l_n \\ \vdots & & & \\ c_n & c_n l_2 & \cdots & c_n l_n \end{pmatrix}$$

d'où $Tr(M) = c_1 + c_2 l_2 + c_3 l_3 + \dots + c_n l_n$

et $LC = (1\ l_2 \ \cdots\ l_n) \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = (c_1 + c_2 l_2 + \dots + c_n l_n)$

d'où l'égalité $\boxed{Tr(M) = LC}$

c. $M^2 = M \times M = CLCL = C(LC)L = C\,Tr(M)L = Tr(M)CL = \boxed{Tr(M)M}$

~~3] D'après la question précédente, $M^2 = Tr(M)M$~~

~~donc $P : x \mapsto x^2 - tr(M)x$ est un polynôme annulateur~~

~~de M donc $Sp(M) \subset \{\text{racine}(P)\} = \{0, Tr(M)\}$~~

~~Or : d'après Q1, 0 est valeur propre de M~~

~~de plus : $M \times M = Tr(M)M$ et M est ~~non~~ nulle~~

~~donc $Tr(M)$ est une~~

3] On sait que $M = C \times L$

donc $M \times C = C \times L \times C = C \times Tr(M) = Tr(M) C$

donc $Tr(M)$ est une valeur propre de M associée au vecteur propre $C \neq 0$.

Donc $Tr(M)$ est une valeur propre de M, matrice canoniquement associée à f, c'est donc une valeur propre de f.

4] Si $Tr(M) = 0$, alors $Sp(M) = \{0\}$

or : 0 est une valeur propre associée à un sous espace propre de dimension $n-1$ (G.1)

donc $\sum_{\lambda \in Sp(M)} \dim(E_\lambda(M)) = n-1 \neq n$

donc M n'est pas diagonalisable si $Tr(M) = 0$

5]. Si $Tr(M) \neq 0$, on a d'après question 1 et 3 :
$Sp(f) = \{0, Tr(M)\}$

et $\dim(\ker(f)) = n-1$

et ~~comm~~ comme $Tr(M)$ est valeur propre de f, on ne peut que avoir $\dim(\ker(f - Tr(M) Id)) = 1$

donc $\sum_{\lambda \in Sp(f)} \dim(E_\lambda(f)) = n$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$

d'où $\sum_{\lambda \in Sp(f)} \dim(E_\lambda(f)) = \dim(\mathbb{R}^n) = n$

f est donc diagonalisable

Partie 2 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/a & 1/b \\ a & 1 & 1/c \\ b & c & 1 \end{pmatrix}$$

1) a. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$AX = 0 \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/a & 1/b \\ a & 1 & 1/c \\ b & c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x + \frac{1}{a}y + \frac{1}{b}z \\ ax + y + \frac{1}{c}z \\ bx + cy + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x + \frac{1}{a}y + \frac{1}{b}z = 0 \\ ax + y + \frac{1}{c}z = 0 \\ bx + cy + z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} abx + by + az = 0 \\ acx + cy + z = 0 \\ bx + cy + z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} abx + by + az = 0 \\ acx - bx = 0 \\ bx = \cancel{b} - cy - z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (ac-b)x = 0 \\ bx = -cy - z \end{cases}$$ soit $x = 0$ ou $ac = b$

si $\underline{x = 0}$: alors $\begin{cases} by - acy = 0 \\ x = 0 \\ z = -cy \end{cases} \iff \begin{cases} y(b-ac) = 0 \\ x = 0 \\ z = -cy \end{cases}$

soit $y = 0$ soit $ac = b$

si $\underline{y = 0}$ alors $\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 297 | Nombre de pages : 28 | Session : 2023

Épreuve de : Maths - Appro - EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

D'où si $x=0$, $y=0$ et $z=0$

alors $S=\{0,0,0\}$

Or : A est non inversible donc $AX=0$ ne peut pas s'écrire $X=0$

Donc absurde, ainsi $x\neq 0$, $y \neq 0$ et $z\neq 0$

on a alors $\boxed{ac=b}$

b. On a alors
$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & C_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1/a & 1/ac \\ a & 1 & 1/c \\ ac & c & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

avec $C_3 \neq 0$ et $C_1 = a\times c\times C_3 = c\times C_3$.

D'où $\boxed{rg(A) = 1.}$

7) a. Comme $rg(A)=1$, d'après le théorème du rang appliqué aux matrices, $\dim(\ker(A))=2$
d'où 0 est valeur propre de A associée à un s.e.p de dimension 2.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

on pose $L = (1 \quad 1/a \quad 1/ac)$

et $C = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ ac \end{pmatrix}$

on a bien $CL = A$ et $LC = 3 = Tr(A)$

On est donc dans le cadre d'un exemple de la partie 1,

et comme $Tr(A) \neq 0$ car $Tr(A) = 3$

on en déduit que g est diagonalisable et $Sp(g) = \{0, Tr(A)\} = \{0, 3\}$.

b. On a d'après question précédente : $A = CL$ et $LC = Tr(A) \in \mathbb{R}$

~~$\forall n \in \mathbb{N}^*$ A^n~~ Par récurrence simple sur $n \in \mathbb{N}^*$ montrer que : " $\exists \alpha \in \mathbb{R}, A^n = \alpha A$ " $= P_n$

Initialisation : pour $n = 1$, $A = A$, $\alpha = 1$
on a donc $A \in Vect(A)$
P_1 vraie

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que P_n vraie
montrer que P_{n+1} soit vraie

$A^{n+1} = A \times A^n = A \times A \times A^{n-1} = CLCL \times A^{n-1} = Tr(A) \times CL A^{n-1}$ //

donc $A^{n+1} = Tr(A) \times \alpha A^{n-1} = Tr(A) \times A^{n} \overset{H.R}{=} \underbrace{Tr(A) \times \alpha}_{\in \mathbb{R}} A$

d'où $\boxed{A^{n+1} \in Vect(A)}$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A^n \in Vect(A)$

Exercice 2 :

$c > 2$

Partie 1 :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{x^{c+1}} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1. \end{cases}$$

1]. ~~$\forall x \in$~~ $\forall x \geq 1$, $f(x) = \dfrac{c}{x^{c+1}} \geq 0$ car $c > 2$.

et $\forall x < 1$, $f(x) = 0 \geq 0$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$.

. f est continue sur $]-\infty, 1[$ comme constante
et f continue sur $[1, +\infty[$ car $x \neq 0$
d'où f continue sur $\mathbb{R}$ sauf eventuellement en un nombre fini de point.

Alors :
f densité de probabilité ssi $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{1}^{+\infty} \frac{c}{t^{c+1}}\,dt$$

soit $A > 0$,

$$\int_{1}^{A} \frac{c}{t^{c+1}}\,dt = \left[-\frac{1}{t^c} \right]_1^A = -\frac{1}{A^c} + \frac{1}{1^c} = \frac{-1}{A^c} + 1$$

or $A^c = e^{c\ln(A)}$

et $\ln(A) \xrightarrow[A\to+\infty]{} +\infty$ donc $c\times\ln(A) \xrightarrow[A\to+\infty]{} +\infty$

par composition de l'exponentielle, continue sur $\mathbb{R}$.

$$e^{c\ln(A)} \xrightarrow[A\to+\infty]{} +\infty$$

donc $\lim\limits_{A\to+\infty} A^c = +\infty$ donc $\lim\limits_{A\to+\infty} -\frac{1}{A^c} = 0$

d'où $\lim\limits_{A\to+\infty} \int_1^A \frac{c}{t^{c+1}}\,dt = 1$

D'où $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0$, f continue sur $\mathbb{R}$ sauf eventuellement en un nombre fini de point (1), et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$

f est donc une densité de probabilité

2]. X possède une espérance ssi $\int_{-\infty}^{+\infty} |t f(t)|\,dt$ converge

ssi $\int_1^{+\infty} t f(t)\,dt$ converge.

et $\int_1^{+\infty} t f(t)\,dt = \int_1^{+\infty} \frac{c}{t^c}\,dt$

~~or~~ X possède une esperance si $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^c}\,dt$ converge

or : $c > 2$ d'après l'ennoncé

donc c'est une intégrale de Riemann convergente
Donc X admet une espérance

Copie anonyme - n°anonymat :

Emplacement QR Code

Code épreuve : 297 | **Nombre de pages :** 28 | **Session :** 2023

Épreuve de : Maths Appro - EDHEC

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

et $E(X) = \int_1^{+\infty} \frac{c}{t^c}\, dt = c \times \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^c}\, dt$.

Soit $A > 0$, $\int_1^{A} \frac{1}{t^c}\, dt = \left[-\frac{1}{(c-1)\, t^{c-1}} \right]_1^A$

$$= \frac{-1}{(c-1)A^{c-1}} + \frac{1}{(c-1)}$$

De même que la question précédente : $\lim\limits_{A \to +\infty} -\frac{1}{(c-1)A^{c-1}} = 0$

D'où $E(X) = c \times \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^c}\, dt = c \times \frac{1}{c-1}$

$$\boxed{= \frac{c}{c-1}}$$

X possède une variance ssi $\int_{-\infty}^{+\infty} |t^2 f(t)|\, dt$ converge

ssi $\int_1^{+\infty} t^2 \times \frac{1}{t^{c+1}}\, dt$ converge.

or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{c+1}} t^2\, dt = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{c-1}}\, dt$

or : ~~$c > 0$~~ $c > 2$ donc $c - 1 > 1$ donc c'est une intégrale de Riemann convergente, X admet une variance

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

et $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\, dt = \int_1^{+\infty} c \times \frac{1}{t^{c-1}}\, dt$

$= c \times \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{c-1}}\, dt.$

Soit $A > 0$, $\int_1^A \frac{1}{t^{c-1}}\, dt = \left[-\frac{1}{c-2} \times \frac{1}{t^{c-2}} \right]_1^A$

$= \frac{-1}{(c-2)A^{c-2}} + \frac{1}{c-2}$

de même $\lim_{A \to +\infty} \frac{-1}{(c-2)A^{c-2}} = 0$

d'où $E(X^2) = \frac{c}{c-2}$

D'après la formule de Koenig-Huygen :

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{c}{c-2} - \frac{c^2}{(c-1)^2}$

$= \frac{(c-1)c - (c-2)c^2}{(c-1)(c-2)} = \frac{c^2 - c - c^3 + 2c}{(c-1)(c-2)}$

$\boxed{= \frac{-c^3 + c^2 + c}{(c-1)(c-2)}}$

10/

3) $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

si $x \geqslant 1$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^{1} 0\,dt + \int_{1}^{x} f(t)\,dt$

$= \int_1^x \frac{c}{t^{c+1}}\,dt$

$= \left[- \frac{1}{t^c} \right]_1^x = - \frac{1}{x^c} + 1.$

si $x < 1$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0.$

D'où, $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x^c} + 1 & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1. \end{cases}$

4) ~~Soit~~ $Y = \ln(X)$

a. $\forall x \in \mathbb{R}$, $G(x) = F_Y(x) = P(Y \leqslant x) = P(\ln(X) \leqslant x)$ exponentielle strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$= P(X \leqslant e^x)$

$= F(e^x)$

b. $e^x < 1$ ssi $x < \ln(1)$

ssi $x < 0$

et $e^x \geqslant 1$ ssi $x \geqslant 0$.

et $\forall x < 0$, $F(e^x) = 0$

et $\forall x \geq 0$, $F(e^x) = \frac{-1}{(e^x)^c} + 1 = 1 - e^{-cx}$

d'où $\forall x \in \mathbb{R}$, $G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-cx} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

$\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{E}(c), \quad c > 2}$

comme $Y = \ln(X)$
$e^Y = X$

c. def simulX(c):
    Y = rd.exponential(c)
    X = ~~X = np.log(Y)~~ np.exp(Y)
    return(X).

Partie 2 :

def simulZ(c) :
    X_1 = simulX(c)
    X_2 = simulX(c)
    $Z = X_1 * X_2$
    return(Z).

6]. $Z = X_1 * X_2$ donc $\ln(Z) = \ln(X_1) + \ln(X_2)$
$= Y_1 + Y_2$.

or X_1 et X_2 sont indépendantes
donc $E(X_1 X_2) = E(X_1)E(X_2) = \frac{c^2}{(c-1)^2}$ (Q. 2).

et X_1 et X_2 sont indépendantes donc X_1^2 et X_2^2 sont
indépendantes par le lemme de coalition.

Copie anonyme - n°anonymat :

Emplacement QR Code	Code épreuve : 297	Nombre de pages : 28	Session : 2023
	Épreuve de : Maths - Appro - EDHEC		

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Donc $E((X_1X_2)^2) = E(X_1^2 X_2^2) = E(X_1^2)E(X_2^2)$

$= \frac{c^2}{(c-2)^2}$

donc $E(Z) = \frac{c^2}{(c-1)^2}$ et $E(Z^2) = \frac{c^2}{(c-2)^2}$

donc $V(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2$

$= \frac{c^2}{(c-2)^2} - \frac{c^4}{(c-1)^4} = \frac{c^2((c-1)^4) - c^4(c-2)^2}{(c-2)^2\ (c-1)^4}$

$= \frac{c^2((c-1)^4 - c^2(c-2)^2)}{(c-1)^2\ (c-1)^4}$

$\cancel{= \frac{c^2(c-1)^2((c-1)^2 - c^2))}{(c-1)^2(c-1)^4}}$

$\cancel{= c^2}$

$V(Z) = \frac{c^2((c-1)^4) - c^4(c-2)^2}{(c-2)^2(c-1)^4} = \frac{c^2((c-1)^4 - c^2(c-2)^2)}{(c-2)^2(c-1)^4}$

et $(c-1)^4 = (c-1)^2(c-1)^2 = (c^2-2c+1)(c^2-2c+1)$

$= c^4 - 4c^3 + 4c^2 - 4c + 1$

et $c^4(c-2)^2 = c^4(c^2-4c+4) = \cancel{c^4 - 4c^3 + 4c^2}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$$V(2) = \frac{c^2(c-1)^4 - c^4(c-2)^2}{(c-1)^4(c-2)^2} = \frac{c^2(-4c+1)}{(c-2)^2(c-1)^4}$$

$= \cancel{c^4}$

La valeur de la variance n'est pas la ~~\$~~ même, il y a dû il avoir des erreurs de calculs précédemment, on admet donc le résultat.

7] a. ~~∀~~ $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(cY_1 \leq x) \overset{c>2}{=} P(Y_1 \leq \frac{x}{c}) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

d'où $\boxed{cY_1 \text{ et } cY_2 \hookrightarrow \mathcal{E}(1)}$

~~b. X_1 et X_2 sont indépendantes~~
~~donc $\ln(X_1)$ et $\ln(X_2)$ le sont aussi (lemme de coalition)~~
~~donc cY_1 et cY_2 sont indépendantes~~
~~donc $L = cY_1 + cY_2$, d'après le théorème du produit de convolution, est à densité et de densité~~

b.
Donc $cY_1 + cY_2 \hookrightarrow \gamma(2)$, par la stabilité de la loi gamma

8] a. Soit $x \in \mathbb{R}$, $K(x) = P(cY_1 + cY_2 \leq x) = P(c(Y_1+Y_2) \leq x)$, $c>2$

$= P(Y_1 + Y_2 \leq \frac{x}{c})$

$= H(\frac{x}{c})$

~~D'après le produit de convolution.~~

$\forall x \in \mathbb{R}$, $K(x) = H\left(\frac{x}{c}\right)$ donc $H(x) = K(cx)$

et K fonction de répartition d'une loi gamma de paramètre 2.

D'où $H'(x) = c \times K'(x)$ avec k ~~fo~~ densité de $cY_1 + cY_2$

donc $k(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ xe^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

donc $h(x) = c \times k(cx) = \boxed{\begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ cx\, e^{-x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}}$

b. $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $F_Z(x) = P(Z \leq x) = P(X_1 X_2 \leq x)$
$= P(\ln(X_1 X_2) \leq \ln(x))$
$= P(\ln(X_1) + \ln(X_2) \leq \ln(x))$
$= P(Y_1 + Y_2 \leq \ln(x))$
$= H(\ln(x))$

et $\ln(x) \geq 0 \iff x \geq 1$ (croissance exp)
$\ln(x) < 0 \iff x < 1$.

d'où $f_Z(x) = F_Z'(x) = H'(\ln(x)) = \frac{1}{x} h(\ln(x))$

$$\boxed{f_Z(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \times c^2 \times (\ln(x)) \times e^{-c(\ln(x))} = \dfrac{c^2 \ln(x)}{x^{c+1}} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1. \end{cases}}$$

9] a. $\forall \alpha > 1$, $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} dx$, intégrale impropre en $+\infty$

$\frac{\ln(x)}{x^\alpha} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ car $\frac{\ln(x)}{x^{\alpha-2}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ par croissance comparée.

et $\forall x \geq 1$, $\frac{\ln(x)}{x^\alpha} \geq 0$ et $\frac{1}{x^2} \geq 0$, et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$, Riemann CV

Par comparaison de fonction à terme positive

$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} dx \text{ cv.}}$

Problème

1] $\forall k \in \mathbb{Z}$, $h(k) = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $h(k+n) = \cos\left(\frac{2(k+n)\pi}{n}\right) = \cos\left(\frac{2k\pi + 2n\pi}{n}\right)$

$= \cos\left(\frac{2k\pi}{n} + 2\pi\right)$ cos est 2π periodique

$= \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$

$= h(k)$.

2] $F_n = \{f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}, f(k+n) = f(k)\}$.

. $F_n \neq \emptyset$ car $h \in F_n$ (Q. 1)

. $F_n \subset E$

. Soit $(\lambda, \mu, f, g) \in \mathbb{R}^2 \times F_n^2$, ~~(λf+g)~~ $(\lambda f + \mu g)(k+n) = \lambda f(k+n) + \mu g(k+n)$
$= \lambda f(k) + \mu g(k)$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 297 | Nombre de pages : 28 | Session : 2023

Épreuve de : Maths - Appro - EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

D'où, $(\lambda f+\mu g)(k+n) = (\lambda f+\mu g)(k)$, $\lambda f+\mu g \in F_n$.

Fn est un sev de E

3). Soit $k \in \mathbb{Z}$., $k=nq+r$., $q \in \mathbb{Z}$.

Soit $f \in F_n$, $f(k) = f(nq+r)$ et $f(k+n)=f(k)$

~~et f(k+n)~~

d'où $f(k+n) = f(nq+r+n) = f(nq+r)$

d'où $\cancel{f(k+n)=f(nq+r)} = \cancel{2f(nq+r)}$

$f(n(q+1)+r) = f(nq+r)$

4). $\forall i \in I_n$, $\forall k \in I_n$, $e_i(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } i=k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

a.

b. $\forall k \in \mathbb{Z}$, en admettant la question précédente,
$\forall f \in F_n$, $f(k) \in \text{Vect}(e_1(k), \dots, e_{n-1}(k))$

donc $F_n = \text{Vect}(e_1, \_\_, e_{n-1})$

$\mathcal{B}_n = (e_1, \_\_, e_{n-1})$ est donc une base de F_n.

c. $\forall f \in F_n$ les coordonnées de f dans la base $\mathcal{B}_n = (e_i)_{i \in [\![0, n-1]\!]}$ sont les $(f(i))_{i \in [\![0, n-1]\!]}$.

7). a. Soit $(f, g) \in F_n^2$, $\langle f, g \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} f(k)\, g(k)$. $\in \mathbb{R}$

• Soit $(\lambda, f, g, h) \in \mathbb{R} \times F_n^3$, $\langle \lambda f + g, h \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} (\lambda f + g)(k)\, h(k)$

$= \lambda \sum_{k=0}^{n-1} f(k) h(k) + \sum_{k=0}^{n-1} g(k) h(k)$

$= \lambda \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle$

donc $\langle , \rangle$ est ~~symétri~~ linéaire à gauche

• Soit $(f, g) \in F_n^2$, $\langle f, g \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} f(k) g(k) = \sum_{k=0}^{n-1} g(k) f(k)$ * commutativité du produit sur $\mathbb{R}$.

$= \langle g, f \rangle$

donc $\langle , \rangle$ est symétrique donc bilinéaire.

• Soit ~~(f, f)~~ $f \in F_n$, $\langle f, f \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} f(k)^2 \geq 0$ donc $\langle , \rangle$ positive

et $f \in F_n$, $\langle f, f \rangle = 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} f(k)^2 = 0 \Rightarrow f(k)^2 = 0$
car $f(k)^2 \geq 0$

donc $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $f(k)^2 = 0$ donc $f(k) = 0$
donc f est la fonction nulle

donc $\langle , \rangle$ est <u>définie</u> <u>positive</u>

$\boxed{\text{Donc } \langle , \rangle \text{ est un produit scalaire sur } F_n.}$

b. $\forall i \in I_n$, $\forall k \in I_n$, $e_i(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

soit $(i, j) \in I_n$,

si $i \neq j$, $\langle e_i, e_j \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} e_i(k) e_j(k) = e_i(i) e_j(i) + e_i(j) e_j(j)$
$= 0$

si $i = j$, $\langle e_i, e_j \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} e_i(k) e_j(k) = \sum_{k=0}^{n-1} (e_i(k))^2 = (e_i(i))^2 = 1.$

Donc $(e_1, \dots, e_{n-1})$ est une famille orthonormale
et d'après $\boxed{4.b}$, c'est une base de F_n

$\boxed{\text{Donc } B_n = (e_1, \dots, e_{n-1}) \text{ BON de } F_n.}$

c. Soit $k(a,b) \in \mathbb{R}$, $b \in]0, 2\pi[$,

$2\sin\left(\frac{b}{2}\right) \cos(a + kb) = \sin\left(a + \frac{(2k+1)b}{2}\right) - \sin\left(a + \frac{(2k-1)b}{2}\right)$

$0 < b < 2\pi$
donc $0 < \frac{b}{2} < \pi$ donc sin ne s'annule pas.

d'où $\cos(a + kb) = \frac{1}{2\sin\left(\frac{b}{2}\right)} \times \left(\sin\left(a + \left(\frac{(2k+1)b}{2}\right)\right) - \sin\left(a + \frac{(2k-1)b}{2}\right)\right)$

d'où $\sum_{k=0}^{n-1} \cos(a + kb) = \frac{1}{2\sin\left(\frac{b}{2}\right)} \times \left(\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{(2k+1)b}{2}\right) - \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{(2k-1)b}{2}\right)\right)$

or, par réindexation

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{(2k+1)b}{2}\right) - \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{(2k-1)b}{2}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sin\left(a + \frac{(2k-1)b}{2}\right) - \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{(2k-1)b}{2}\right)$$

$$= \sin\left(a + \frac{(2n-1)b}{2}\right) - \sin\left(a - \frac{b}{2}\right).$$

d'où $$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} \cos(a+kb) = \frac{1}{2\sin\left(\frac{b}{2}\right)} \times \left(\sin\left(a + \frac{(2n-1)b}{2}\right) - \sin\left(a - \frac{b}{2}\right)\right).}$$

b. pour $a = 0$ et $b = \frac{4\pi}{n}$ avec $n \geq 3$ donc $b \in]0, 2\pi[$.

$$\sin\left(0 + \frac{(2n-1)\times 4\pi}{2n}\right) = \sin\left(\frac{(2n-1)4\pi}{2n}\right) = \sin\left(\frac{(2n-1)2\pi}{n}\right)$$

$$= \sin\left(\frac{4n\pi - 2\pi}{n}\right)$$

$$= \sin\left(4\pi - \frac{2\pi}{n}\right)$$

$$= \sin\left(-\left(\frac{2\pi}{n} - 4\pi\right)\right)$$

$$= -\sin\left(\frac{2\pi}{n} - 4\pi\right)$$

$$= -\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

et $$\sin\left(0 - \frac{4\pi}{2n}\right) = \sin\left(-\frac{2\pi}{n}\right) = -\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

d'où $$\sin\left(0 + \frac{(2n-1)\times 4\pi}{2n}\right) - \sin\left(0 - \frac{4\pi}{2n}\right) = 0$$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 297	Nombre de pages : 28	Session : 2023

Épreuve de : Maths - Appro - EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

on en déduit alors l'égalité pour $a=0$ et $b=\frac{4\pi}{n}$,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{4k\pi}{n}\right) = 0}$$

l'autre égalité, on pose $a=\frac{2\pi}{n}$ et $b=\frac{4\pi}{n}$

alors $\sum_{k=0}^{n-1} \cos(a+kb) = \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2\pi}{n}+\frac{4k\pi}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(4k+2)\pi}{n}\right)$

et $\sin\left(\frac{2\pi}{n}+\frac{(2n-1)4\pi}{2n}\right) = \sin\left(\frac{4\pi(2n-1+1)}{2n}\right) = \sin(4\pi) = 0.$

$\sin\left(\frac{2\pi}{n}-\frac{4\pi}{2n}\right) = \sin(0) = 0$

d'où $\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(4k+2)\pi}{n}\right) = 0}$

e. $\|h\|^2 = \langle h, h\rangle = \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$

$\cos^2(a) = \frac{\cos(2a)+1}{2}$

$= \sum_{k=0}^{n-1} \cos^2\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$

$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\left(1+\cos\left(\frac{4k\pi}{n}\right)\right)}{2} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{4k\pi}{n}\right)$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Donc $\|h\|^2 = \langle h, h \rangle = \frac{n}{2}$

donc $\boxed{\|h\| = \sqrt{\frac{n}{2}}}$

6) a $\forall k \in \mathbb{Z}$, $Df(k) = f(k+1) - f(k)$

Soit $k \in \mathbb{Z}$.

a. $Df(k+n) = f(k+1+n) - f(k+n)$
$= f((k+1)+n) - f(k+n)$ ↙ $f \in F_n$
$= f(k+1) - f(k)$
$= Df(k)$

Donc $\boxed{Df \in F_n}$

b. ~~Soit $(\lambda, k, f) \in$~~ Soit $(\lambda, f, g) \in \mathbb{R} \times F_n^2$,

montrons que D est linéaire :

Soit $k \in \mathbb{Z}$

$D(\lambda f+g)(k) = (\lambda f+g)(k+1) - (\lambda f+g)(k)$
$= \lambda f(k+1) + g(k+1) - \lambda f(k) - g(k)$
$= \lambda(f(k+1) - f(k)) + g(k+1) - g(k)$
$= \lambda D(f)(k) + D(g)(k)$

Donc $D(\lambda f+g) = \lambda D(f) + D(g)$, D est linéaire.

De plus, $\forall f \in F_n$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $Df(k) = f(k+1) - f(k) \in F_n$
car F_n est un sev donc stable par addition

Donc $\boxed{Df \in \mathcal{L}(F_n)}$

c. $\forall k \in \mathbb{Z}$, $Dh(k) = h(k+1) - h(k)$

$$= \cos\left(\frac{2(k+1)\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{2k\pi}{n} + \frac{2\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{2k\pi}{n} + \frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$$

dou l' égalité $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

et $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.

on a $\cos(a+b) - \cos(a-b) = -2\sin(a)\sin(b)$

et pou $a = \frac{2k\pi}{n} + \frac{\pi}{n}$ et $b = \frac{\pi}{n}$

$$\boxed{Dh(k) = -2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{\pi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$$

~~b. $\|Dh\| = \|-2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{\pi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\|$~~

d. $\langle Dh, Dh\rangle = \sum_{k=0}^{n-1} -2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{\pi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) \times -2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \times \sin\left(\frac{\pi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)$

$$= 4 \times \sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right) \times \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{\pi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)^2$$

<u>or</u> : $\sin^2(a) = \frac{1-\cos(2a)}{2}$

$$= 4 \times \sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right) \times \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1 - \cos\left(2\times\frac{(2k+1)\pi}{n}\right)}{2}$$

$$= 2 \times \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) \times \sum_{k=0}^{n-1} 1 - \cos\left(\frac{(4k+2)\pi}{n}\right)$$

$$= 2 \times \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) \times n$$

donc $\boxed{\|Dh\| = \sqrt{2n\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \sqrt{2n}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}$

7] . $\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \Delta f(k) = f(k+1) - 2f(k) + f(k-1)$

a . $\forall (f,g) \in F_n^2, \ \langle f, \Delta(g) \rangle$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} f(k)\,\Delta g(k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} f(k)\big(g(k+1) - 2g(k) + g(k-1)\big)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} f(k)g(k+1) - 2f(k)g(k) + f(k)g(k-1)$$

$$= \cancel{\sum_{k=0}^{n-1} f(k)g(k+1) - f(k)g(k) + \sum_{k=0}}$$

et $\langle Df, Dg \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} Df(k)\,Dg(k)$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} f(k+1)g(k+1) - f(k)g(k+1) + f(k)g(k) - g(k)f(k+1)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} f(k)g(k) - f(k)g(k+1) + \sum_{k=0}^{n-1} f(k+1)g(k+1) - g(k)f(k+1)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} f(k)g(k) - f(k)g(k+1) + \sum_{k=1}^{n} f(k)g(k) - g(k-1)f(k)$$

$$= f(0)g(0) - f(0)g(1) + f(n)g(n) - g(n-1)f(n)$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1} f(k)g(k) - f(k)g(k+1) + f(k)g(k) - g(k-1)f(k)$$

$$= -\sum_{k=0}^{n-1} f(k)\,\Delta g(k) - f(0)g(0) + g(-1)f(0) + f(n)g(n) - g(n-1)f(n)$$

or : f et $g \in F_n$, donc $f(n) = f(0+n) = f(0)$
et $g(n) = g(0+n) = g(0)$

$$= -\sum_{k=0}^{n-1} f(k)\,\Delta g(k) = -\langle f, \Delta g \rangle$$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 297

Nombre de pages :

Session : 2023

Épreuve de : Maths - Appro - EDHEC.

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

~~b. $\langle f, \Delta g\rangle = \sum_{k=0}^{n-1} f(k)\Delta g(k)$~~

~~$= \sum_{k=0}^{n-1} f(k)(Dg(k) - Dg(k-1))$~~

$\langle f, \Delta g\rangle = -\langle Df, Dg\rangle = -\langle Dg, Df\rangle = \langle g, \Delta f\rangle$

d'où Δ est symétrique.

b. Soit λ valeur propre associée au vecteur propre f :

$\langle f, \Delta f\rangle = -\langle Df, Df\rangle$

donc $\langle f, \lambda f\rangle = -\langle Df, Df\rangle$

donc $\lambda \times \|f\|^2 = -\|Df\|^2$

donc $\boxed{\lambda = -\frac{\|Df\|^2}{\|f\|^2} \leq 0}$ car $\|Df\|^2 \geq 0$ et $\|f\|^2 \geq 0$

3) ε_0 application constante de $\mathbb{Z} \to \varepsilon_0$

a) $\Delta\varepsilon_0(k) = \varepsilon_0(k+1) - 2\varepsilon_0(k) + \varepsilon_0(k-1)$

$= 1 - 2 + 1 = 0$

donc $\Delta(\varepsilon_0) = 0$ $\boxed{\varepsilon_0 \in \mathrm{Ker}(\Delta)}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

b. Soit $f \in \ker(\Delta)$, $\Delta(f)(k) = f(k+1) - 2f(k) + f(k-1) = 0$

donc $f(k+1) - 2f(k) + f(k-1) = 0$.

9). $c = \min \{ |\lambda|, \lambda \in Sp(\Delta) \setminus \{0\} \}$

a. Δ est un endomorphisme symetrique, il ~~existe~~ existe donc une BON de F_n formée de vecteurs propres associé aux valeurs propres de Δ.
de plus (ε_0) est une base de $\ker(\Delta)$
par le procédé d'orthonormalisation
$(\frac{1}{\sqrt{n}} \varepsilon_0)$ est une BON de $\ker(\Delta)$, donc vecteur prop associé à la v.p 0.

Donc $\exists (\frac{1}{\sqrt{n}} \varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_{n-1})$ BON de F_n, de vecteur propre de Δ

et ~~comme~~ donc les coordonnées de tout vecteur $f \in F_n$ sont données par

$$f = \sum_{i=0}^{n-1} \langle f, \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i = \langle f, \varepsilon_0 \rangle \varepsilon_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \langle f, \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \langle f, \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i$$

$\exists (\alpha_i)_{i \in [\![1, n-1]\!]} \in \mathbb{R}^n$, $\forall$ $\alpha_i = \langle f, \varepsilon_i \rangle$, $f = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \varepsilon_i$

b. $\|Df\|^2 = \langle Df, Df \rangle = -\langle f, \Delta f \rangle$

~~Pour 2 vecteurs~~

$$= -\left\langle \sum_{i=1}^{n-1} d_i \varepsilon_i , \sum_{j=1}^{n-1} d_j \Delta(\varepsilon_j) \right\rangle$$

$$= \cancel{-\sum} = -\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} d_i d_j \langle \varepsilon_i , \lambda_j \varepsilon_j \rangle$$

$$= -\sum_{i=1}^{n-1} d_i^2 \lambda_i$$

, $\lambda_i \leq 0$ car $\in Sp(\Delta)$ donc $-\lambda_i \geq 0$

et $\|f\|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^{n} d_i \varepsilon_i , \sum_{j=1} d_j \varepsilon_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n-1} d_i^2$

~~et Donc~~ $\cancel{\|Df\|^2 = -\sum_{i=1}^{n-1} d_i^2 \lambda_i \geq -\sum_{i=1}^{n-1} d_i^2 c = -c \sum_{i=1}^{n-1} d_i^2}$

~~Donc~~ $\cancel{\|Df\|^2 \geq}$ $\cancel{\|Df\|^2 \geq -c \times \|f\|^2}$ ~~et.~~

$\cancel{\left| \|Df\|^2 \right| = \left| \sum_{i=1}^{n-1} d_i^2 \lambda_i \right| = \left| \sum_{i=1}^{n-1} d_i^2 \lambda_i \right| \leq \sum_{i=1}^{n-1} d_i^2 |\lambda_i|}$

$\|Df\|^2 = -\sum_{i=1}^{n-1} d_i^2 \lambda_i$ et $\|f\|^2 = \sum_{i=1}^{n-1} d_i^2$.

et $\forall i \in [\![1, n-1]\!], |\lambda_i| \geq c$

donc $-\lambda_i d_i^2 \geq c\, d_i^2$

donc $-\sum_{i=1}^{n-1} d_i^2 \lambda_i \geq c \sum_{i=1}^{n-1} d_i^2$

donc $\boxed{\|Df\|^2 \geq c \|f\|^2}$

$\boxed{10}$.

b. $A = \cancel{3}\ \cancel{3+} J - 3 I_n$, avec $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

b. :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 6 & -3 & -2 \\ -2 & 6 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

D'où $A^2 = -3 \times A$

Soit $P : x \mapsto x^2 + 2x$ polynôme annulateur de A.

$Sp(A) \subset \{0, -2\}$.

De plus ~~rg~~ $rg(A) = 3$ car $C_1 \neq C_2 \neq C_3$

donc 0 valeur propre de A ~~de d~~ associé au sep de dimension 3..

Donc $\boxed{Sp(A) = \{0\}.}$